



论 文

基于统计方法的混沌 Duffing 振子弱信号检测与估计

金天*, 张骅

北京航空航天大学电子信息工程学院, 北京 100191

* 通信作者. E-mail: jintian@buaa.edu.cn

收稿日期: 2010-04-12; 接受日期: 2010-10-19

国家高技术研究发展计划 (批准号: 2009AA12Z313) 和重点实验室基金 (批准号: SKLSDE09KF-06) 资助项目

摘要 本文研究了混沌 Duffing 振子在弱信号检测系统中表现出的统计特性, 说明了 Lyapunov 指数的统计特性与弱信号检测和估计之间的关系. 之前的一些研究表明, 混沌系统可以用于弱信号的检测, 并将 Lyapunov 指数作为判定混沌状态的确定性依据. 但本文的研究工作表明, 弱信号检测系统中的 Lyapunov 指数存在一定的统计特性, 将其作为信号检测判据需要考虑更多因素. 因此, 本文从理论上分析了混沌弱信号检测系统的 Lyapunov 指数存在的统计特性, 并利用仿真数据建立了统计模型, 确立了混沌检测系统的虚警概率和检测概率的计算方法. 进而推导出了策动力阈值门限的选取公式和弱信号检测信噪比, 给出了信号幅度估计的方法. 实验结果表明, 混沌弱信号的检测和估计性能与采样时间和采样间隔密切相关, 可以采用统计信号检测的理论来衡量其性能.

关键词 弱信号检测 Lyapunov 指数 混沌 Duffing 振子 统计信号处理

1 简介

近年来, 在信号处理领域, 如何利用混沌振子检测微弱信号一直是国内外许多科学工作者极为关注的一个重要课题. 1992 年 Birk 等^[1] 做了一定的实验性工作; 1995 年 Haykin^[2] 利用人工神经网络方法研究了混沌噪声背景下的目标弱信号的提取; 1996 年 Leung^[3] 利用 MPSV 方法研究了混沌噪声中 AR 模型的参数估计; 1997 年 Short 和 Kennedy^[4,5] 研究了混沌通信系统中信号的提取. 1999 年 Wang 等^[6] 利用混沌测量系统实现了白噪声背景下信噪比低至 -66 dB 的正弦信号测量, 其后又研究了信号相位和幅度的测量方法^[7]; 2001 年 Wang 等^[8] 依据混沌动力学理论, 成功地提取谐波信号; 2003–2008 年, Li 等^[9–11] 开展了一系列研究工作, 研究了混沌检测系统的频率检测和定量检测技术, 使微弱信号的检测信噪比能够达到 -111 dB. 2009 年, Liu 等^[12] 还开展了利用混沌检测系统检测周期微弱信号的研究工作. 本文的研究表明上述文献由于均未考虑噪声对于混沌状态判定的影响, 缺乏对虚警概率和检测概率的分析及处理, 因此其检测信噪比不能够作为检测系统评价的依据.

利用混沌振子具有对噪声免疫以及对弱信号敏感的特点, 可以建立起一套对弱信号敏感的检测系统, 即混沌弱信号检测系统. 该检测系统可以根据系统运行轨迹的变化, 检测出弱信号. 这种检测方法简单、直观, 适用于信噪比低的条件, 并且受噪声干扰较小. 对于时间序列混沌特性的判别方法主要有

两种: 直观分析法和定量分析法. 直观分析法通过对信号的时域或频域特性的分析, 直观确定混沌的存在与否, 其优点是其直观性和形象性. 但该方法效率低、误差大, 受噪声等因素影响严重, 尚无法得到工程实际应用. 定量分析法通过定量计算混沌的某个特征量判别混沌的存在与否. 混沌的特征量主要有分数维^[13]、Kolmogorov 熵^[14]以及 Lyapunov 指数^[15], 相应地存在 3 种定量判别混沌的方法. Lyapunov 指数定量地描述了相邻轨道间按指数发散或收敛的速度, 判断系统处于混沌态的重要指标是至少存在一个正的 Lyapunov 指数. 由于分数维和 Kolmogorov 熵与 Lyapunov 指数有着不同程度的联系, 而前两者的计算又相对复杂, 所以目前绝大部分弱信号检测的研究采用基于最大 Lyapunov 指数的方法来实现定量检测^[16-18]. 虽然信号检测是一个概率统计问题, 但上述研究对 Lyapunov 指数的概率统计特性缺乏深入地分析. 因此, 尽管在上述研究中已经有人^[16,19]发现了 Lyapunov 指数检测的不准确性, 但均未开展进一步分析与研究.

本文针对之前研究工作及文献的不足, 采用统计信号检测方法, 对 Lyapunov 指数在弱信号检测过程中的概率统计特性进行了深入分析, 建立了 Lyapunov 指数的统计特性模型, 从而揭示了 Lyapunov 指数与信号检测概率和虚警概率之间的联系. 本文首次将混沌检测与统计信号检测方法结合在一起, 改变了传统混沌弱信号检测过程中将 Lyapunov 指数作为一个确定性检测的方法. 同时, 本文还将统计信号检测与估计理论应用到混沌系统检测领域中, 首次实现了利用统计模型来解决混沌弱信号能量估计问题.

本文在第 2 部分主要介绍传统的 Duffing 振子弱信号检测方法; 在第 3 部分主要对混沌弱信号检测系统中的 Lyapunov 指数统计特性开展理论分析, 并结合实际仿真数据分别建立 Lyapunov 指数在混沌态、临界态和大尺度周期态的统计模型; 在第 4 部分, 主要利用统计信号检测的理论对混沌检测系统的虚警概率、检测概率和检测信噪比进行分析, 进而利用上述特性研究了混沌弱信号幅度的估计方法; 第 5 部分是对本文工作的一个总结.

2 基于 Duffing 振子的混沌弱信号检测方法

2.1 Duffing 振子与状态相图

Duffing 振子是由 Duffing 于 1918 年引入到非线性动力学领域. 用于微弱周期信号检测的一种改进型 Holmes-Duffing 方程^[16,20]的表达式为

$$x'' + kx' - ax^3 + bx^5 = F \cos(\omega t). \quad (1)$$

其动力学方程如公式 (2) 所示:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -ky + ax^3 - bx^5 + F \cos(\omega t), \end{cases} \quad (2)$$

其物理意义表征了具有立方恢复力项的非线性振子方程, k 为阻尼系数, a 和 b 为实数因子, $a = b = 1$, $ax^3 - bx^5$ 为非线性恢复力, F 为周期策动力幅度. 随着幅值 F 由零开始增加, 系统将依次出现同宿态、周期分岔、混沌态、临界状态和大尺度周期态五种状态. 其中用于信号检测的混沌态、临界态和大尺度周期态的相图轨迹如图 1 所示.

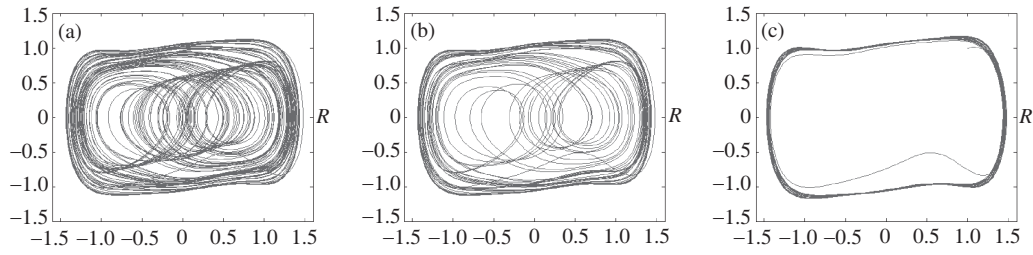


图 1 混沌系统相图 (混沌态、临界态和大尺度周期态)

Figure 1 Phase portraits of the chaotic system

(a) Chaotic states; (b) critical states; (c) large-scale periodic states

根据文献 [21], 混沌振子能检测极微弱信号的原因在于系统相变对噪声的免疫力. 其具体原因可归结为 3 条: 第一是系统的非线性增益, 大尺度的周期运动迅速使小信号从噪声背景中“脱颖而出”, 信号幅值可提高 100 倍左右. 第二在于系统进入周期态后对噪声的抑制作用. 第三在于取样积分. 根据该文献对于图 1 中最右侧 R 点的噪声统计特性可知, R 点采样的信噪比为

$$\text{SNR}_0 = \frac{\sqrt{m}x_a}{\sigma} = \frac{\sqrt{m}x_a}{\sqrt{0.48h\sigma_0}}, \quad (3)$$

输入信号幅度信噪比为

$$\text{SNR}_1 = \frac{A}{\sigma_0}, \quad (4)$$

非线性引起的能量信噪比改善比为

$$\text{SNIR} = 20 \lg \left(\frac{x_a}{A} \sqrt{\frac{m}{0.48h}} \right), \quad (5)$$

其中, A 为输入信号幅度, x_a 为相图最右侧点 R 在 x 坐标的位置, m 为取样积分次数, h 为采样间隔, σ_0 为输入噪声的根方差, σ 为 R 点坐标抖动的根方差. 根据其实验结果, 当输入信号幅度为 0.01, 采样间隔为 0.001 时, x_a 为 1.71. 即使只有一次取样积分, 信噪比的改善即可以达到 77.8 dB. 但由于判断混沌系统的弱信号检测是基于相图状态的变化, 而不是基于相图中 R 点的数值, 因此该数值仅对抑制噪声具有重要意义, 对于弱信号检测并无参考意义.

2.2 Lyapunov 指数

由于状态相图的状态转变需要人工进行, 缺乏定量的判断方法, 因而不适合工程应用. 混沌运动的基本特点是运动对初始条件的敏感性. 两个极为靠近的初值所产生的轨道, 随时间推移按指数形式分离, Lyapunov 特性指数可以作为描述这一现象的定量 [15]. 在相图中选取时间 0 和时间 t 相邻的两个点. 在第 i 维方向上, 这两个点的距离使用 $\|\delta x_i(0)\|$ 和 $\|\delta x_i(t)\|$ 表示. Lyapunov 指数被定义为相对于初始位置的偏移量:

$$\frac{\|\delta x_i(t)\|}{\|\delta x_i(0)\|} = e^{\lambda_i t} (t \rightarrow \infty), \quad (6)$$

或者

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta x_i(t)\|}{\|\delta x_i(0)\|}. \quad (7)$$

对于如公式 (1) 的混沌检测相图, 存在两个 Lyapunov 指数, 其和为 $-k$. 对于系统是否存在动力学混沌, 可以从最大的 Lyapunov 指数是大于零来直观判断 [22]. 如果最大的 Lyapunov 指数大于零, 意味着在系统相空间中, 无论初始轨迹的间距如何, 其差别都会演化为混沌现象. 反之如果最大的 Lyapunov 指数小于零, 意味着在系统相空间中存在被检测的周期信号, 系统处于大尺度周期状态. 由于 Lyapunov 指数良好的定量特性, 也可以在 Lyapunov 指数的辅助下, 选定策动力幅度阈值 F_r .

连续系统 Lyapunov 指数的计算方法主要有定义法、Jacobian 法、Wolf 法 [23]、小数据量法 [24] 等. 如果已知系统方程时, 则 Lyapunov 指数通常采用定义法、Jacobian 法. 而如果系统方程比较复杂或者仅为一时间序列时, 通常采用 Wolf 法、小数据量法来重构相空间后计算 Lyapunov 指数. 本文的检测系统因为已知其系统方程, 因此采用 Jacobian 法计算. 具体 Jacobian 算法如下:

连续系统 $x' = D(x)$, 其中 $x' = \frac{dx}{dt}$, 相图中的 x 的存在的方差抖动收到输入噪声信号 n_σ 的影响. 其连续的切空间中 $x(t)$ 处的点的切向量 e 可以用下面的方程描述:

$$e' = J(x(t))e, \quad (8)$$

其中, $J = \frac{\partial D}{\partial x}$. 这里 J 是方程式 D 的 Jacobian 矩阵. 令 U 中的变量 $e(0) \rightarrow e(t)$ 为一个连续的线性算子, 求解上面的方程即可得到

$$e(t) = U(t, e(0)). \quad (9)$$

这样映射 U 的演化渐进为可以用 Jacobian 给出的指数来完全地刻画, 即

$$\lambda(x(0), e(0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|e(t)\|}{\|e(0)\|}. \quad (10)$$

于是这种渐进演化的平均数可表示为

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{k\Delta t} \sum_{j=1}^k \ln \frac{\|e((j+1)\Delta t)\|}{\|e(j\Delta t)\|}, \quad (11)$$

该式即是计算连续系统的 Lyapunov 指数的 Jacobian 算法. 定义采样间隔 $h = \Delta t$, 采样时间 $n = k\Delta t$.

2.3 传统的弱信号混沌检测方法

Wang 在文献 [6] 中首次提出了弱信号检测的方法和步骤. 第 1 步, 在公式 (1) 中固定阻尼系数 k , 并逐步增加策动力 F , 使混沌相图进入混沌态和大尺度周期态之间的临界状态. 所谓临界态是指只要再次增加 F 都会使相图进入大尺度周期态的状态, 相图的转换过程如图 1 (b), (c) 所示. 目前, 临界态的判定通常采用 Lyapunov 指数进行. 第 2 步, 记录此时的策动力幅度阈值 $F_r = F$, 并以策动力幅度阈值建立 Duffing 方程. 第 3 步, 当外界输入 $s(t)$ 的待测周期信号频率与周期策动力角频率 ω 相同或接近时, 即使信号淹没在强噪声环境中, 也能够被检测出来. 方程形式如公式 (12) 所示:

$$x'' + kx' - ax^3 + bx^5 = F_r \cos(\omega t) + S(t), \quad S(t) = A \cos(\omega t) + n_\sigma(t), \quad (12)$$

其中, A 为输入周期信号的幅度, $n_\sigma \sim N(0, \sigma_0^2)$, σ_0 为噪声信号的幅度. 如果存在一定周期的信号能量为 A (即使 $A \ll \sigma_0$), 系统解的相图也将从混沌态转变到大尺度周期态. 根据文献 [11], 对于输入的周期正弦波信号, 其检测能量信噪比能够达到 -110 dB, 即 $10 \lg \frac{A^2}{\sigma_0^2} = -110$ dB.

3 Lyapunov 指数的概率统计特性

上述研究工作存在的主要问题在于忽略或假设噪声不会影响混沌状态判据, 将 Lyapunov 指数直接作为判据使用, 从而导致检测系统存在过高的误警概率. 本小节首先从混沌系统的非线性增益入手, 对影响 Lyapunov 指数判据的各种因素进行理论分析. 在此基础上, 通过建立 Lyapunov 指数的特征模型, 研究混沌态、临界态和大尺度周期态的 Lyapunov 指数与策动力之间的关系. 最终通过仿真验证并确立不同状态中 Lyapunov 指数与输入噪声之间的关系模型.

3.1 混沌系统的非线性增益

混沌系统的非线性增益虽然存在, 但不能够直接作为对信号检测定量的判断. 鉴于上述问题, 对于混沌相图的状态转换通常采用 Lyapunov 指数来判定. 虽然, Lyapunov 指数是一个确定性的判据方法, 且非线性增益能够达到 77 dB 以上. 但相图中的相轨迹受到噪声的影响产生抖动, 必然对该指数的测量产生影响. 因此, 我们认为实际计算得出的 Lyapunov 指数由于受到输入噪声干扰, 并不适合作为一个确定性的判据方法. 由于在相图最右侧点 R 中, $x' = 0$, $x'' \approx 0$, 加在输入信号上的噪声 σ_0 , 经过一个系数因子 $\sqrt{0.48h}$ 以后, 被加入到 F_r 中. 所以, 研究 F_r 与 Lyapunov 指数的概率统计特性, 等价于分析输入噪声信号与 Lyapunov 指数的关系. 由于相图中 x 的噪声方差 σ_x 与输入噪声方差 σ_0 之间相差系数因子 $\sqrt{0.48h}$, 因此减少采样间隔 h 有助于降低相图 x 的噪声方差.

3.2 Lyapunov 指数统计特性的理论分析

在大尺度周期态和临界态中, 对于 Lyapunov 指数计算的几个影响因素包括: 采样间隔 h 、采样时间 n 、输入噪声强度 σ_0 、策动力阈值 F_r 和输入信号 A . 引入信号噪声对于 Lyapunov 指数计算的影响可以看作在其上叠加的噪声.

对于采样间隔 h 而言, 文献 [21] 中已经详细证明了, 相图噪声方差与输入信号方差的改善信噪比与 h 成正比. 混沌振子输入方差为 σ_0^2 的正态噪声信号, 其方程表达式为公式 (12) 所示. 以相图最右侧点 R 为研究对象, 根据文献 [21] 可知, 该噪声等效为在相图中增加了一个方差为 σ_x^2 的噪声, 两者存在一定的比例关系. 本文用 $r_1(t)$ 表示两者之间的比例系数, 如公式 (13) 所示:

$$\sigma_x^2 = r_1(t) \times h \times \sigma_0^2. \quad (13)$$

对于采样时间 n 而言, n 增加会减少 Lyapunov 指数的方差. 虽然无法求得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|e(t)\|}{\|e(0)\|}$ 的噪声分布, 但根据公式 (11), Lyapunov 指数为 n 次随机变量结果之和. 根据中心极限定理, 当每个随机变量在计算过程中作用很微小且不具备决定性, 这些随机变量之和服从正态分布 [25]. 因此, 考虑到 $\ln \frac{\|e((j+1)\Delta t)\|}{\|e(j\Delta t)\|}$ 对 Lyapunov 指数影响作用很小, Lyapunov 指数也服从正态分布, 且分布的方差随着 n 的增加而线性减少. 假设方差 Lyapunov 指数的方差为 σ_λ^2 , 其公式如 (14) 式所示:

$$\sigma_\lambda^2 = \frac{r_2 \times \sigma_x^2}{n}. \quad (14)$$

在混沌态中, 混沌振子对输入的信号不敏感, 输入信号对于相图方差的影响很小. 因此相图轨迹的方差 σ_x^2 可以近似认为符合与输入信号无关的正态噪声分布, 本文用 r_3 表示其比例系数, 如公式 (15) 所示:

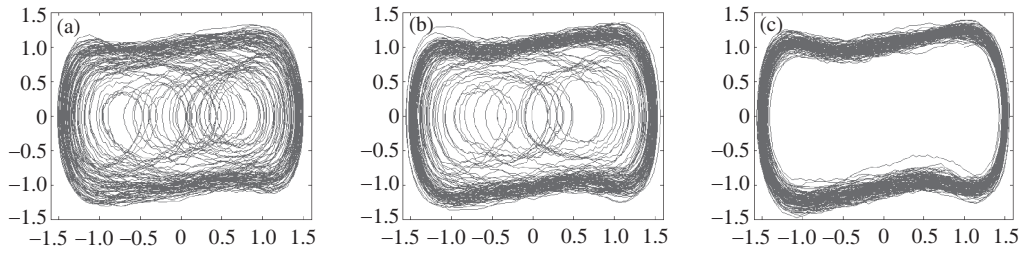


图 2 引入噪声后的混沌系统相图 (混沌态、临界态和大尺度周期态)

Figure 2 Phase portraits of a chaotic system affected by noise

(a) Chaotic states; (b) critical states; (c) large-scale periodic states

$$\sigma_x^2 = r_3 \times n_0^2. \quad (15)$$

通过仿真实验可以看出引入噪声以后的 3 个状态相图如图 2 所示. 与图 1 相比, 可以看出相图的轨迹明显受到了输入信号中噪声的影响.

综上所述, 引入的噪声 σ_0 可以等价看作是对策动力 F 施加了一个微小的影响 f , 最终影响 Lyapunov 指数判决. 由于 f 是对影响因素的一个等价估计, 不能够从理论推导. 因此本文试图通过统计分析的方法, 以确定输入噪声方差与策动力之间的关联特性.

由公式 (12) 可知, 当存在被检测弱信号时, 公式 (12) 可以化简为公式 (16),

$$\begin{aligned} x'' + kx' - ax^3 + bx^5 &= F_r \cos(\omega t) + A \cos(\omega t) + \sigma_0 \text{randn}(t) \\ &= (F_r + A) \cos(\omega t) + \sigma_0 \text{randn}(t), \end{aligned} \quad (16)$$

其作用相当于将弱信号幅度增加在策动力 F_r 上, 从而使 Lyapunov 指数出现从正变负的过程.

3.3 Lyapunov 指数的统计特性建模

3.3.1 Lyapunov 指数与策动力之间的关联

在没有噪声输入情况下, F_r 与最大 Lyapunov 指数的关系如图 3 所示. 图中的跳变位置为 Lyapunov 穿越 0 点的位置, 表示振子系统处于临界状态. 在其左右两侧分别为混沌状态和大尺度周期状态.

实验表明, F_r 的具体取值与动力学方程 (12) 以及计算参数 n, h 均有一定的关系. 对于方程 (12) 而言, 在不同 n 和 h 条件下, F_r 的取值如表 1 所示.

当 $h=0.01, n=100$ 时, 在周期策动力 F_r 的两侧选取 F_1 和 F_2 , $F_1 = 0.719\ 854\ 757\ 750\ 12$, $F_2 = 0.719\ 854\ 757\ 750\ 14$. 如图 3 所示, 当 $F < F_1$ 时, 系统处于混沌态; 当 $F \geq F_2$ 时, 系统处于大尺度周期态; 当 F 与 F_r 极其接近 ($F_1 \leq F < F_2$) 时, 系统处于临界状态. 对于不同阶段, Lyapunov 指数的噪声项分别使用 n_c, n_p 和 n_l 表示. 引入输入噪声以后, F_r 与 Lyapunov 指数的关系如公式 (17) 描述.

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_c + n_c, & F < F_1, \\ \lambda_2 = \lambda_p + n_p, & F_1 \leq F < F_2, \\ \lambda_3 = \lambda_l + n_l, & F \geq F_2, \end{cases} \quad (17)$$

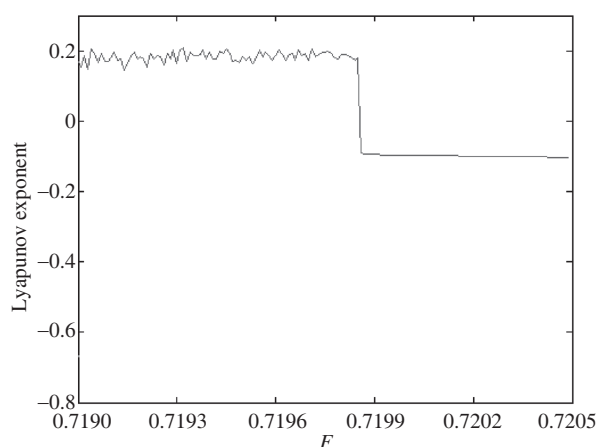


图 3 Duffing 振子的最大 Lyapunov 指数与周期策动力 F 的关系图

Figure 3 Relationship between the largest Lyapunov exponent of a Duffing oscillator and driving force

表 1 周期策动力阈值取值表

Table 1 Value of driving force threshold in different parameters

h	n	F_r
0.01	100	0.719 854 757 750 137
0.001		0.718 594 051 440 14
0.0001		0.718 489 729 295 16
0.01	1000	0.719 854 757 750 121
	10000	0.719 854 757 750 121

其中, λ_1 , λ_2 和 λ_3 分别表示混沌态、临界态和大尺度周期态的 Lyapunov 指数.

3.3.2 混沌态的 Lyapunov 指数分布特性

混沌态的最大 Lyapunov 指数服从均值不为 0 的高斯分布, 其均值 λ_c 恒定, 与 F_r 和 σ_0 均无关. 在混沌状态中, 动力学系统对输入噪声的免疫性表现在其 Lyapunov 指数的方差并不会随着输入噪声方差的增加而增加. 造成此现象的原因并非输入噪声对线性系统没有影响, 而是混沌状态自身的 Lyapunov 指数的方差要远高于输入信号的方差, 因此噪声的作用效果无法看出. 如果此时噪声方差继续增加, 就会导致动力学系统离开混沌状态, 进入周期态或者大尺度周期态.

将公式 (14) 和 (15) 代入公式 (17) 可知, 在输入信号为噪声的情况下, 检测系统在混沌态输出的 Lyapunov 指数为

$$\lambda_1 = \lambda_c + n_c = \lambda_c + \frac{R_c}{\sqrt{n}}n_0, \quad (18)$$

其中, λ_c 表示混沌状态的 Lyapunov 指数均值, n_c 表示其噪声, n_0 表示符合 Gaussian(0,1), R_c 为比例因子, n 为采样时间长度. 经表 2 的统计可知, 在 $k = 0.5$, $\sigma_0^2 = 10^{-6}$ 的条件下, $\lambda_c = 0.1815$, $R_c = 0.137$. 由于 λ_c 超过其噪声分布根方差 10 倍以上, 因此在混沌态出现误检的概率为 0. 混沌态的 Lyapunov 指数分布特性如图 4 所示.

表 2 混沌态 Lyapunov 指数统计结果

Table 2 Statistic results of the Lyapunov exponent for a chaotic state

F_r	h	n	Mean value	Standard deviation
0.7193	0.01	100	0.1815	0.0140
0.7185	0.001		0.1803	0.0138
0.7180	0.0001		0.1838	0.0135
0.7193	0.01	1000	0.1835	0.0040
		10000	0.1839	0.0013

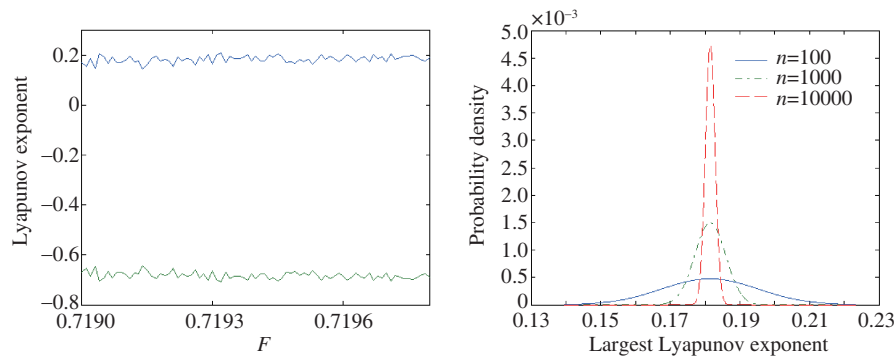


图 4 混沌态的 Lyapunov 指数分布

Figure 4 Lyapunov exponent distribution for a chaotic state

3.3.3 大尺度周期态的 Lyapunov 指数分布特性

大尺度周期态的最大 Lyapunov 指数服从均值不为 0 的正态分布, 其均值为 λ_l . 该均值与混沌周期的 λ_c 的不同点在于其不恒定, λ_l 的取值与 F_r 有关, 通常成线性关系. 方差与采样时间 n 成反比, 与输入噪声成正比. 由此可以看出, 处在大尺度周期态的动力学系统是噪声敏感的.

将公式 (13) 和 (14) 代入公式 (17) 可知, 对于根方差为 σ_0 的输入噪声信号, 检测系统在大尺度周期态输出的 Lyapunov 指数为

$$\lambda_3 = \lambda_l + n_l = \lambda_l + \frac{R_l \sqrt{h}}{\sqrt{n}} n_\sigma, \tag{19}$$

其中, λ_l 表示大尺度周期状态的 Lyapunov 指数均值, n_l 表示其噪声, R_l 为比例因子, n 为采样时间长度, h 为采样间隔. λ_l 为与 F_r 有关的渐变数值. 在 $k = 0.5$, $h = 0.01$, $n = 100$ 的条件下, $\lambda_l = -0.1005$, $R_l = 19.1$. 由于 λ_l 超过其根方差 10 倍以上, 因此在大尺度周期态出现误检的概率近似为 0.

λ_l 与 F_r 的关系可以通过线性拟合的方法获得. 其公式为

$$\lambda_l = -a_l F_r + b_l, \tag{20}$$

其中, a_l 和 b_l 为拟合参数. 根据对 $F = 0.7199 - 0.7205$ 统计可得, $a_l = 12.2809$, $b_l = 8.7454$.

将式 (20) 代入式 (19) 可得

$$\lambda_3 = -a_l F_r + b_l + \frac{R_l \sqrt{h}}{\sqrt{n}} \sigma_0. \tag{21}$$

表 3 大尺度周期态 Lyapunov 指数统计结果

Table 3 Statistic results of the Lyapunov exponent for a large-scale periodic state

F_r	h	n	σ_0	均值	标准差
0.7203	0.01	100	10^{-6}	-0.1005	1.91e-4
0.7195	0.001			-0.0989	1.07e-4
0.7190	0.0001			-0.0963	5.22e-5
0.7203	0.01	1000	10^{-6}	-0.1014	5.59e-5
		10000		-0.1015	1.80e-5
0.7203	0.01	100	10^{-7}	-0.1005	6.67e-5
			10^{-8}	-0.1005	2.04e-5

如果认为输入噪声的影响等效于周期策动力的波动, 可以将输入噪声与周期策动力关联起来, 即

$$\sigma_F = \frac{R_l \sqrt{h}}{a_l \sqrt{n}} \sigma_0. \quad (22)$$

根据表 3 的统计结果可知, $\sigma_F = 0.0156\sigma_0$, 即通过混沌系统使噪声幅度衰减了大约 18 dB. 其分布如图 5 所示.

3.3.4 临界态的 Lyapunov 指数分布特性

在临界点的 Lyapunov 指数出现反转, 可以将 F_r 和 Lyapunov 指数拟合为一条斜率很高的线性关系. 策动力 F 从 0.719 854 757 750 12 变化到 0.719 854 757 750 14 的过程中, Lyapunov 指数从正数下降至负数, 具体如图 6 所示.

将公式 (13) 和 (14) 代入公式 (17) 可知, 对于根方差为 σ_0 的输入噪声信号, 检测系统在临界态输出的 Lyapunov 指数为

$$\lambda_2 = \lambda_p + n_p = \lambda_p + \frac{R_p \sqrt{h}}{\sqrt{n}} n_\sigma, \quad (23)$$

其中, λ_p 表示临界态的 Lyapunov 指数均值, n_p 表示其噪声, R_p 为比例因子, n 为采样时间长度, h 表示采样间隔. λ_p 为与 F_r 有关, 且其数值剧烈变化. 在 $K=0.5$, $F_r=0.719\ 854\ 757\ 750\ 125$, $h=0.01$, $n=100$ 的条件下, $\lambda_p = -0.007019$, $R_p = 1.019 \times 10^{13}$. 对于该指数的线性拟合可以用以下公式表示:

$$\lambda_p = -a_p F + b_p, \quad (24)$$

其中, a_p 和 b_p 为拟合参数. 根据表 4 的统计结果可得, $a_p = 5.256 \times 10^{12}$, $b_p = 3.786 \times 10^{12}$,

$$\sigma_F = \frac{R_p \sqrt{h}}{a_p \sqrt{n}} \sigma_0. \quad (25)$$

根据上述公式计算可知, $\sigma_F = 0.0194\sigma_0$, 该数值与在大尺度周期的统计结果基本一致.

3.4 Lyapunov 指数的概率统计特性

综合上述分析可以得到公式 (17) 中的具体参数的统计特性.

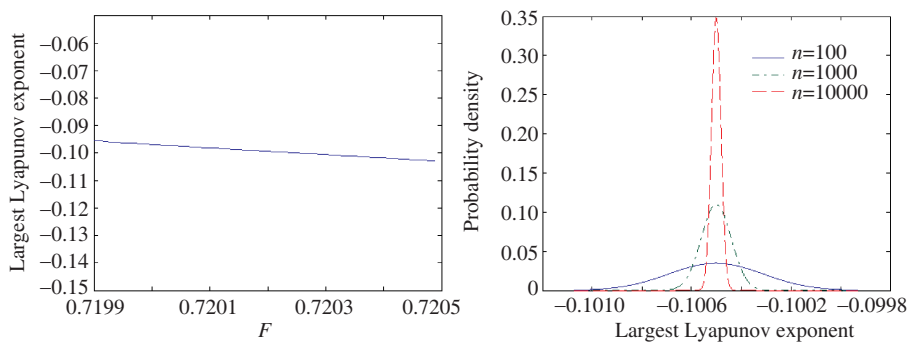


图 5 大尺度周期态的 Lyapunov 指数分布

Figure 5 Lyapunov exponent distribution for a large-scale periodic state

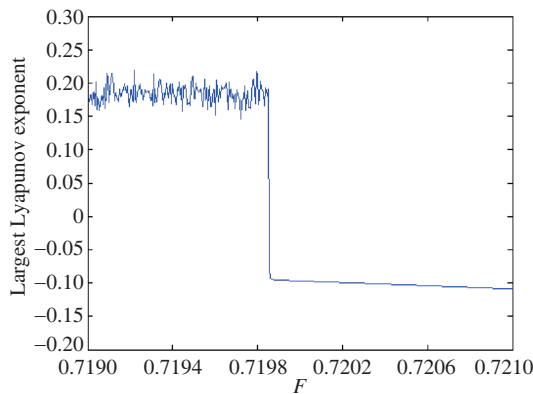


图 6 临界态的 Lyapunov 指数

Figure 6 Lyapunov exponent for a critical state

表 4 临界态的 Lyapunov 指数统计结果

Table 4 Statistical results of the Lyapunov exponent for a critical state

F_r	h	n	σ_0	均值	标准差
0.719854757750125	0.01	100	10^{-28}	0.007019	$1.019\text{e-}3$
		1000		0.006817	$3.364\text{e-}4$
		10000		0.006927	$1.613\text{e-}4$
0.719854757750125	0.01	100	10^{-29}	0.006964	$3.352\text{e-}4$
			10^{-30}	0.006979	$1.568\text{e-}4$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda_1 = \lambda_c + \frac{R_c}{\sqrt{n}}n_0, & F < F_1; \\ \lambda_2 = -a_p F + b_p + \frac{R_p \sqrt{h}}{\sqrt{n}}\sigma_0, & F_1 \leq F < F_2; \\ \lambda_3 = -a_l F + b_l + \frac{R_l \sqrt{h}}{\sqrt{n}}\sigma_0, & F \geq F_2; \end{array} \right. \quad (26)$$

其中, $a_p = 5.256 \times 10^{12}$, $b_p = 3.786 \times 10^{12}$, $a_l = 12.2809$, $b_l = 8.7454$, $R_c = 0.137$, $R_l = 19.1$, $R_p = 1.019 \times 10^{13}$.

4 基于混沌振子的信号检测与估计

4.1 基于混沌振子的弱信号检测

4.1.1 Neyman-Pearson 定理

本文使用 Neyman-Pearson 准则^[9]对混沌系统的弱信号检测问题进行分析. 对于一个一般信号检测问题, 假定

$$\begin{cases} H_{s0}: & x(t) = n_\sigma(t), \\ H_{s1}: & x(t) = A \cos(\omega t) + n_\sigma(t), \end{cases} \quad (27)$$

其中, $n_\sigma(t) \sim N(0, \sigma_0)$. 根据公式 (16), 对 H_s 进行连续 n 次检验, 其第 k 次检验结果等价于对下述假设的检验:

$$\begin{cases} H_{F0}: & F[k] = F_r + n_F[k], \\ H_{F1}: & F[k] = F_r + A + n_F[k], \end{cases} \quad (28)$$

其中, $n_F(t) \sim N(0, \sigma_F)$. 由于 $F[k]$ 无法通过测量得出, 可以通过 F 与 Lyapunov 指数之间的映射关系来进行判决. 对于 Lyapunov 指数的二元假设可以表达为

$$\begin{cases} H_{l0}: & \lambda[k] \geq 0, \\ H_{l1}: & \lambda[k] < 0, \end{cases} \quad (29)$$

可以认为其等效为

$$\begin{cases} H_{l0}: & F[k] \leq F_2, \\ H_{l1}: & F[k] > F_2. \end{cases} \quad (30)$$

不同输入信号条件下的 Lyapunov 指数分布曲线如图 7 所示.

4.1.2 虚警概率

用 $P(H_{l1}; H_{s0})$ 来表示对于不存在输入信号的情况下, Lyapunov 指数大于 0 的概率. 由于 n_f 服从正态分布, 检测系统的虚警概率为

$$\begin{aligned} P_{fa} &= P(H_{l1}; H_{s0}) = P(F[k] > F_2; H_{s0}) = \int_{F_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_F^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_F^2}(k - F_r)^2\right] dk \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{F_2 - F_r}{\sqrt{2}\sigma_F}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{a_l \sqrt{n}}{R_l \sqrt{h}} \frac{F_2 - F_r}{\sqrt{2}\sigma_0}\right). \end{aligned} \quad (31)$$

对于一个固定的 Duffing 振动方程, R_l , a_l , F_2 参数均为固定参数, 因此可以通过增加采样时间 n , 降低采样间隔 h 和降低策动力域值 F_r 的方法来降低虚警概率. F_r 与 P_{fa} 之间的关系如下所示:

$$F_r = F_2 - \sqrt{2}\sigma_0 \frac{R_l \sqrt{h}}{a_l \sqrt{n}} \operatorname{erfc}^{-1}(2P_{fa}). \quad (32)$$

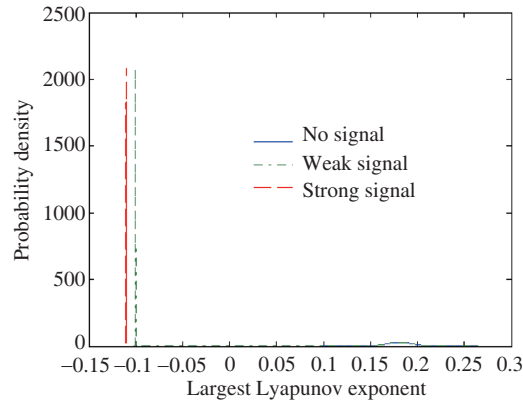


图 7 Lyapunov 指数用于弱信号检测的分布曲线

Figure 7 Lyapunov exponent distributions in weak signal detection

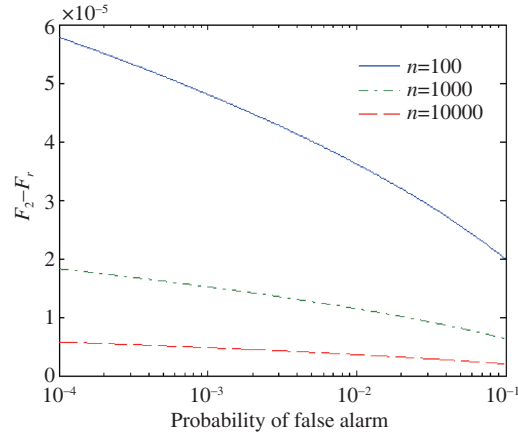


图 8 输入噪声与虚警概率的关系曲线

Figure 8 Relationship between false alarm probability and driving force

在 $h=0.01$, 输入噪声 $\sigma_0^2 = 10^{-6}$ 的情况下, 不同采样时间长度 n 对虚警概率与 F_r 之间的影响如图 8 所示.

若选取 P_{fa} 为 1%, 则 $F_2 - F_r = 3.618 \times 10^{-5}$, F_r 的取值应当为 0.719 818 6.

4.1.3 检测概率

用 $P(H_{l1}; H_{s1})$ 来表示对于存在输入信号的情况下, Lyapunov 指数小于 0 的概率. 由于 n_f 服从正态分布, 检测系统的虚警概率为

$$\begin{aligned} P_d &= P(H_{l1}; H_{s1}) = P(F[k] > F_2; H_{s1}) = \int_{F_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_F^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_F^2}(k - F_r - A)^2\right] dk \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{F_2 - F_r - A}{\sqrt{2}\sigma_F}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{a_l \sqrt{n}}{R_l \sqrt{h}} \frac{F_2 - F_r - A}{\sqrt{2}\sigma_0}\right). \end{aligned} \quad (33)$$

同理可以通过增加采样时间 n , 降低采样间隔 h , 提高策动力域值 F_r 的方法来提高检测概率. F_r 与 P_d 之间的关系如下公式所示:

$$A = F_2 - F_r - \sqrt{2}\sigma_0 \frac{R_l\sqrt{h}}{a_l\sqrt{n}} \operatorname{erfc}^{-1}(2P_d). \quad (34)$$

在 $n=100$, $h=0.01$ 的情况下, 如果要求对于 $\sigma_0^2 = 10^{-6}$ 输入噪声的检测概率与输入信号 A 之间的关系如图 9 所示.

若选取 P_d 为 99%, 则 $A = 7.2362 \times 10^{-5}$, 检测信噪比 $\text{SNR} = 20 \lg(\frac{A}{\sigma_0}) = -22.8 \text{ dB}$.

4.1.4 检测信噪比

将公式 (16) 代入公式 (32) 可得在虚警概率为 P_{fa} 、检测概率为 P_d 的条件下, 输入信号 A 与噪声 σ_0 的信噪比为

$$\begin{aligned} A &= F_2 - F_r - \sqrt{2}\sigma_0 \frac{R_l\sqrt{h}}{a_l\sqrt{n}} \operatorname{erfc}^{-1}(2P_d), \\ \frac{A}{\sigma_0} &= \sqrt{2} \frac{R_l\sqrt{h}}{a_l\sqrt{n}} (\operatorname{erfc}^{-1}(2P_{fa}) - \operatorname{erfc}^{-1}(2P_d)). \end{aligned} \quad (35)$$

公式 (35) 表明, 只要有足够高的信号采样率和信号长度, 弱信号的检测信噪比还可以继续提高.

4.2 基于混沌振子的弱信号估计

与信号检测的方法类似, 测得 Lyapunov 指数后, 可以对输入信号的幅度进行估计. 如果输入信号幅度过低, Duffing 振子将处于混沌状态, 其判定的 Lyapunov 指数不反应输入信号强度. 因此, 幅度估计主要在大尺度周期状态进行. 根据公式 (21) 可得

$$\lambda_3 = -a_l(F_r + A) + b_l + \frac{R_l\sqrt{h}}{\sqrt{n}} n_\sigma, \quad (36)$$

$$A = -\frac{\lambda_3 - b_l}{a_l} - F_r + \frac{R_l\sqrt{h}}{a_l\sqrt{n}} n_\sigma. \quad (37)$$

信号检测的准确程度可以用以下两个公式描述:

$$E(\hat{A}) = -\frac{\lambda_3 - b_l}{a_l} - F_r, \quad (38)$$

$$\operatorname{var}(\hat{A}) = \frac{R_l^2 h}{a_l^2 n} n_\sigma^2. \quad (39)$$

同理, 若希望提高对信号幅度 A 的估计准确度, 仍然可以采用增加采样时间或者减少采样间隔的方法. 当输入信号噪声 $\sigma_0^2 = 10^{-6}$ 时, 其估计效果如图 10 所示.

5 结论

前期的研究文献忽略了噪声对混沌判据的影响, 直接将 Lyapunov 指数作为混沌弱信号检测系统的判据, 从而使基于上述算法的检测信噪比不准确、误警率高. 本文针对上述问题, 着重分析了混沌 Duffing 振子弱信号检测的统计特性, 明确了影响 Lyapunov 指数的因素, 建立了不同状态下 Lyapunov

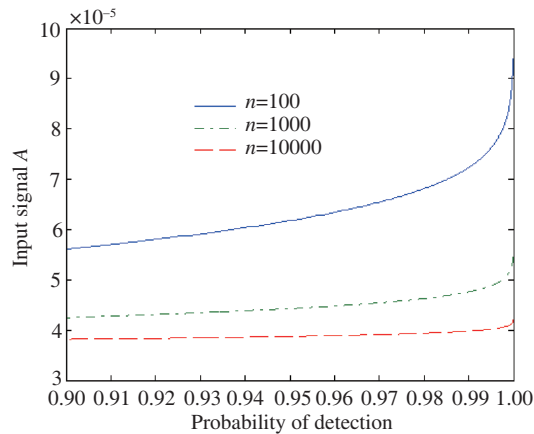


图 9 输入信号幅度与检测概率的关系曲线

Figure 9 Relationship between input signal amplitude and detection probability

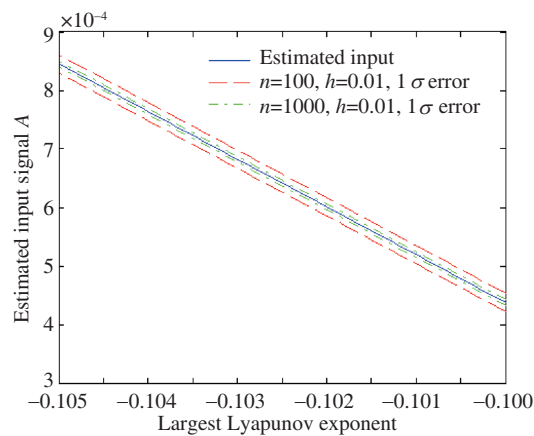


图 10 利用 Lyapunov 指数进行信号幅度估计的效果

Figure 10 Signal amplitude estimation based on the Lyapunov exponent

指数与输入噪声之间的模型. 并以一种改进的 Holmes 型 Duffing 方程为例, 通过仿真计算得出模型中各参数数值. 基于该模型, 得出了混沌弱信号检测系统的虚警概率、检测概率和检测信噪比的计算方法, 并将其进一步扩展到信号估计中. 本文的创新贡献在于, 将统计信号检测与估计的理论扩展到混沌信号检测理论中, 完善了利用 Lyapunov 指数作为混沌弱信号检测判据的方法, 提出了描述弱信号混沌检测系统性能的概率统计学方法.

参考文献

- 1 Birx D L, Pipenberg S J. Chaotic oscillators and complex mapping feed forward networks (CMFFNs) for signal detection in noisy environments. In: International Joint Conference on Neural Networks. New York: IEEE Neural Networks Council, 1992. 881–888
- 2 Haykin S, Xiao B L. Detection of signals in chaos. Proc IEEE, 1995, 83: 95–122
- 3 Leung H, Huang X. Parameter estimation in chaotic noise. IEEE Trans Signal Process, 1996, 44: 2456–2463

- 4 Kennedy M P, Kolumban G. Digital communications using chaos. *Signal Process*, 2000, 80: 1307–1320
- 5 Short K M. Signal extraction from chaotic communication. *Int J Bifurcation Chaos*, 1997, 7: 1579–1597
- 6 Wang G, Lin J, Chen X, et al. The application of chaotic oscillators to weak signal detection. *IEEE Trans Ind Electron*, 1999, 46: 440–444
- 7 Wang G, Zheng W, He S. Estimation of amplitude and phase of a weak signal by using the property of sensitive dependence on initial conditions of a nonlinear oscillator. *Signal Process*, 2002, 82: 103–115
- 8 Wang F P, Guo J B, Wang Z J, et al. Harmonic signal extraction from strong chaotic interference (in Chinese). *Acta Phys Sinica*, 2001, 50: 1019–1023
- 9 Li Y, Xu K, Yang B J, et al. Analysis of the geometric characteristic quantity of the periodic solutions of the chaotic oscillator system and the quantitative detection of weak periodic signal. *Acta Phys Sinica*, 2008, 57: 3353–3358 [李月, 徐凯, 杨宝俊, 等. 混沌振子系统周期解几何特征量分析与微弱周期信号的定量检测. *物理学报*, 2008, 57: 3353–3358]
- 10 Li Y, Yang B J, Lin H B, et al. Simulation and theoretical analysis on detection of the frequency of weak harmonic signals based on a special chaotic system. *Acta Phys Sinica*, 2005, 54: 1994–1999 [李月, 杨宝俊, 林红波, 等. 基于特定混沌系统微弱谐波信号频率检测的理论分析与仿真. *物理学报*, 2005, 54: 1994–1999]
- 11 Li Y, Yang B J, Shi Y W. Chaos-based weak sinusoidal signal detection approach under colored noise background. *Acta Phys Sinica*, 2003, 52: 526–530 [李月, 杨宝俊, 石要武. 色噪声背景下微弱正弦信号的混沌检测. *物理学报*, 2003, 52: 526–530]
- 12 Liu Q Z, Song W Q. Detection weak period signal using chaotic oscillator. In: *Computational Science and Its Applications (ICCSA 2009)*. Berlin: Springer, 2009. 685–692
- 13 Dubuc B, Quiniou J F, Roques-Carmes C, et al. Evaluating the fractal dimension of profiles. *Phys Rev A: At Mol Opt Phys*, 1989, 39: 1500–1512
- 14 Kolmogorov A N. New metric invariant of transitive dynamical systems and endomorphisms of lebesgue spaces. *Dokl Russ Acad Sci*, 1958, 119: 861–864
- 15 Pecora L M, Carroll T L, Johnson G A, et al. Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications. *Chaos Interdisciplinary J Nonlinear Sci*, 1997, 7: 520–543
- 16 Zhang B, Li Y, Ma H T. An algorithm based on Lyapunov exponents to determine the threshold of chaotic detection for weak signal. *Progress Geophys*, 2003, 4: 748–751 [张宾, 李月, 马海涛. 微弱信号混沌检测临界阈值的 Lyapunov 指数算法. *地球物理学进展*, 2003, 4: 748–751]
- 17 Lu S, Wang H Y. Calculation of the maximal Lyapunov exponent from multivariate data. *Acta Phys Sinica*, 2006, 55: 572–576 [卢山, 王海燕. 多变量时间序列最大李雅普诺夫指数的计算. *物理学报*, 2006, 55: 572–576]
- 18 Xu W, Guo J B. Detection of chaotic direct sequence spread spectrum signal based on the largest lyapunov exponent. *J Appl Sci*, 2009, 27: 111–116 [徐威, 郭静波. 混沌直扩信号检测的最大 Lyapunov 指数方法. *应用科学学报*, 2009, 27: 111–116]
- 19 Zhang B, Li Y, Lu J. Study of the Lyapunov characteristic exponents used as the criteria for chaos. *J Jilin University (Inf Sci Ed)*, 2004, 22: 111–114 [张宾, 李月, 卢金. Lyapunov 特性指数用于混沌判据. *吉林大学学报 (信息科学版)*, 2004, 22: 111–114]
- 20 Moon F C, Holmes P J. A magnetoelastic strange attractor. *J Sound Vib*, 1979, 65: 275–296
- 21 Wang G Y, Chen D J, Lin J Y, et al. The statistical characteristics of weak signal detection based on Duffing oscillator. *Acta Electronica Sinica*, 1998, 10: 38–44 [王冠宇, 陈大军, 林建亚, 等. Duffing 振子微弱信号检测方法的统计特性研究. *电子学报*, 1998, 10: 38–44]
- 22 Grassberger P, Procaccia I. Characterization of strange attractor. *Phys Rev Lett*, 1983, 50: 346–349
- 23 Wolf A, Swift J B, Swinney H L, et al. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D*, 1985, 16: 285–317
- 24 Rosenstein M T, Collins J J, de Luca C J. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. *Physica D*, 1993, 65: 117–134
- 25 刘卫江. 概率论与数理统计. 北京: 清华大学出版社, 2005. 82
- 26 Neyman J, Pearson E S. On the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses. *Philos Trans R Soc London, Ser A*, 1933, 231: 289–337

Statistical approach to weak signal detection and estimation using Duffing chaotic oscillators

JIN Tian* & ZHANG Hua

School of Electronic Information Engineering, BeiHang University, Beijing 100191, China

*E-mail: jintian@buaa.edu.cn

Abstract In this paper, we describe the statistical characteristics of weak signal detection by a chaotic Duffing oscillator, and present a new method for signal detection and estimation using the largest Lyapunov exponent. Previous research has shown that weak signals can be detected by a chaotic system. Many researchers use the Lyapunov exponent to flag the detection of a chaotic state, but our research shows that the Lyapunov exponent follows statistical characteristics, and therefore more factors should be considered in flagging chaotic weak signals. Here, we analyze the statistical characteristics inherent in the Lyapunov exponent calculation steps, and build up a statistical model for different chaotic states based on simulation data. Furthermore, we provide expressions for false-alarm and detection probabilities, selection of driving force threshold and detection of signal-noise-ratio. Finally, we summarize the method of signal amplitude estimation. Our research indicates that the performance of the detection system is related to sampling times and intervals, in accord with the theory of statistical signal detection.

Keywords weak signal detection, Lyapunov exponent, chaos, Duffing oscillation, statistical signal process