高维 Burgers 方程外区域问题球对称解的渐近行为

献给陈恕行教授 80 华诞

杨彤¹, 赵会江^{2,3*}, 赵青松²

1. 香港城市大学数学系, 香港;

2. 武汉大学数学与统计学院, 武汉 430072;

3. 武汉大学计算科学湖北省重点实验室, 武汉 430072

E-mail: matyang@cityu.edu.hk, hhjjzhao@whu.edu.cn, qszhao@whu.edu.cn

收稿日期: 2019-08-19; 接受日期: 2020-04-21; 网络出版日期: 2020-07-20; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11731008 和 11671309) 资助项目

摘要 本文考虑高维 Burgers 方程外区域问题球对称解的大时间渐近行为, 主要关注在球对称初始扰动下球对称稳态波的非线性稳定性. 对这一问题, Hashimoto 和 Matsumura (2019) 给出了保证其球对称稳态波存在性的一个充分条件, 但是由于这一稳态波不再是单调的, 他们只能在更强的假设下证明其非线性稳定性. 本文的主要目的是在 Hashimoto 和 Matsumura 给出的保证这一稳态波存在的条件下证明其非线性稳定性. 此外, 还得到了该外区域问题的整体球对称解收敛到上述稳态波的关于时间变元的代数和指数衰减率估计. 本文的稳定性分析是基于空间加权的能量方法, 问题的关键在于构造适当的权函数来控制由于稳态波的非单调性及边界条件的出现所导致的困难. 至于关于时间变元的衰减估计, 除了这一空间加权的能量方法之外, 还利用了由 Kawashima 和 Matsumura 在 1985 年引入的空间 - 时间加权的能量方法.

关键词 高维 Burgers 方程 外区域问题 球对称稳态波 非线性稳定性 空间 - 时间加权的能量方法

MSC (2020) 主题分类 35Q53, 35B40, 35K59

1 引言

本文考虑高维 Burgers 方程在外区域 $\Omega := \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathbb{B}}_{r_0}(0) \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3, n$ 为空间维数) 上的如下初边值问题:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= \mu \Delta \mathbf{u}, \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \\ \mathbf{u}(0, x) &= \mathbf{u}_0(x), \quad x \in \Omega, \\ \mathbf{u}(t, x) &= \mathbf{b}(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \partial \mathbb{B}_{r_0}(0) \end{aligned} \quad (1.1)$$

英文引用格式: Yang T, Zhao H J, Zhao Q S. Asymptotics of radially symmetric solutions for the exterior problem of multidimensional Burgers equation (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1057–1072, doi: 10.1360/SSM-2019-0204

整体解的大时间渐近行为的精确描述. 与文献 [1-3] 一样, 我们的主要目的是探讨空间维数 n 对初边值问题 (1.1) 整体解的大时间行为的影响. 这里 $\mathbf{u} = (u_1(t, x), \dots, u_n(t, x))$ 是 $t \geq 0$ 和 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 的向量值函数, $\mathbf{u} \cdot \nabla = \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, μ 和 $r_0 > 0$ 是给定的正常数. $\mathbf{u}_0(x)$ 和 $\mathbf{b}(t, x)$ 分别是给定的初始值和边值, 它们满足相容性条件, 即对任意 $x \in \partial \mathbb{B}_{r_0}(0)$ 有 $\mathbf{b}(0, x) = \mathbf{u}_0(x)$ 成立.

本文考虑初边值问题 (1.1) 的球对称解. 实际上, 如果设 $\mathbf{b}(t, x) = \frac{x}{|x|} v_-, \mathbf{u}_0(x) = \frac{x}{|x|} v_0(|x|)$, 这里 $v_0(|x|)$ 是一个满足 $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} v_0(|x|) = v_+$ 和 $v_0(r_0) = v_-$ 的标量函数, $v_{\pm} \in \mathbb{R}$ 是给定的常数, 那么就可以寻找初边值问题 (1.1) 的球对称解. 在这种情形下, 令 $\mathbf{u}(t, x) = \frac{x}{r} v(t, r)$, 这里 $r = |x|$, 则 $v(t, r)$ 满足如下的初边值问题:

$$\begin{aligned} v_t + \left(\frac{v^2}{2} \right)_r &= \mu \left(v_{rr} + (n-1) \left(\frac{v}{r} \right)_r \right), \quad t > 0, \quad r > r_0, \\ v(t, r_0) &= v_-, \quad t > 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} v(t, r) &= v_+, \quad t > 0, \\ v(0, r) &= v_0(r), \quad r > r_0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

这里初值 $v_0(r)$ 假定满足相容性条件

$$v_0(r_0) = v_-, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} v_0(r) = v_+. \quad (1.3)$$

下文记 $V_- = v_- - \frac{\mu(n-1)}{r_0}$.

为了说明空间维数 n 如何影响初边值问题 (1.2) 解的渐近行为, 首先考虑相应的半直线上的一维 Burgers 方程的初边值问题

$$\begin{aligned} v_t + \left(\frac{v^2}{2} \right)_r &= \mu v_{rr}, \quad r > 0, \quad t > 0, \\ v(t, 0) &= v_-, \quad t > 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} v(t, r) &= v_+, \quad t > 0, \\ v(0, r) &= v_0(r), \quad r > 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

对于初边值问题 (1.4), 文献 [4, 5] 的结果表明其大时间行为可以由不带黏性的 Burgers 方程相应的 Riemann 问题

$$\begin{aligned} v_t + \left(\frac{v^2}{2} \right)_r &= 0, \quad t > 0, \quad r \in \mathbb{R}, \\ v(0, r) &= \begin{cases} v_-, & r < 0, \\ v_+, & r > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.5)$$

的唯一整体熵解以及由于边界条件的出现所导致的连接 v_- 和 v_+ 的所谓稳态波 $\phi_{v_-, v_+}(r)$ 来确定. 这里稳态波解 $\phi_{v_-, v_+}(r)$ 满足如下定解问题:

$$\begin{aligned} \left(\frac{v^2}{2} \right)_r &= \mu v_{rr}, \quad r > 0, \\ v(0) &= v_-. \end{aligned} \quad (1.6)$$

关于初边值问题 (1.4) 整体解的大时间渐近行为上述分类的严格数学理论已经由文献 [6–9] 给出. 关于这些已经得到的结论的总结见表 1, 这里 $\phi_{v_-, v_+}(r)$ 是满足问题 (1.6) 的稳态波, $\psi_{v_-, v_+}^R(t, r)$ 是 Riemann 问题 (1.5) 满足 $v_- < v_+$ 的唯一稀疏波解, $W_{v_-, v_+}(r - st)$ 是满足 $W_{v_-, v_+}(\pm\infty) = v_{\pm}$ 的一维 Burgers 方程的行波解, 其中 $v_- > v_+$, $s = \frac{v_- + v_+}{2}$ (当然要经过一个适当的由初始值确定的平移).

但是对于初边值问题 (1.2), 答案就截然不同了. 主要是由于以下两个原因:

(1) 连接 v_- 和 v_+ 的稳态波, 即如下边值问题:

$$\begin{aligned} \left(\frac{v^2}{2}\right)_r &= \mu \left(v_{rr} + (n-1) \left(\frac{v}{r}\right)_r \right), \quad r > r_0, \\ v(r_0) &= v_-, \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} v(r) &= v_+ \end{aligned} \quad (1.7)$$

的解 $\phi_{v_-, v_+}(r)$ 不再是单调的, 因此, 文献 [6, 7] 中的方法不再适用;

(2) 初边值问题 (1.2) 的第一个方程不是自治的, 这就导致如何构造满足 $W_{v_-, v_+}(\pm\infty) = v_{\pm}$ 和 $s \neq 0$ 的行波解仍然是未知的, 更别谈其稳定性分析了.

即使如此, 对于某些情形, 仍然可以使用满足 (1.7) 的稳态波 $\phi_{v_-, v_+}(r)$ 、满足 Riemann 问题 (1.5) 的稀疏波 $\psi_{v_-, v_+}^R(t, r)$ 或者它们所构成的复合波来描述初边值问题 (1.2) 整体解的大时间行为. 这些研究可以参见文献 [1–3]. 对 $n \geq 3$ 的情形, 目前已知的结论可以总结如下:

- 对于 $n = 3$, 与 1 维情形下半直线上的初边值问题 (1.4) 类似, 可以得到其整体解渐近行为的完整分类以及这些分类的严格数学理论, 参见文献 [3].
- 对于 $n > 3$, 只有文献 [1–3] 研究了以下两种情形:
 - (a) 当 $V_- \leq 0 \leq v_+$ 时, 如果再假设

$$0 < v_- < \frac{2\mu}{r_0(1 + \sqrt{(n-3)/(n-1)})}, \quad (1.8)$$

文献 [1–3] 的结果表明整体解的大时间渐近行为是由稳态波 $\phi_{v_-, 0}(r)$ 和稀疏波 $\psi_{0, v_+}^R(t, r)$ 所构成的复合波来刻画的, 这一复合波的非线性稳定性和关于时间变元的代数衰减率估计可以参见文献 [1–3];

(b) 如果 $V_- \leq v_+ < 0$, 由文献 [3] 构造的稳态波 $\phi_{v_-, v_+}(r)$ 是非线性稳定的, 然而初边值问题 (1.2) 的整体解 $v(t, r)$ 收敛到稳态波 $\phi_{v_-, v_+}(r)$ 的关于时间变元的衰减率还是不知道的.

因此, 对于 $n > 3$, 就我们所知, 下面 4 种情形仍未解决:

- (a) $V_- \leq 0 \leq v_+$ 但是 $v_- \notin (0, \frac{2\mu}{r_0(1 + \sqrt{(n-3)/(n-1)})})$;
- (c) $0 < V_- < v_+$;
- (d) $V_- > v_+, V_- + v_+ < 0$;

表 1 初边值问题 (1.4) 的已有结论

边界条件		渐近行为
$v_- < v_+$	$v_- < v_+ \leq 0$	ϕ_{v_-, v_+} , 文献 [6]
	$v_- < 0 < v_+$	$\phi_{v_-, 0} + \psi_{0, v_+}^R$, 文献 [6]
	$0 \leq v_- < v_+$	ψ_{v_-, v_+}^R , 文献 [6]
$v_- > v_+$	$v_- + v_+ < 0$	ϕ_{v_-, v_+} , 文献 [7]
	$v_- + v_+ \geq 0$	W_{v_-, v_+} , 文献 [7–9]

(e) $V_- > v_+, V_- + v_+ \geq 0$.

本文主要目的是, 在如下条件:

$$v_+ < 0, \quad V_- \leq |v_+| \quad (1.9)$$

下, 考虑由文献 [3] 所构造的稳态波 $\phi_{v_-, v_+}(r)$ 的非线性稳定性. 值得指出的是, 这个条件是由文献 [3] 给出的保证定解问题 (1.7) 稳态波 $\phi_{v_-, v_+}(r)$ 存在的一个充分条件.

注意到 (1.9) 同时包含了情形 (b) 和 (d). 所得到的主要结论可以概括如下:

- 对于情形 (b), 得到了关于时间变元的代数和指数衰减率估计;
 - 对于情形 (d), 证明了稳态波 $\phi_{v_-, v_+}(r)$ 的非线性稳定性, 并得到了关于时间变元的衰减率估计.
- 到目前为止, 关于初边值问题 (1.2) 的整体解大时间渐近性态的严格数学理论的总结见表 2.

在结束本部分之前, 我们给出本文的主要思想. 与之前所说的一样, 本文重点研究稳态波 $\phi_{v_-, v_+}(r)$ 的非线性稳定性. 文献 [3, 命题 2.3] 给出了稳态波所满足的定解问题 (1.7) 的解 $\phi_{v_-, v_+}(r)$ 存在的一个充分条件 (在下文中, 为了记号上的简洁, 用 $\phi(r)$ 来代替 $\phi_{v_-, v_+}(r)$). 对于这一稳态波的非线性稳定性, 由于其不再是单调函数, 文献 [3] 中处理的方法是引入新的未知函数 $z(t, r) = r^{\frac{n-1}{2}}(v(t, r) - \phi(r))$. 由 (1.2) 和 (1.7) 可以推出 $z(t, r)$ 满足 (参见文献 [3, (5.2)])

$$\begin{aligned} z_t + (\phi z)_r + \left(-\frac{n-1}{2r}\phi + \frac{\mu(n^2-1)}{4r^2} \right) z - \mu z_{rr} &= \frac{n-1}{2r^{\frac{n+1}{2}}} z^2 - \frac{1}{2r^{\frac{n-1}{2}}} (z^2)_r, \quad t > 0, \quad r > r_0, \\ z(t, r_0) &= 0, \quad t > 0, \\ z(0, r) &= z_0(r) := r^{\frac{n-1}{2}}(v_0(r) - \phi(r)), \quad r > r_0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

对于初边值问题 (1.10), 如果使用文献 [3] 中的能量方法来作零阶能量估计, 会发现在基本能量估计式的左边会出现下面的项:

$$I := \frac{1}{2} \int_0^t \int_{r_0}^{+\infty} \left(\phi_r - \frac{n-1}{r}\phi + \frac{\mu(n^2-1)}{2r^2} \right) z^2 dr d\tau. \quad (1.11)$$

对于一维情形, 稳态波 $\phi(r)$ 是单调递增的, 因此, 这一项有很好的符号, 可以得到其非线性稳定性. 但是对于 $n \geq 3$, 由于 $\phi(r)$ 不再是单调的, 很难确定这一项的符号. 文献 [3] 中的主要观察是当

$$v_{\pm} < 0, \quad V_- \leq v_+ \quad (1.12)$$

时, 可以证得 (参见文献 [3, 引理 2.4]) 存在负的常数 $\nu_0 < 0$, 使得

$$\phi(r) \leq \nu_0 < 0, \quad r \geq r_0, \quad (1.13)$$

表 2 问题 (1.2) 的已知结论

边界条件		渐近行为	时间衰减估计
$V_- < v_+$	$V_- \leq v_+ < 0$	ϕ_{v_-, v_+} , 文献 [3] 和本文	本文
	$V_- < 0 \leq v_+$	$\phi_{v_-, 0} + \psi_{0, v_+}^R$, 文献 [1-3] 得到部分结果	文献 [3] 得到部分结果
	$0 < V_- < v_+$	未知	未知
$V_- > v_+$	$V_- \leq -v_+ > 0$	ϕ_{v_-, v_+} , 本文	本文
	$V_- + v_+ > 0$	未知	未知

并且对 $r > r_0$, $\phi(r) - \frac{\mu(n-1)^2}{2r}$ 是单调非减的, 即

$$\frac{d\phi(r)}{dr} + \frac{\mu(n-1)^2}{2r^2} \geq 0, \quad r > r_0. \quad (1.14)$$

有了上述估计后, 文献 [3] 的主要思想就是利用 (1.13) 和 (1.14) 推知 $I \geq 0$, 因此可以通过能量方法得到稳态波的非线性稳定性 (参见文献 [3, 定理 3.2]).

由于本文的目的是保证稳态波存在性的充分条件 (1.9) 下研究其非线性稳定性, 因此, 文献 [3] 中的方法不再适用. 我们的主要想法是采用反导数法引入新的未知函数

$$w(t, r) = - \int_r^\infty (v(t, y) - \phi(y)) dy \quad (1.15)$$

并使用空间加权的能量方法来得到我们想要的非线性稳定性结果. 我们分析的关键点是构造合适的权函数 $\chi(r)$ 来克服由于稳态波 $\phi(r)$ 的非单调性和边界条件的出现所带来的困难. 细节详见引理 2.2 中权函数 $\chi(r)$ 的性质和第 3 节中定理 2.1–2.3 的证明. 至于初边值问题 (1.2) 的整体解 $v(t, r)$ 收敛到稳态波 $\phi(r)$ 的关于时间变元的代数和指数时间衰减率估计, 除了使用上述空间加权的能量方法之外, 我们还利用了文献 [10, 11] 中所采用的空间 - 时间加权的能量方法.

本文余下内容的安排如下: 第 2 节列出文献 [3] 中得到的关于稳态波 $\phi(r)$ 的一些基本性质, 再给出权函数 $\chi(r)$ 的构造方法及其所满足的性质, 在此基础上给出本文所得到的主要结论, 其证明将在第 3 节给出.

记号 在本文中, $L^2 = L^2([r_0, \infty))$ 表示 $[r_0, \infty)$ 上的平方可积函数, 相应范数为 $\|\cdot\|$. 对每一非负整数 k , 用 H^k 表示 k -阶 Sobolev 空间 $H^k([r_0, \infty))$, 相应范数为 $\|\cdot\|_{H^k}$.

对 $\alpha \in \mathbb{R}$, 定义代数加权 Sobolev 空间 $H^{k, \alpha}$. $H^{k, \alpha}$ 中的元素 f 满足 $r^{\alpha/2}f \in H^k$, 范数为

$$\|f\|_{k, \alpha} := \|r^{\alpha/2}f\|_{H^k}.$$

对于 $k = 0$, 为了书写简洁, 用 $|\cdot|_\alpha$ 代替 $\|\cdot\|_{0, \alpha}$.

类似地, 也可以定义指数加权 Sobolev 空间 $H_{\text{exp}}^{k, \alpha}$, 其中元素 f 满足对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$, $e^{\alpha r/2}f \in H^k$. 当 $k = 0$ 时, 简记 $\|\cdot\|_{\text{exp}}^{0, \alpha}$ 为 $|\cdot|_{\alpha, \text{exp}}$.

对于一个区间 $I \subset \mathbb{R}$ 和一个 Banach 空间 X , $C(I; X)$ 表示 I 上的连续的 X -值函数. $C^k(I; X)$ 表示 k -阶连续可微的 X -值函数.

2 准备工作和主要结论

在陈述我们的主要结论之前, 首先列出文献 [1–3] 中所得到的关于初边值问题 (1.2) 稳态波 $\phi(r)$ 的一些结论. 注意到 $\phi(r)$ 被称为稳态波, 如果 $\phi(r)$ 是定解问题 (1.7) 的解. 将 (1.7) 关于 r 从 r 到 ∞ 积分可得

$$\begin{aligned} \phi_r + \frac{(n-1)}{r}\phi &= \frac{1}{2\mu}(\phi^2 - v_+^2), \quad r > r_0, \\ \phi(r_0) &= v_-, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r) &= v_+. \end{aligned} \quad (2.1)$$

如果引入新的函数

$$\psi(r) = \phi(r) - \frac{\mu(n-1)}{r}, \quad (2.2)$$

那么边值问题 (2.1) 可以被改写为

$$\begin{aligned} \psi_r &= \frac{1}{2\mu}(\psi^2 - v_+^2) - \frac{c_0}{r^2}, \quad r > r_0, \\ \psi(r_0) &= V_-, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r) &= v_+, \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中 $c_0 = \frac{\mu(n-1)(n-3)}{2}$ 是一个常数. 注意到当 $n = 3$ 时, $c_0 = 0$, 因此, 对于 $n = 3$ 的情形, 初边值问题 (1.2) 唯一整体解的大时间行为与相应的一维半直线上的初边值问题 (1.4) 类似, 这就是为什么在 3 维情形下能给出初边值问题 (1.2) 的解 $v(t, r)$ 完全分类的主要原因, 具体可参见文献 [3]. 正因为如此, 本文仅考虑 $n \geq 4$ 的情形.

对边值问题 (2.3) 的可解性和其唯一解的性质, 可以从文献 [3, 命题 2.3 和引理 2.4] 得到如下结论.

引理 2.1 设 (1.9) 成立, 那么边值问题 (2.3) 存在唯一的光滑解 $\psi(r)$ 满足

$$|\psi(r) - v_+| := \left| \phi(r) - v_+ - \frac{\mu(n-1)}{r} \right| \leq O(r^{-2}), \quad r \rightarrow +\infty.$$

因此, 存在正常数 $C > 0$ 使得

$$\begin{aligned} \psi(r) - v_+ &\in C^\infty \cap L^1([r_0, \infty)), \\ \left| \frac{d^k \psi(r)}{dr^k} \right| &\leq C, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

此外, 如果再假设 $v_\pm$ 满足 (1.12), 那么估计 (1.13) 和 (1.14) 在 $r > r_0$ 成立.

现在考虑初边值问题 (1.2). 如果令

$$w(t, r) = - \int_r^\infty (v(t, y) - \phi(y)) dy, \quad (2.5)$$

那么容易从 (1.2)、(2.2) 和 (2.3) 推出 $w(t, r)$ 是如下初边值问题:

$$\begin{aligned} w_t + \psi w_r - \mu w_{rr} &= -\frac{1}{2}w_r^2, \quad t > 0, \quad r > r_0, \\ w_r(t, r_0) &= \lim_{r \rightarrow \infty} w_r(t, r) = \lim_{r \rightarrow \infty} w(t, r) = 0, \quad t > 0, \\ w(0, r) &= w_0(r) := - \int_r^\infty (v_0(y) - \phi(y)) dy, \quad r > r_0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

的解.

正如上文所说, 与一维半直线上 Burgers 方程的初边值问题 (1.4) 相比, 高维 Burgers 方程的初边值问题 (1.2) 的主要困难在于引理 2.1 中得到的稳态波 $\phi(r)$ 不再是单调的. 为了克服这个困难, 使用空间加权的能量估计. 为此, 引入如下的权函数 $\chi(r) : [r_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\chi(r) = \exp \left(-\frac{1}{\mu} \int_{r_0}^r \psi(s) ds \right) \int_r^\infty \left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{s} \right) \exp \left(\frac{1}{\mu} \int_{r_0}^s \psi(\tau) d\tau \right) ds. \quad (2.7)$$

关于这个权函数 $\chi(r)$ 的性质, 有下面的引理.

引理 2.2 设 (1.9) 成立, 那么 $\chi(r)$ 满足

(1) 存在正常数 c_i ($i = 1, 2$) 使得

$$0 < c_1 \leq \chi(r) \leq c_2 < \infty$$

在 $r \geq r_0$ 成立;

(2) $\chi(r)$ 是常微分方程

$$\frac{d\chi(r)}{dr} + \frac{\psi(r)}{\mu}\chi(r) = \frac{1}{r} - \frac{2}{r_0}, \quad r > r_0$$

的解, 因此,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\chi(r)}{dr} + \frac{\psi(r)}{\mu}\chi(r) \right) \Big|_{r=r_0} &= -\frac{1}{r_0} < 0, \\ \frac{d^2\chi(r)}{dr^2} + \frac{d}{dr} \left(\frac{\psi(r)}{\mu}\chi(r) \right) &= -\frac{1}{r^2} < 0, \quad r > r_0. \end{aligned}$$

证明 以下证明一个更一般的结论. 考虑 $f(r) \in C^1([r_0, \infty))$ 满足

$$f'(r) < 0, \quad f(r_0) < 0, \quad f'(r) \in L^1([r_0, \infty)). \quad (2.8)$$

上述假设的一个直接的推论就是极限 $\lim_{r \rightarrow +\infty} |f(r)|$ 存在并且满足

$$0 < \lim_{r \rightarrow +\infty} |f(r)| < +\infty. \quad (2.9)$$

现在设

$$\tilde{\chi}(r) = -\exp\left(-\frac{1}{\mu} \int_{r_0}^r \psi(s) ds\right) \int_r^\infty f(s) \exp\left(\frac{1}{\mu} \int_{r_0}^s \psi(\tau) d\tau\right) ds. \quad (2.10)$$

由 $f(r)$ 所满足的假设条件 (2.8) 和 (2.9) 以及在引理 2.1 中得到的 $\psi(r)$ 的性质可以看出 $\tilde{\chi}(r)$ 是有定义的并且满足

$$\frac{d\tilde{\chi}(r)}{dr} + \frac{\psi(r)}{\mu}\tilde{\chi}(r) = f(r), \quad r > r_0. \quad (2.11)$$

于是, 再利用假设 (2.8) 可以推出

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\tilde{\chi}(r)}{dr} + \frac{\psi(r)}{\mu}\tilde{\chi}(r) \right) \Big|_{r=r_0} &= f(r_0) < 0, \\ \frac{d^2\tilde{\chi}(r)}{dr^2} + \frac{d}{dr} \left(\frac{\psi(r)}{\mu}\tilde{\chi}(r) \right) &= f'(r) < 0, \quad r > r_0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

现在证明存在正常数 c_i ($i = 1, 2$) 使得

$$0 < c_1 \leq \tilde{\chi}(r) \leq c_2 < \infty \quad (2.13)$$

对任意 $r \geq r_0$ 成立.

为此, 记

$$A(r) = \exp\left(\frac{1}{\mu} \int_{r_0}^r \psi(s) ds\right), \quad B(r) = \int_r^\infty |f(s)| A(s) ds,$$

容易看出在 $r \in [r_0, \infty)$ 时成立 $A(r) > 0$ 和 $B(r) > 0$. 因此, 可以推出对任意 $r \geq r_0$ 都有 $\tilde{\chi}(r) > 0$. 注意到

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^r \psi(s) ds &= \int_{r_0}^r (\psi(s) - v_+) ds + v_+(r - r_0), \\ f(r) &= f(r_0) + \int_{r_0}^r f'(s) ds, \end{aligned}$$

可以从 $v_+ < 0$ 、 $\psi(r) - v_+ \in L^1([r_0, \infty))$ 和 $f(r)$ 所满足的条件推出对任意 $r \geq r_0$, 成立

$$\begin{aligned} A(r) &= \exp\left(-\frac{|v_+|}{\mu}(r - r_0)\right) \exp\left(\frac{1}{\mu} \int_{r_0}^r (\psi(s) - v_+) ds\right) \\ &\leq \exp\left(\frac{1}{\mu} \|\psi - v_+\|_{L^1}\right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

和

$$\begin{aligned} B(r) &\leq (|f(r_0)| + \|f'\|_{L^1}) \exp\left(\frac{1}{\mu} \|\psi - v_+\|_{L^1}\right) \int_r^\infty \exp\left(-\frac{|v_+|}{\mu}(s - r_0)\right) ds \\ &= \frac{\mu(|f(r_0)| + \|f'\|_{L^1})}{|v_+|} \exp\left(\frac{1}{\mu} \|\psi - v_+\|_{L^1} - \frac{|v_+|}{\mu}(r - r_0)\right) \\ &\leq \frac{\mu(|f(r_0)| + \|f'\|_{L^1})}{|v_+|} \exp\left(\frac{1}{\mu} \|\psi - v_+\|_{L^1}\right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

此外, 估计 (2.14) 和 (2.15) 意味着

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} A(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} B(r) = 0. \quad (2.16)$$

由 (2.16)、L'Hospital 法则及 $f(r)$ 所满足的条件 (2.9) 可以得到

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{\chi}(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{B(r)}{A(r)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{B'(r)}{A'(r)} = \frac{\mu}{|v_+|} \lim_{r \rightarrow \infty} |f(r)| \in (0, +\infty). \quad (2.17)$$

有了 (2.14)、(2.15) 和 (2.17) 之后, 估计 (2.13) 自然而然成立.

为了得到引理 2.2 的结论, 只需取 $f(r) = \frac{1}{r} - \frac{2}{r_0}$ 即可. $\square$

有了上述的准备, 现在来陈述本文的主要结论. 第一个结论是关于引理 2.1 中构造的稳态波 $\phi(r)$ 的非线性稳定性.

定理 2.1 假设 (1.9) 成立并且 $w_0 \in H^2$, 那么存在一个足够小的正常数 ϵ 使得, 如果 $\|w_0\|_{H^2} \leq \epsilon$, 初边值问题 (1.2) 存在唯一的整体解 $v(t, r)$ 并且满足

$$v(t, r) - \phi(r) \in C(0, \infty; H^1) \cap L_{\text{loc}}^2(0, \infty; H^2)$$

和

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{r \geq r_0} |v(t, r) - \phi(r)| = 0. \quad (2.18)$$

下面考虑初边值问题 (1.2) 唯一整体解 $v(t, r)$ 收敛到相应的稳态波 $\phi(r)$ 的关于时间变元的衰减率估计. 第一个结论是关于时间变元的代数衰减率估计.

定理 2.2 在定理 2.1 的假设之下, 对于任意 $\alpha > 0$, 如果再假设 $w_0 \in L^2_\alpha$, 那么可以得到对任意 $t \geq 0$, 成立

$$\sup_{r \geq r_0} |v(t, r) - \phi(r)| \leq C(\|w_0\|_{H^2} + |w_0|_\alpha)(1+t)^{-\frac{\alpha}{2}}, \quad (2.19)$$

其中 C 是某个与时间无关的正常数.

至于关于时间变元的指数衰减率估计, 有下面的定理.

定理 2.3 在定理 2.1 的假设之下, 若 β 和 γ 满足

$$0 < \beta \leq \min \left\{ \frac{2}{r_0}, \frac{8}{(8\|\chi\|_{L^\infty} + 1)r_0} \right\}, \quad 0 < \gamma \leq \frac{3\mu\beta}{8r_0\|\chi\|_{L^\infty}}, \quad (2.20)$$

如果再假设 $w_0 \in H^{2,\beta}_{\text{exp}}$, 那么存在与时间无关的正常数 $C > 0$ 使得对任意 $t \geq 0$ 成立

$$\sup_{r \geq r_0} |v(t, r) - \phi(r)| \leq C\|w_0\|^{2,\beta}_{\text{exp}} \exp(-\gamma t). \quad (2.21)$$

注 2.1 在上面的主要结论中, 我们要求初始扰动 $w_0(r)$ 的 H^2 模足够小, 如何在大初始扰动下得到相应的结果是我们目前正在考虑的一个有意义的问题. 对于在大初始扰动下带耗散项的双曲守恒律组稳态波的非线性稳定性的相关结果, 感兴趣的读者可以参见文献 [12–15] 及它们所引文献.

3 主要结论的证明

本节证明本文的主要结论. 为了使得表述更加清晰, 本节分为 3 个小节.

3.1 定理 2.1 的证明

为了证明定理 2.1, 对某个给定的正常数 $T > 0$ 和 $M > 0$, 定义如下的函数集合:

$$X_M(0, T) = \left\{ w(t, r) \in C([0, T]; H^2), w_r(t, r) \in L^2([0, T]; H^2), \sup_{t \in [0, T]} \|w(t)\|_{H^2} \leq M \right\},$$

我们将在上述集合中构造初边值问题 (2.6) 的解.

令

$$N(T) = \sup_{0 \leq t \leq T} \|w(t)\|_{H^2},$$

那么可以得到下面的局部存在性结论.

命题 3.1 (局部存在性) 在定理 2.1 的假设之下, 对任意正常数 M , 存在正常数 $T = T(M)$ 使得, 若 $\|w_0\|_{H^2} \leq M$, 那么初边值问题 (2.6) 有唯一解 $w(t, r) \in X_{2M}(0, T)$.

命题 3.1 可以利用标准的迭代法证明, 为了论文的简洁性, 略去其细节.

第 2 个结论是关于命题 3.1 中构造的局部解 $w(t, r)$ 的先验估计. 由此和命题 3.1, 定理 2.1 自然而然成立.

命题 3.2 (先验估计) 在定理 2.1 的假设之下, 若 $w(t, r) \in X_M(0, T)$ 是问题 (2.6) 定义在时间区间 $[0, T]$ 的解, 那么如果假设存在足够小的与 M 和 T 无关的正常数 $\epsilon_1 > 0$, 使得 $N(T) \leq \epsilon_1$, 则下述估计对任意 $t \in [0, T]$ 成立:

$$\|w(t)\|_{H^2}^2 + \int_0^t \left(\left\| \frac{w(\tau)}{r} \right\|^2 + \|w_r(\tau)\|_{H^2}^2 + w^2(\tau, r_0) \right) d\tau \leq C\|w_0\|_{H^2}^2, \quad t \in [0, T], \quad (3.1)$$

其中常数 C 与 M 和 T 无关.

注 3.1 实际上通过选择合适的权函数 $\tilde{\chi}(r)$, 可以得到更好的先验估计. 例如, 对任意 $\epsilon > 0$, 如果选择 (2.10) 中的 $f(r) = \frac{1}{2\epsilon}(r^{-2\epsilon} - r_0^{-2\epsilon}) - 1$, 那么就可以推出下述更好的先验估计:

$$\|w(t)\|_{H^2}^2 + \int_0^t \left(\left\| \frac{w(\tau)}{r^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \right\|^2 + \|w_r(\tau)\|_{H^2}^2 + w^2(\tau, r_0) \right) d\tau \leq C\|w_0\|_{H^2}^2, \quad t \in [0, T].$$

然而, ϵ 不能取 0, 这与文献 [3] 的先验估计不同.

命题 3.2 的证明 首先推导零阶能量估计. 为此, 注意到引理 2.2 表明范数 $\|\cdot\|_\chi$ 与 $\|\cdot\|$ 是等价的. 在 (2.6)₁ 两边乘以 χw , 可得

$$\left(\frac{1}{2} \chi w^2 \right)_t - \frac{\mu}{2} \left(\chi_{rr} + \frac{1}{\mu} (\psi \chi)_r \right) w^2 + \mu \chi w_r^2 + \mu \left(-\chi w w_r + \frac{1}{2} \left(\chi_r + \frac{\psi}{\mu} \chi \right) w^2 \right)_r = -\frac{1}{2} \chi w w_r^2.$$

引理 2.2 和上面的等式表明

$$\left(\frac{1}{2} \chi w^2 \right)_t + \frac{\mu}{2} \frac{w^2}{r^2} + \mu \chi w_r^2 - \mu \left(\chi w w_r + \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{2r} \right) w^2 \right)_r = -\frac{1}{2} \chi w w_r^2. \quad (3.2)$$

对上式关于 r 在 (r_0, ∞) 上积分, 并且注意到

$$-\frac{1}{2} \int_{r_0}^{\infty} \chi w w_r^2 dr \leq C \|w\|_{L^\infty} \|w_r\|^2 \leq CN(T) \|w_r\|^2,$$

可得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_\chi^2 + \frac{\mu}{2} \left\| \frac{w(t)}{r} \right\|^2 + \mu \|w_r(t)\|_\chi^2 + \frac{\mu}{2r_0} w^2(t, r_0) \leq CN(T) \|w_r\|^2.$$

再把上式对时间 t 在 $[0, T]$ 上积分, 注意到只要 $N(T)$ 足够小, 就可以得到下述的零阶能量估计:

$$\|w(t)\|^2 + \mu \int_0^t \left(\left\| \frac{w(\tau)}{r} \right\|^2 + \|w_r(\tau)\|^2 + \frac{1}{r_0} w^2(\tau, r_0) \right) d\tau \leq C \|w_0\|^2. \quad (3.3)$$

现在来处理一阶能量估计. 为此, 把 (2.6)₁ 对 r 微分一次, 再在两边乘以 w_r , 然后对 r 在区间 $[r_0, \infty)$ 上积分, 可得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_r(t)\|^2 + \mu \|w_{rr}(t)\|^2 \leq C \int_{r_0}^{\infty} (|\psi_r w_r^2| + |\psi w_r w_{rr}| + |w_r^2 w_{rr}|)(t, r) dr. \quad (3.4)$$

由引理 2.1 中稳态波 $\psi(r)$ 的性质可知, 上述不等式右边可以被估计为

$$\begin{aligned} & \int_{r_0}^{\infty} |\psi_r(r) w_r^2(t, r)| dt \leq C \|w_r(t)\|^2, \\ & \int_{r_0}^{\infty} |\psi(r) w_r(t, r) w_{rr}(t, r)| dr \leq C \|w_r(t)\|^2 + \frac{\mu}{4} \|w_{rr}(t)\|^2, \\ & \int_{r_0}^{\infty} |w_r^2(t, r) w_{rr}(t, r)| dr \leq \|w_r(t)\|_{L^\infty} \int_{r_0}^{\infty} |w_r(t, r) w_{rr}(t, r)| dr \\ & \leq CN(T) (\|w_r(t)\|^2 + \|w_{rr}(t)\|^2). \end{aligned}$$

把上述估计代入 (3.4) 并且选择 $N(T)$ 足够小, 就可以由零阶估计 (3.3) 推出

$$\|w_r(t)(t)\|^2 + \mu \int_0^t \|w_{rr}(\tau)\|^2 d\tau \leq C \|w_0\|_{H^1}^2. \quad (3.5)$$

最后, 考虑二阶能量估计. 为此, 对 (2.6)₁ 关于 r 微分两次得到

$$w_{rrt} - \mu w_{rrrr} = -w_{rr}^2 - w_r w_{rrr} - \psi_{rr} w_r - 2\psi_r w_{rr} - \psi w_{rrr}. \quad (3.6)$$

把 (3.6) 两边乘以 w_{rr} 并对所得到的结果关于 r 在区间 $[r_0, \infty)$ 上积分, 得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_{rr}(t)\|^2 + \mu \|w_{rrr}(t)\|^2 \\ & \leq -\mu w_{rr}(t, r_0) w_{rrr}(t, r_0) - \int_{r_0}^{\infty} (w_{rr}^3 + w_r w_{rr} w_{rrr} + \psi_{rr} w_r w_{rr} + 2\psi_r w_{rr}^2 + \psi w_{rr} w_{rrr})(t, r) dr. \end{aligned} \quad (3.7)$$

现在估计 (3.7) 右边的项. 对于第一项, 如果在 (3.6) 中取 $r = r_0$, 并结合事实 $w_r(t, r_0) = 0$ 和 $\psi(r_0) = V_-$, 可以得到

$$w_{rrr}(t, r_0) = \frac{V_-}{\mu} w_{rr}(t, r_0).$$

因此, 由上述等式和 Sobolev 不等式, (3.7) 右端的第一项可以按如下方式估计:

$$\begin{aligned} |w_{rr}(t, r_0) w_{rrr}(t, r_0)| & \leq C |w_{rr}(t, r_0)|^2 \\ & \leq C \|w_{rr}(t)\| \|w_{rrr}(t)\| \\ & \leq \frac{\mu}{4} \|w_{rrr}(t)\|^2 + C \|w_{rr}(t)\|^2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

对于 (3.7) 右端的第二项, 由 Sobolev 不等式和 $N(T)$ 的定义可得

$$\begin{aligned} - \int_{r_0}^{\infty} (w_{rr}^3 + w_r w_{rr} w_{rrr})(t, r) dr & = \int_{r_0}^{\infty} w_r(t, r) w_{rr}(t, r) w_{rrr}(t, r) dr \\ & \leq \|w_r(t)\|_{L^\infty} \int_{r_0}^{\infty} |w_{rr}(t, r) w_{rrr}(t, r)| dr \\ & \leq CN(T) (\|w_{rr}(t)\|^2 + \|w_{rrr}(t)\|^2), \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$- \int_{r_0}^{\infty} \psi_{rr}(r) w_r(t, r) w_{rr}(t, r) dr \leq C (\|w_r(t)\|^2 + \|w_{rr}(t)\|^2), \quad (3.10)$$

$$- 2 \int_{r_0}^{\infty} \psi_r(r) w_{rr}^2(t, r) dr \leq C \|w_{rr}(t)\|^2, \quad (3.11)$$

$$- \int_{r_0}^{\infty} \psi(r) w_{rr}(t, r) w_{rrr}(t, r) dr \leq \frac{\mu}{4} \|w_{rrr}(t)\|^2 + C \|w_{rr}(t)\|^2. \quad (3.12)$$

把估计式 (3.8)–(3.12) 代入 (3.7), 并把所得到的结果对 t 从 0 到 t 积分, 然后应用零阶能量估计 (3.3) 和一阶能量估计 (3.5) 可得

$$\|w_{rr}(t)\|^2 + \mu \int_0^t \|w_{rrr}(\tau)\|^2 d\tau \leq C \|w_0\|_{H^2}. \quad (3.13)$$

有了估计 (3.3)、(3.5) 和 (3.13) 之后, 先验估计 (3.1) 自然成立, 这就完成了命题 3.2 的证明. $\square$

在命题 3.1 和 3.2 的基础上, 定理 2.1 可以通过标准的连续性技巧来证明, 我们略去其细节.

3.2 定理 2.2 的证明

本小节证明定理 2.2. 为此, 主要目的是得到下述结论.

引理 3.1 在定理 2.2 的假设之下, 对任意 $0 \leq \beta \leq \alpha$ 和 $\gamma \geq 0$, 下式成立:

$$\begin{aligned} & (1+t)^\gamma |w(t)|_\beta^2 + \int_0^t \{ \beta(1+\tau)^\gamma |w(\tau)|_{\beta-1}^2 + (1+\tau)^\gamma |w_r(\tau)|_\beta^2 + (1+\tau)^\gamma w^2(\tau, r_0) \} d\tau \\ & \leq C \left\{ |w_0|_\beta^2 + \gamma \int_0^t (1+\tau)^{\gamma-1} |w(\tau)|_\beta^2 d\tau + \beta \int_0^t (1+\tau)^\gamma \|w_r(\tau)\|^2 d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

证明 在 (3.2) 两边乘以 $\langle r \rangle^\beta = (1+r^2)^{\beta/2}$, 再把结果对 r 在 $[r_0, \infty)$ 上积分, 可得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} \int_{r_0}^\infty \chi(r) \langle r \rangle^\beta w^2(t, r) dr \right)_t + \frac{\mu}{2r_0} \langle r_0 \rangle^\beta w^2(t, r_0) \\ & + \mu \int_{r_0}^\infty \{ A_\beta(r) \langle r \rangle^{\beta-1} w^2(t, r) + \chi(r) \langle r \rangle^\beta w_r^2(t, r) \} dr \\ & \leq C\beta \int_{r_0}^\infty \langle r \rangle^{\beta-1} |w(t, r) w_r(t, r)| dr, \end{aligned} \quad (3.15)$$

其中

$$A_\beta(r) = \frac{\langle r \rangle}{2r^2} + \beta \frac{r}{\langle r \rangle} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{2r} \right) \geq \frac{\beta}{2\langle r_0 \rangle}.$$

(3.15) 右边的部分可以被下式控制:

$$\begin{aligned} & C\beta \int_{r_0}^\infty \langle r \rangle^{\beta-1} |w(t, r) w_r(t, r)| dr \\ & \leq \frac{\mu\beta}{4\langle r_0 \rangle} \int_{r_0}^\infty \langle r \rangle^{\beta-1} w^2(t, r) dr + \beta C \left(\int_{r_0}^R + \int_R^\infty \right) \langle r \rangle^{\beta-1} w_r^2(t, r) dr \\ & \leq \frac{\mu\beta}{4\langle r_0 \rangle} \int_{r_0}^\infty \langle r \rangle^{\beta-1} w^2(t, r) dr + \beta C(R) \int_{r_0}^\infty w_r^2(t, r) dr + \frac{\beta C}{R} \int_{r_0}^\infty \langle r \rangle^\beta w_r^2(t, r) dr, \end{aligned} \quad (3.16)$$

其中 $C(R)$ 只与 R 有关.

通过在 (3.16) 中选择 R 足够大, 可由 (3.15)、(3.16) 和引理 2.2 得到

$$\left(\int_{r_0}^\infty \chi(r) \langle r \rangle^\beta w^2(t, r) dr \right)_t + \int_{r_0}^\infty (\langle r \rangle^{\beta-1} w^2(t, r) + \langle r \rangle^\beta w_r^2(t, r)) dr + w^2(t, r_0) \leq C\beta \|w_r(t)\|^2. \quad (3.17)$$

有了 (3.17) 之后, 将其两边乘以 $(1+t)^\gamma$, 再对 t 在 $[0, t]$ 上积分, 并运用引理 2.2 中权函数 $\chi(r)$ 的性质即可得到估计 (3.14). 这就完成了引理 3.1 的证明. $\square$

有了引理 3.1 之后, 利用文献 [10] 中的迭代方法, 可以得到如下的两个结论.

引理 3.2 对 $k = 0, 1, \dots, [\alpha]$, 有

$$\begin{aligned} & (1+t)^k |w(t)|_{\alpha-k}^2 + \int_0^t \{ (\alpha-k)(1+\tau)^k |w(\tau)|_{\alpha-k-1}^2 + (1+\tau)^k |w_r(\tau)|_{\alpha-k}^2 + (1+\tau)^k w^2(\tau, r_0) \} d\tau \\ & \leq C |w_0|_\alpha^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

引理 3.3 对任意 $\epsilon > 0$, 有

$$(1+t)^{\alpha+\epsilon} \|w(t)\|^2 + \int_0^t (1+\tau)^{\alpha+\epsilon} \{ \|w_r(\tau)\|^2 + w^2(\tau, r_0) \} d\tau \leq C(1+t)^\epsilon |w_0|_\alpha^2. \quad (3.19)$$

这两个结论对研究 $\|w(t)\|$ 关于时间变元的衰减率估计至关重要. 为了推出解 $w(t, r)$ 的高阶导的衰减估计, 有下面的引理.

引理 3.4 令 $l = 1, 2$, 那么对任意 $\epsilon > 0$ 和 $t \geq 0$, 有

$$(1+t)^{\alpha+\epsilon} \|\partial_r^l w(t)\|^2 + \int_0^t (1+\tau)^{\alpha+\epsilon} \|\partial_r^l w_r(\tau)\|^2 d\tau \leq C(1+t)^\epsilon (\|w_0\|_{H^2}^2 + |w_0|_\alpha^2). \quad (3.20)$$

有了上述估计之后, 现在来证明定理 2.2. 为此, 首先考虑 $\|w(t)\|$ 关于时间变元的衰减估计. 如果 α 是一个整数, 就可以在引理 3.2 中取 $k = \alpha$, 推得

$$(1+t)^\alpha \|w(t)\|^2 + \int_0^t (1+\tau)^\alpha \{\|w_r(\tau)\|^2 + w_0^2(\tau, r_0)\} d\tau \leq C|w_0|_\alpha^2, \quad (3.21)$$

这意味着

$$\|w(t)\| \leq C(1+t)^{-\frac{\alpha}{2}} |w_0|_\alpha, \quad (3.22)$$

然而如果 α 不是整数, 可以利用引理 3.3 来推出 (3.22).

对于相应的 $\|\partial_r^l w(t)\|$ ($l = 1, 2$) 关于时间变元的衰减估计, 由引理 3.4 可以推出

$$\|w(t)\|_{H^2} \leq C(1+t)^{-\frac{\alpha}{2}} (\|w_0\|_{H^2} + |w_0|_\alpha). \quad (3.23)$$

因此, Sobolev 不等式表明

$$\begin{aligned} \sup_{r \geq r_0} |v(t, r) - \phi(r)| &= \sup_{r \geq r_0} |w_r(t, r)| \\ &\leq C \|w_r(t)\|^{\frac{1}{2}} \|w_{rr}(t)\|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C (\|w_0\|_{H^2} + |w_0|_\alpha) (1+t)^{-\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

这就是 (2.19). 因此, 定理 2.2 证毕.

3.3 定理 2.3 的证明

为了证明定理 2.3, 首先给出下列引理.

引理 3.5 设 (2.20) 成立, 并记 $B_\beta(r) = \frac{1}{2r^2} + \beta(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{2r})$, 那么对任意 $r \geq r_0$, 成立

$$B_\beta(r) \geq \max \left\{ \frac{3\beta}{4r_0}, \beta^2 \chi(r) \right\}. \quad (3.25)$$

证明 由于

$$\frac{dB_\beta(r)}{dr} = \frac{\beta r - 2}{2r^3},$$

如果 $\beta \leq \frac{2}{r_0}$, 可以推出

$$\min_{r \geq r_0} B_\beta(r) = B_\beta\left(\frac{2}{\beta}\right),$$

因此对任意 $r \geq r_0$, 有

$$B_\beta(r) \geq B_\beta\left(\frac{2}{\beta}\right) = \frac{\beta(8 - \beta r_0)}{8r_0} \geq \frac{3\beta}{4r_0}. \quad (3.26)$$

另一方面, 若 $\beta \leq \frac{8}{(8\|\chi\|_{L^\infty}+1)r_0}$, 则可以推出

$$B_\beta(r) - \beta^2 \chi(r) \geq \frac{\beta^2}{r_0} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{(8\|\chi\|_{L^\infty}+1)r_0}{8} \right) \geq 0. \quad (3.27)$$

这就完成了引理 3.5 的证明. $\square$

对于 $w(t, r)$ 关于时间变元的指数衰减率估计, 有下面的引理.

引理 3.6 在定理 2.3 的假设之下, 对任意 $t \geq 0$, 成立

$$e^{\gamma t} |w(t)|_{\beta, \exp}^2 + \int_0^t e^{\gamma \tau} \{ \beta |w(\tau)|_{\beta, \exp}^2 + |w_r(\tau)|_{\beta, \exp}^2 + w^2(\tau, r_0) \} d\tau \leq C |w_0|_{\beta, \exp}^2. \quad (3.28)$$

证明 在 (3.2) 两边乘以 $e^{\beta r}$ 并把结果对 r 从 r_0 到 ∞ 积分可得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} \int_{r_0}^{\infty} e^{\beta r} \chi(r) w^2(t, r) dr \right)_t + \mu \int_{r_0}^{\infty} e^{\beta r} \{ B_\beta(r) w^2(t, r) + \chi(r) w_r^2(t, r) \} dr + \frac{\mu}{2r_0} e^{\beta r_0} w^2(t, r_0) \\ &= \underbrace{-\frac{1}{2} \int_{r_0}^{\infty} e^{\beta r} \chi(r) w(t, r) w_r^2(t, r) dr}_{I_1} - \underbrace{\mu \beta \int_{r_0}^{\infty} e^{\beta r} \chi(r) w(t, r) w_r(t, r) dr}_{I_2}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

现在估计 I_j ($j = 1, 2$). 首先, I_1 被下式控制:

$$|I_1| \leq C \|w(t)\|_{L^\infty} |w_r(t)|_{\beta, \exp}^2 \leq CN(T) |w_r(t)|_{\beta, \exp}^2,$$

对于 I_2 , 可以得到

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \frac{\mu}{2} \int_{r_0}^{\infty} e^{\beta r} \cdot 2 \cdot \beta \chi(r)^{\frac{1}{2}} |w(t, r)| \cdot \chi(r)^{\frac{1}{2}} |w_r(t, r)| dr \\ &\leq \frac{\mu}{2} \int_{r_0}^{\infty} e^{\beta r} \{ \beta^2 \chi(r) |w(t, r)|^2 + \chi(r) w_r^2(t, r) \} dr \\ &\leq \frac{\mu}{2} \int_{r_0}^{\infty} e^{\beta r} \{ B_\beta(r) w^2(t, r) + \chi(r) w_r^2(t, r) \} dr, \end{aligned}$$

这里应用了引理 3.5.

把上述估计代入 (3.29) 并且取 $N(T)$ 足够小使得 $N(T) \leq \frac{\mu}{4C}$, 可以推出

$$\left(\int_{r_0}^{\infty} e^{\beta r} \chi(r) w^2(t, r) dr \right)_t + \frac{3\beta\mu}{4r_0} |w|_{\beta, \exp}^2 + \frac{\mu}{2} \int_{r_0}^{\infty} e^{\beta r} \chi(r) w_r^2(t, r) dr + \frac{\mu e^{\beta r_0}}{r_0} w^2(t, r_0) \leq 0. \quad (3.30)$$

在 (3.30) 两边乘以 $e^{\gamma t}$ 并对所得到的结果关于 t 从 0 到 t 积分, 可得

$$\begin{aligned} & e^{\gamma t} \int_{r_0}^{\infty} e^{\beta r} \chi(r) w^2(t, r) dr \\ &+ \int_0^t e^{\gamma \tau} \left\{ \frac{3\beta\mu}{4r_0} |w(\tau)|_{\beta, \exp}^2 + \frac{\mu}{2} \int_{r_0}^{\infty} e^{\beta r} \chi(r) w_r^2(\tau, r) dr + \frac{\mu e^{\beta r_0}}{r_0} w^2(\tau, r_0) \right\} d\tau \\ &\leq C |w_0|_{\beta, \exp}^2 + \gamma \int_0^t e^{\gamma \tau} \int_{r_0}^{\infty} e^{\beta r} \chi(r) w^2(\tau, r) dr d\tau. \end{aligned} \quad (3.31)$$

由假设 (2.20), (3.31) 右面的最后一项可以被下式控制:

$$\gamma \int_0^t e^{\gamma \tau} \int_{r_0}^{\infty} e^{\beta r} \chi(r) w^2(\tau, r) dr d\tau \leq \gamma \|\chi\|_{L^\infty} \int_0^t e^{\gamma \tau} |w(\tau)|_{\beta, \exp}^2 d\tau$$

$$\leq \frac{3\beta\mu}{8r_0} \int_0^t e^{\gamma\tau} |w(\tau)|_{\beta, \exp}^2 d\tau. \quad (3.32)$$

把 (3.32) 代入 (3.31) 可以推出 (3.28), 这就完成了引理 3.6 的证明. $\square$

类似地, 对于 $\partial_r^l w(t, r)$ ($l = 1, 2$) 可以得到如下结果.

引理 3.7 在定理 2.3 的假设之下, 对任意 $t \geq 0$, 成立

$$e^{\gamma t} |w_r(t)|_{\beta, \exp}^2 + \int_0^t e^{\gamma\tau} |w_{rr}(\tau)|_{\beta, \exp}^2 d\tau \leq C \|w_0\|_{H_{\exp}^{1, \beta}}^2 \quad (3.33)$$

和

$$e^{\gamma t} |w_{rr}(t)|_{\beta, \exp}^2 + \int_0^t e^{\gamma\tau} |w_{rrr}(\tau)|_{\beta, \exp}^2 d\tau \leq C \|w_0\|_{H_{\exp}^{2, \beta}}^2. \quad (3.34)$$

有了引理 3.6 和 3.7 之后, 定理 2.3 的证明是显然的.

参考文献

- 1 Hashimoto I. Asymptotic behavior of radially symmetric solutions for the Burgers equation in several space dimensions. *Nonlinear Anal*, 2014, 100: 43–58
- 2 Hashimoto I. Behavior of solutions for radially symmetric solutions for Burgers equation with a boundary corresponding to the rarefaction wave. *Osaka J Math*, 2016, 53: 799–811
- 3 Hashimoto I, Matsumura A. Asymptotic behavior toward nonlinear waves for radially symmetric solutions of the multi-dimensional Burgers equation. *J Differential Equations*, 2019, 266: 2805–2829
- 4 Matsumura A. Inflow and outflow problems in the half space for a one-dimensional isentropic model system of compressible viscous gas. *Methods Appl Anal*, 2001, 8: 645–666
- 5 Nishihara K. Asymptotic behaviors of solutions to viscous conservation laws via L^2 -energy method. *Adv Math (China)*, 2001, 4: 293–321
- 6 Liu T P, Matsumura A, Nishihara K. Behaviors of solutions for the Burgers equation with boundary corresponding to rarefaction waves. *SIAM J Math Anal*, 1998, 29: 293–308
- 7 Liu T P, Nishihara K. Asymptotic behavior for scalar viscous conservation laws with boundary effect. *J Differential Equations*, 1997, 133: 296–320
- 8 Liu T P, Yu S H. Propagation of a stationary shock layer in the presence of a boundary. *Arch Ration Mech Anal*, 1997, 139: 57–82
- 9 Nishihara K. Boundary effect on a stationary viscous shock wave for scalar viscous conservation laws. *J Math Anal Appl*, 2001, 255: 535–550
- 10 Kawashima S, Matsumura A. Asymptotic stability of traveling wave solutions of systems for one-dimensional gas motion. *Comm Math Phys*, 1985, 101: 97–127
- 11 Yin H, Zhao H J. Nonlinear stability of boundary layer solutions for generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation in the half space. *Kinet Relat Models*, 2009, 2: 521–550
- 12 Fan L L, Liu H X, Wang T, et al. Inflow problem for the one-dimensional compressible Navier-Stokes equations under large initial perturbation. *J Differential Equations*, 2014, 257: 3521–3553
- 13 Fan L L, Liu H X, Zhao H J. One-dimensional damped wave equation with large initial perturbation. *Anal Appl (Singap)*, 2013, 11: 1350013
- 14 Fan L L, Liu H X, Zhao H J. Nonlinear stability of planar boundary layer solutions for damped wave equation. *J Hyperbolic Differ Equ*, 2011, 8: 545–590
- 15 Fan L L, Liu H X, Zhao H J, et al. Global stability of stationary waves for damped wave equations. *Kinet Relat Models*, 2013, 6: 729–760

Asymptotics of radially symmetric solutions for the exterior problem of multidimensional Burgers equation

Tong Yang, Huijiang Zhao & Qingsong Zhao

Abstract We are concerned with the large-time behavior of radially symmetric solutions to the exterior problem of multidimensional Burgers equation and focus on the nonlinear stability of its radially symmetric stationary waves under radially symmetric initial perturbation. For such a problem, a sufficient condition to guarantee the existence of such a stationary wave is obtained by Hashimoto and Matsumura in 2019, but since the stationary wave is no longer monotonic, its nonlinear stability is justified only for the case where an additional assumption is imposed. The main purpose of this paper is to verify the time asymptotically nonlinear stability of such a stationary wave under the condition imposed by Hashimoto and Matsumura to guarantee its existence. Moreover, we also derive the temporal convergence rates, both algebraically and exponentially, of solutions of the above exterior problem to the stationary wave. Our stability analysis is based on a space weighted energy method with a suitable chosen weight function, while for the temporal decay rates, in addition to such a space weighted energy method, we also use the space-time weighted energy method introduced by Kawashima and Matsumura in 1985.

Keywords multidimensional Burgers equation, exterior problem, radially symmetric stationary waves, nonlinear stability, space-time weighted energy method

MSC(2020) 35Q53, 35B40, 35K59

doi: 10.1360/SSM-2019-0204