



# 卧轮式分级机转子临界转速的计算

杨晓楠, 孙国刚, 孙占朋, 王青莲

(中国石油大学(北京) 过程装备实验室, 北京 102249)

**摘要:** 为避免卧轮式分级机在运转过程中产生共振, 以卧轮式分级机实验机和工业样机转子为研究对象, 采用传递矩阵法和基于 ANSYS Workbench 16.0 的有限元法对其临界转速进行计算, 将计算结果与试验测试结果进行比较。结果表明, 对于实验机, 传递矩阵法与试验测试结果偏差为 11.9%, 有限元法与试验测试结果偏差为 4.1%; 对于工业样机, 传递矩阵法与试验测试结果偏差为 10.5%, 有限元法与试验测试结果偏差为 3.5%, 说明有限元法计算结果准确性更高, 认为对于卧轮式分级机转子临界转速的计算, 更适合采用有限元法。

**关键词:** 卧轮式分级机; 临界转速; 传递矩阵法; 有限元法

中图分类号: TQ051.8 文献标志码: A

文章编号: 1008-5548(2016)05-0099-05

## Calculation of critical speed for horizontal wheel classifier rotor

YANG Xiaonan, SUN Guogang,  
SUN Zhanpeng, WANG Qinglian

(Laboratory of Process Equipment, China University of  
Petroleum-Beijing, Beijing 102249)

**Abstract:** To avoid the resonance of horizontal wheel classifier in the process of operation, transfer matrix method and finite element method based on ANSYS Workbench 16.0 were used to calculate the critical speed of horizontal wheel classifier rotor in experimental machine and industrial prototype. Comparing the calculation and test values, the results show that for the experimental machine, the deviation between transfer matrix calculation and test value is 11.6%, while the deviation between finite element calculation and test value is 4.1%, for the industrial prototype, the deviation between transfer matrix calculation and test value is 10.5%, while the deviation between finite element

calculation and test value is 3.5%. This comparison results suggest that the finite element method is more accurate, so the calculation of critical speed for horizontal wheel classifier rotor should be given priority to finite element method.

**Keywords:** horizontal wheel classifier; critical speed; transfer matrix method; finite element method

分级机作为一种高效的颗粒分选设备, 广泛应用于化工、建材、冶金、矿物加工、食品、医药等行业。卧轮式分级机是目前比较新型的动态分级机, 其核心部件为一个水平放置、两端轴承支撑的笼型转子, 转子在回转时产生离心力, 配合气流的向心曳力, 对粉料进行离散和分级, 从而达到颗粒分选的目的<sup>[1-4]</sup>。由于流体激振力作用、输入转速波动和质量偏心的影响, 因此分级机转子将产生 3 种形式的振动, 即轴向振动、扭转振动和横向振动, 其中横向振动破坏性极强且其固有频率较低, 当分级机转子自转角速度等于横向振动的固有频率时会引起系统的共振, 进而导致设备失稳, 严重时甚至会造成转子和轴承系统的损坏<sup>[5]</sup>。准确计算出分级机转子的临界转速, 主动地防止共振对设备造成的危害, 具有重要的理论意义和显著的工程实用价值。

许多学者在计算转子临界转速时常用的是能量法、瑞利-里兹法、邓克莱法, 但是这些方法都将模型中的支承假设为刚性, 只适用于求解低速、结构简单的转子的临界转速<sup>[6]</sup>。由于分级机转子结构较为复杂, 因此采用上述方法很难保证计算结果的准确性。目前对于复杂转子结构临界转速的计算, 通常采用传递矩阵法和有限元法<sup>[7-9]</sup>。

本文中采用传递矩阵法和基于 ANSYS Workbench 16.0 的有限元法分别对卧轮式分级机实验机和工业样机中转子的临界转速进行计算, 并将计算结果与试验测试值进行比较和分析, 为卧轮式分级机转子临界转速的计算提供方法依据。

## 1 卧轮式分级机转子几何模型

图 1 所示为卧轮式分级机及其转子的几何模型, 该转子由传动轴和分级轮组成, 材料为 45 号钢, 分级轮

收稿日期 2016-04-29, 修回日期 2016-09-18。

基金项目: 中国石油化工股份有限公司技术开发项目, 编号 ZX20140060。

第一作者简介: 杨晓楠(1991—), 男, 硕士研究生, 研究方向为颗粒分选与气固分离。E-mail: yangxn040104@163.com。

通信作者简介: 孙国刚(1961—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向为气固分离与烟气脱硫。E-mail: ggsunbj@163.com。

上有矩形直叶片，材料密度  $\rho=7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ，弹性模量  $E=2.09 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ，泊松比  $\mu=0.3$ 。实验机转子的部分关键尺寸为  $l_0=505 \text{ mm}$ ， $d_1=35 \text{ mm}$ ， $l_1=26 \text{ mm}$ ， $d_2=40 \text{ mm}$ ， $l_2=66 \text{ mm}$ ， $d_3=150 \text{ mm}$ ， $l_3=320 \text{ mm}$ ， $d_4=40 \text{ mm}$ ， $l_4=62 \text{ mm}$ ，

$d_5=35 \text{ mm}$ ， $l_5=31 \text{ mm}$ ，叶片数为 35；工业样机转子的部分关键尺寸为  $l_0=1520 \text{ mm}$ ， $d_1=85 \text{ mm}$ ， $l_1=46 \text{ mm}$ ， $d_2=90 \text{ mm}$ ， $l_2=440 \text{ mm}$ ， $d_3=700 \text{ mm}$ ， $l_3=1520 \text{ mm}$ ， $d_4=90 \text{ mm}$ ， $l_4=432 \text{ mm}$ ， $d_5=85 \text{ mm}$ ， $l_5=72 \text{ mm}$ ，叶片数为 130。

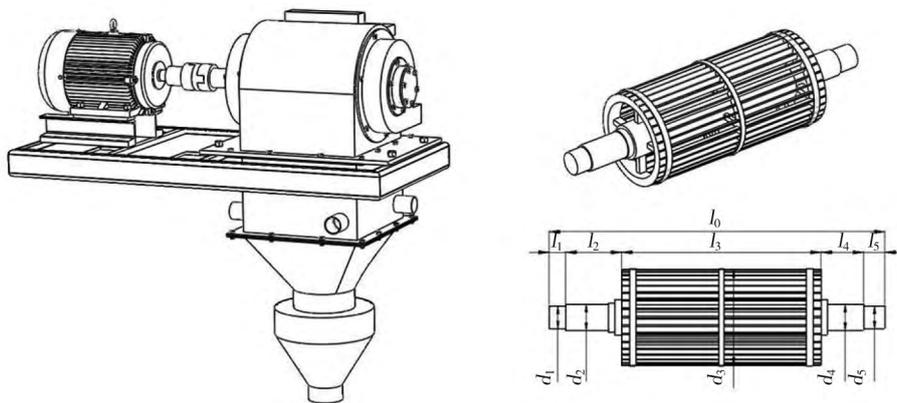


图 1 卧轮式分级机及其转子几何结构

Fig.1 Horizontal wheel classifier and its rotor geometry

## 2 临界转速计算方法

### 2.1 传递矩阵法

#### 2.1.1 基本原理

传递矩阵法是把系统分为圆盘、轴段和支承等若干个典型的单元或部件，用力学方法建立这些部件两端截面状态向量间的传递关系，再利用连续条件就可求得转子在任一截面的状态向量与起

始截面的状态向量间的关系，通过对能满足边界条件的涡动频率的搜索，就可得出转子的各阶临界转速<sup>[10-12]</sup>。

转子系统任一截面的状态向量  $Z$  均可由 4 个参数表达，即挠度  $Y$ 、转角  $\theta$ 、弯矩  $M$ 、剪力  $Q$ ，记作  $Z=[Y \ \theta \ M \ Q]^T$  相邻两截面状态向量的传递关系为

$$[Z]_{i+1}=[T]_i[Z]_i, \quad (1)$$

式中  $[T]_i$  为两截面间的传递矩阵，其一般表达式：

$$[T]_i = \begin{bmatrix} 1 + \frac{l^3}{6EI}(1-\nu)(m\omega^2 - k) & 1 + \frac{l^2}{2EI}(I_p - I_d)\omega^2 & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{6EI}(1-\nu) \\ \frac{l^2}{2EI}(m\omega^2 - k) & 1 + \frac{l}{EI}(I_p - I_d)\omega^2 & \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} \\ l(m\omega^2 - k) & (I_p - I_d)\omega^2 & 1 & l \\ (m\omega^2 - k) & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中  $l$  为单元轴段长度， $m$  为转子单元的质量， $E$  为材料弹性模量， $I$  为轴段的截面矩， $k$  为支承刚度， $I_p$  为转子直径转动惯量， $I_p = mR^2/2$ ， $I_d$  为转子极转动惯量， $I_d = 0.5I_p$ ， $\nu$  为考虑剪切影响的系数， $\nu = 6EI/(k_1GA^2)$ ，其中  $G$  为材料剪切弹性模量， $A$  为横截面积， $k_1$  为截面形状系数，对空心圆截面时取  $2/3$ ，实心圆截面时取  $0.886$ 。

整个系统的传递矩阵为：

$$[Z]_{N+1}=[T]_N[T]_{N-1} \cdots [T]_2[T]_1[Z]_1$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{bmatrix}_N \begin{bmatrix} Y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_1 \quad (3)$$

以  $M_1=Q_1=0$ ， $M_{N+1}=Q_{N+1}=0$  为边界条件，得到满足此边界条件的频率方程为

$$f(\omega) = \begin{vmatrix} \alpha_{31} & \alpha_{32} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

所有满足式(4)的根均为所求的临界转速，可以利用 Matlab 编程迭代计算，对  $\omega$  先赋予初值，并增加一定的步长进行试算，最终求出所有满足的值，再利用公式  $n=60\omega/2\pi$ ，即可求得此转子的各阶临界转速。

#### 2.1.2 转子简化模型

转子的简化模型如图 2 所示。

根据传递矩阵法的运算思想，需将连续的转子系统进行离散化，构成盘轴集总质量系统。由于分级机

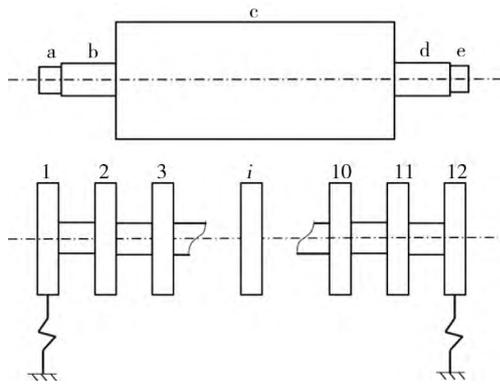


图 2 转子简化模型

Fig. 2 Simplified model of rotor

转子是对称的,因此首先将模型分成 a、b、c、d、e 5 个部分,每部分又划分成若干个单元,共划分为 12 个单元,划分后形成的各盘轴单元的相关数据如表 1 所示。将转子两侧轴承支承简化为弹性支承,对于实验机,支承刚度系数为  $2.7 \times 10^6$  N/m,对于工业样机,支承刚度系数为  $5.6 \times 10^7$  N/m。为简化运算过程,不考虑陀螺效应和剪切变形对临界转速的影响。在 Matlab 中编制传递矩阵法的程序,对结果进行求解和分析。

根据上述相关参数,利用传递矩阵法求得实验机转子前三阶临界转速为 2 410、3 849、6 450 r/min,工业样机转子前三阶临界转速为 1 150、2 827、4 846 r/min。

表 1 转子各盘轴单元相关数据

Tab. 1 Relevant data of each unit of rotor

编号	盘轴单元抗弯刚度 EI		盘轴单元长度/mm		盘轴单元质量/kg		盘轴单元数
	实验机	工业样机	实验机	工业样机	实验机	工业样机	
a	$1.55 \times 10^4$	$5.37 \times 10^5$	26	46	0.25	2.3	1
b	$2.64 \times 10^4$	$6.75 \times 10^5$	33	220	0.38	11.2	2
c	$5.21 \times 10^6$	$2.47 \times 10^9$	53	253	1.44	104	6
d	$2.64 \times 10^4$	$6.75 \times 10^5$	31	216	0.34	10.8	2
e	$1.55 \times 10^4$	$5.37 \times 10^5$	31	72	0.31	3.6	1

## 2.2 有限元法

### 2.2.1 基本原理

有限元法的数学思想是将复杂连续的求解区域离散为有限个、按一定方式相互联结在一起的单元组合体,使得单元节点上未知变量转化为新的目标变量,从而使一个连续的无限自由度问题变成离散有限自由度问题。求出单元结点上的未知变量,就可通过插值函数确定单元内场函数的近似值,进而得到求解区域的近似解<sup>[13]</sup>。

对于转子系统,其运动方程为

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = 0, \quad (5)$$

式中  $[M]$  为质量矩阵  $[C]$  为阻尼矩阵  $[K]$  为刚度矩阵;  $\{x\}$  为位移矢量;  $\{\dot{x}\}$  为速度矢量;  $\{\ddot{x}\}$  为加速度矢量。

建立转子系统的运动方程后,通过对方程进行特征值与特征向量的求解,便可求得自转角速度为  $\omega$  的涡动频率及模态振型。

### 2.2.2 有限元分析过程

本文中采用 ANSYS Workbench 16.0 对分级机转子系统进行模态分析,整个计算流程如下:1)建模。由于分级机转子模型相对复杂,因此首先在专业建模软

件 Solidworks 中建立模型,然后将模型导入到 ANSYS Workbench 16.0 中,为提高对模型的分析效率,将轴与分级轮之间的键、槽按实体处理,忽略一些局部特征。2)定义材料参数。包括弹性模量、材料密度、泊松比等,具体参数值前文已经给出。3)模态分析设置。在 ANSYS Workbench 16.0 中通过简单地设置就可将陀螺转矩及阻尼等因素的影响考虑在内,具体方法为:在“模态分析细节”设置面板中,将“Damped”设置为“yes”,在“Rotordynamics Controls”选项中分别激活“Coriolis Effect”和“Campbell Diagram”,并设置模态提取阶数为 8。4)设置边界条件及约束。创建两端的轴承连接,如图 3 所示,两端各生成一个等效轴承,将轴承的旋转平面设为“X-Y Plane”,在“轴承细节”界面对轴承刚度系数和阻尼系数进行设置,设置轴的两端面为无摩擦支承,即对轴两端面施加法向约束。5)划分网格。在“网格划分细节”面板中设置“Relevance Center”为“Medium”,然后选择“Generate Mesh”生成网格,网格划分结果为:节点数 128 542,网格数 69 488。6)定义转速。为了绘制 Campbell 图,需要计算转子在不同转速下的各阶固有频率。在“转速细节”设置面

· 流 态 化 ·

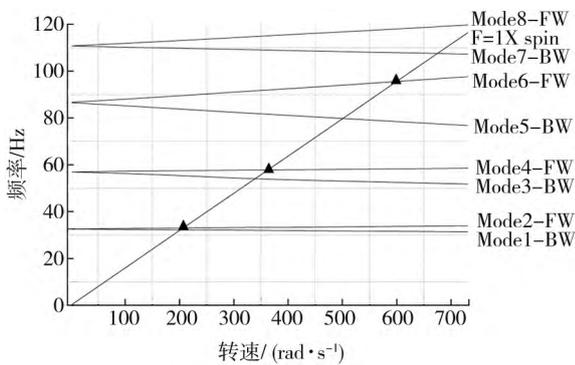


图 3 转子有限元模型

Fig. 3 Finite element model of rotor

板,设置转速的定义方式为“Components”,分别设置转子绕 Z 轴的转速为 0、100、200、300、400、500、600、700,单位为 rad/s。

运用有限元法计算转子临界转速时,会出现正进动和反进动。在陀螺效应的作用下,正进动时,陀螺力矩相当于恢复力矩,轴的刚性增大,从而使转子临界转速增大;反进动时,陀螺力矩相当于弯曲力矩,轴的刚性减小,从而使转子临界转速减小。通常情况下只对正进动时的临界转速进行分析<sup>[14-15]</sup>。在后处理中,将不同自转角速度下的同阶固有频率用曲线连接起来,绘成  $\Omega-\omega$  曲线,即 Campbell 曲线。图 4 所示即为实验机转子的 Campbell 图,根据临界转速定义,当  $\Omega=\omega$  时,即等速线与坎贝尔曲线相交处的  $\Omega$  即为共振时各阶临界转速对应的固有频率。由图可知,实验机转子前三阶固有频率为 212、357、601 rad/s,对应临界转速分别为 2 065、3 412、5 734 r/min。类似地,求得工业样机转子前三阶临界转速为 1 078、2 258、4 458 r/min。



FW—正进动;BW—反进动;F=1X spin—等速线。

图 4 实验机转子 Campbell 图

Fig. 4 Campbell diagram of experimental rotor

### 3 试验测试及结果对比

#### 3.1 测试方法

本试验中采用非接触式电涡流位移传感器来

测量分级机的振动,具有可靠性好、测量范围宽、灵敏度高优点。测试过程中,在转子轴承附近安装 2 个传感器探头(探头相隔 90°放置),对转子施加不同的转速,转速较小时分级机的运转是平稳的;当转速增大到某一数值时,会引发分级机转子的剧烈振动,此时由振动产生的位移最大,转速继续增大,振动会逐渐减弱并恢复到平稳状态。将测得的位移信号输送到 USB7600 数据采集卡,USB7600 数据采集卡通过 USB 接口与计算机相连,在计算机上通过程序界面实时监测和保存采集到的数据。

将传感器所采集的数据进行分析,取每个转速下所有数值的均方根值作为该转速下的位移,绘制成图 5 所示的分级机壳体水平方向的位移-转速曲线,可以看出,对于实验机,当转子转速为 2 153 r/min 时,分级机壳体沿水平方向的位移达到最大,振动最为剧烈,因此判断该转速为转子系统的一阶临界转速。采用类似地方法,测得工业样机一阶临界转速为 1 041 r/min。

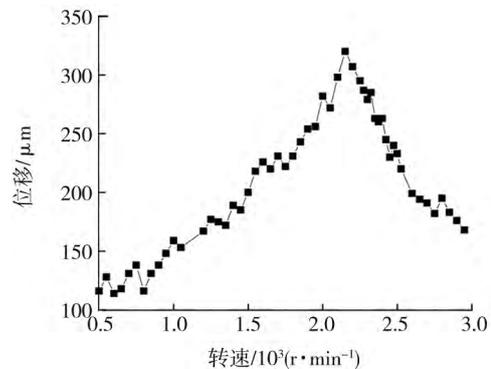


图 5 实验机水平方向的位移-转速曲线

Fig. 5 Displacement-rotational speed diagram of horizontal direction of experimental machine

#### 3.2 结果对比与分析

将传递矩阵法和有限元法所得计算结果与试验测试结果进行对比,结果如表 2 所示。在此只对一阶临界转速进行比较,对于实验机,传递矩阵法与试验测试结果偏差为 11.9%,有限元法与试验测试结果偏差为 4.1%;对于工业样机,传递矩阵法与试验测试结果偏差为 10.5%,有限元法与试验测试结果偏差为 3.5%。由此可知,应用有限元法计算的结果与实测值更加接近,这说明有限元法比传递矩阵法的准确性更高。

### 4 结论

通过采用传递矩阵法和有限元法对卧轮式分级

表 2 不同计算结果对比  
Tab. 2 Comparison of different calculation results

方法	r · min <sup>-1</sup>					
	一阶临界转速		二阶临界转速		三阶临界转速	
	实验机	工业样机	实验机	工业样机	实验机	工业样机
传递矩阵法	2 410	1 150	3 849	2 827	6 450	4 846
有限元法	2 065	1 078	3 412	2 258	5 734	4 458
试验测试	2 153	1 041	—	—	—	—

机转子临界转速进行计算，并与试验测试值进行对比。

1)传递矩阵法计算值与实测值偏差较大,对于实验机和工业样机,误差均超过 10%,这是因为传递矩阵法在计算中对模型进行了许多简化,如将笼形转子当作圆盘来考虑,以及对模型单元的划分不够细化等,导致计算结果不够准确。

2)有限元法计算结果准确性更高,对于实验机和工业样机,误差均在 5%以下,原因是有限元法计算模型与转子实际模型完全一致,未进行任何简化,同时考虑了轴承的约束、陀螺力矩及阻尼等因素的影响,与转子实际状况最为接近,对于临界转速的求解更加准确可靠。对于卧轮式分级机转子临界转速的计算,应优先考虑采用有限元法。

参考文献(References) :

[1] 孙占朋,孙国刚,许杰. 挡板对卧轮式气流选粉机性能的影响[J]. 中国粉体技术, 2016, 22(1):6-10.  
 [2] 蒋士忠,葛晓陵,王晓燕. 卧式涡轮分级研究[J]. 中国矿业, 1999 (1):66-69.  
 [3] 盖国胜,马正先,胡小芳. 超细粉碎与分级设备进展 [J]. 金属矿山, 2000(5):30-35, 41.  
 [4] 鲁林平,叶京生,李占勇,等. 超细粉体分级技术研究进展[J]. 化工装备技术, 2005(3):19-26.  
 [5] 李洪,李洪双,雷维智. 立式转子与卧式转子选粉机概论 [J]. 水泥,

2015(12):31-36.  
 [6] 王斌. 基于离心泵内流场模拟的转子临界转速分析与计算[D]. 兰州: 兰州理工大学, 2010.  
 [7] HSIEH S C, CHEN J H, LEE A C. A modified transfer matrix method for the coupling lateral and torsional vibrations of symmetric rotor-bearing systems [J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 289(1/2):294-333.  
 [8] 黄文俊,朱晓农,于洋,等. 离心风机转子临界转速计算方法的对比分析[J]. 流体机械, 2014(10):37-40.  
 [9] FRISWELL M I, GARVEY S D, PENNY J E T, et al. Computing critical speeds for rotating machines with speed dependent bearing properties [J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 213 (1): 139-158.  
 [10] 李超,刘延峰,艾丽昆. 基于混合模型的转子临界转速计算 [J]. 振动与冲击, 2010, 29(11):245-248.  
 [11] 钟一镔,何衍宗,王正,等. 转子动力学 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1987:143-174.  
 [12] TAIPING H. The transfer matrix impedance coupling method for the eigensolutions of multi-spool rotor systems[J]. Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, 1988, 110 (4): 468-472.  
 [13] 马云通. 600MW 超临界机组汽动锅炉给水泵水动力及临界转速的分析与计算[D].兰州: 兰州理工大学, 2012.  
 [14] 安晓卫,王学永. 涡轮增压器转子系统的临界转速研究[J]. 机械设计, 2015(2):75-78.  
 [15] 张雷,王凡,王毅. 螺旋输送机临界转速的数值分析与研究 [J]. 煤矿机械, 2014(12):125-12.