

均值电压表定度系数的波形误差估计

杨 义 群

(浙江农业大学, 杭州)

摘 要

本文利用凸集理论、泛函极值及其对偶性理论等工具, 解决了无线电计量中一类误差的准确估计问题. 本文的方法有着一定的普遍意义. 特别是当不能用显式给出极值元时, 我们利用函数重排等工具, 给出了一种求解方法.

一、问题的提出

在电工或无线电计量工作中, 常要测量周期讯号波的均值与有效值. 当周期讯号波在时刻 t 的瞬时值为 $f(t)$ 时, 其均值与有效值分别为:

$$\|f\| = \|f\|_1 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| dt \quad (1.1)$$

及

$$\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt}, \quad (1.2)$$

其中 T 为信号波 $f(t)$ 的周期. 特别地, 对于正弦波 $A \sin(\omega t + \varphi)$ 来说, 其均值与有效值分别为:

$$\|A \sin(\omega t + \varphi)\| = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} |A \sin(\omega t + \varphi)| dt = \frac{2}{\pi} A$$

与

$$\|A \sin(\omega t + \varphi)\|_2 = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} [A \sin(\omega t + \varphi)]^2 dt} = \frac{\sqrt{2}}{2} A.$$

可见, 当 $f(t)$ 为正弦波时, 有

$$\|f\|_2 / \|f\| = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi \approx 1.1107. \quad (1.3)$$

因此, 当测得一个正弦波的均值为 a 时, 其有效值就为 $\sqrt{2} \pi a / 4$. 例如, 通常的万用电表测得的是均值, 但是表上的读数却是有效值, 它就是按照此原理[也即 (1.3) 式]来定度的.

但是, 绝对纯的正弦波在实际上是没有的. 通常遇到的正弦波总是带有一些失真的正弦波. 所以, 对均值电压表用 (1.3) 式给出的系数进行定度时, 将产生误差. 失真越大, 误差就可

能越大. 已有不少国内外文献^[1-4]讨论过有关的问题. 关于上述误差的定量分析, 还没有见到准确的估计. 本文将给出不同波形失真时上述误差的准确估计.

若一个周期为 T 的周期信号波 $f(t)$ 可展开为 Fourier 级数

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \quad (A_1 \neq 0),$$

其中 $\omega = 2\pi/T$, 那末它相应于正弦波的失真度定义为:

$$K(f) = \sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} A_n^2 / |A_1|},$$

该失真度容易在失真度仪上比较精确地测得^[5-10].

在本文中, 将给出如下的准确估计:

假如已知 $K(f) \leq \sigma$, 其中 $\sigma \geq 0$, 那末有

$$m_\sigma \leq \|f\|_2 / \|f\| \leq M_\sigma, \quad (1.4)$$

其中

$$m_\sigma = \max \{1, \pi \sqrt{1 + \sigma^2} / (2\sqrt{2} + \sigma\sqrt{\pi^2 - 8})\} \quad (1.5)$$

及

$$M_\sigma = \sqrt{\frac{1 + \sigma^2}{2} \frac{b - \sin b}{2 \sin \frac{b}{2} - b \cos \frac{b}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{2b + b \cos b - 3 \sin b}}{2 \sin \frac{b}{2} - b \cos \frac{b}{2}}} \quad (1.6)$$

都是最佳的估计, 这里 b 是下述方程中的唯一解

$$\sigma^2 = \pi(2b + b \cos b - 3 \sin b)(b - \sin b)^{-2} - 1 \quad (0 < b \leq \pi). \quad (1.7)$$

也即我们有

$$\min\{\|f\|_2 / \|f\| : K(f) \leq \sigma\} = m_\sigma \quad (\sigma \geq 0) \quad (1.8)$$

及

$$\max\{\|f\|_2 / \|f\| : K(f) \leq \sigma\} = M_\sigma \quad (\sigma \geq 0). \quad (1.9)$$

下面我们证明上述结果. 关于这些结果的具体应用, 可参见文献 [11] 与 [12].

二、辅助命题

为简单计, 本文中的函数都是周期为 T 的实值周期函数, 且在 $[0, T]$ 上 L^2 可积. 对于任意函数 φ 与 ψ , 记

$$\|\varphi\| = \frac{1}{T} \int_0^T |\varphi(t)| dt, \quad \langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t) \psi(t) dt,$$

$$\|\varphi\|_2 = \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle} \text{ 及 } \|\varphi\|_\infty = \text{vrai sup } |\varphi(t)|.$$

又对于任意函数 f 及 $\sigma \geq 0$, 记

$$S(f, \sigma) = \{g : \langle f, g \rangle = 0, \|g\|_2 \leq \sigma \|f\|_2\} \quad (2.1)$$

及

$$I(f, \sigma) = \inf\{\|f - g\| : g \in S(f, \sigma)\}. \quad (2.2)$$

引理 1. 对于任意函数 $f \in L^2(0, T)$ 及 $\sigma \geq 0$, 存在 $g_{f, \sigma} \in S(f, \sigma)$ 达到 (2.2) 式中的下确

界.

证. $S(f, \sigma)$ 是自反的 Banach 空间 L^2 中的有界闭凸集, 又 $\|f - g\|$ 作为 g 的泛函是连续的凸泛函, 所以 (参见文献 [13], 194 页, 定理 2) 泛函 $\|f - g\|$ 在 $S(f, \sigma)$ 上达到最小值. 引理 1 证毕.

引理 2. 若 f 是奇(或偶)函数, 则存在奇(或偶)函数 $g_{f,\sigma} \in S(f, \sigma)$ 达到 (2.2) 式中的下确界.

证. 当 f 为奇函数时, 可令

$$g_{f,\sigma}^*(t) = \frac{1}{2} [g_{f,\sigma}(t) - g_{f,\sigma}(-t)],$$

其中 $g_{f,\sigma} \in S(f, \sigma)$ 是引理 1 中给出的. 这时由于

$$\langle f, g_{f,\sigma}^* \rangle = \frac{1}{2} \langle f, g_{f,\sigma} \rangle - \frac{1}{2} \langle f(t), g_{f,\sigma}(-t) \rangle = 0,$$

$$\|g_{f,\sigma}^*\|_2 \leq \frac{1}{2} \|g_{f,\sigma}\|_2 + \frac{1}{2} \|g_{f,\sigma}(-t)\|_2 = \|g_{f,\sigma}\|_2 \leq \sigma \|f\|_2$$

及

$$\begin{aligned} I(f, \sigma) &\leq \|f - g_{f,\sigma}^*\| \leq \frac{1}{2} \|f - g_{f,\sigma}\| + \frac{1}{2} \|f(t) + g_{f,\sigma}(-t)\| \\ &= \|f - g_{f,\sigma}\| = I(f, \sigma), \end{aligned}$$

所以奇函数 $g_{f,\sigma}^* \in S(f, \sigma)$ 也达到 (2.2) 式中的下确界. 当 f 为偶函数时的证明是类似的. 引理 2 证毕.

引理 3. 若 $\|f\| > 0$, 则 $I(f, \sigma) > 0, \forall \sigma \geq 0$.

证. 由引理 1, 存在 $g_{f,\sigma} \in S(f, \sigma)$ 达到 (2.2) 式中的下确界. 若 $I(f, \sigma) = 0$, 则 $\|f - g_{f,\sigma}\| = 0$, 也即 $f = g_{f,\sigma}$, 于是有 $\langle f, g_{f,\sigma} \rangle = \|f\|^2 \geq \|f\|^2 > 0$. 这与 $g_{f,\sigma} \in S(f, \sigma)$ 矛盾. 引理 3 证毕.

引理 4. 对于 $f \in L^2(0, T)$ 及 $\sigma \geq 0$, 有

$$I(f, \sigma) = \max\{P(f, h, \sigma) : h \in B_i\} \quad (i = 1, 2),$$

其中记

$$P(f, h, \sigma) = \langle f, h \rangle - \sigma H(f, h)$$

及

$$H(f, h) = \sqrt{\|f\|_2^2 \|h\|_2^2 - \langle f, h \rangle^2},$$

而 B_1 与 B_2 分别为 $L^\infty(0, T)$ 中的单位球面与单位球, 也即

$$B_1 = \{h \in L^\infty(0, T) : \|h\|_\infty = 1\} \text{ 及 } B_2 = \{h \in L^\infty(0, T) : \|h\|_\infty \leq 1\}.$$

证. $\sigma\|f\| = 0$ 时引理 4 显然. 以下设 $\sigma\|f\| > 0$. 由引理 3, 文献 [14] 的定理 1 以及 Riesz 表现定理, 我们有

$$I(f, \sigma) = \max_{h \in B_i} [\langle f, h \rangle - \sup_{g \in S(f, \sigma)} \langle g, h \rangle] \quad (i = 1, 2). \quad (2.3)$$

余下的只要证明

$$\sup\{\langle g, h \rangle : g \in S(f, \sigma)\} = \sigma H(f, h). \quad (2.4)$$

因为自反空间 $L^2(0, T)$ 中的有界闭凸集 $S(f, \sigma)$ 是弱紧的 (例如见文献 [15], 20 页), 所以对于任意 $h \in B_1$ 存在 $g_1 \in S(f, \sigma)$ 达到 (2.4) 式中的上确界, 也即有

$$\langle g_1, h \rangle = \sup\{\langle g, h \rangle : g \in S(f, \sigma)\}$$

$$= \sup\{\langle g, h \rangle : \langle f, g \rangle = 0, \langle g, g \rangle \leq \sigma^2 \|f\|_2^2\}. \quad (2.5)$$

由于 $\langle g, h \rangle$, $\langle f, g \rangle$ 与 $\langle g, g \rangle$ 都是 g 的可微泛函, 所以上式是一个光滑的条件极值问题. 由 Lagrange 乘子原理(参见文献 [16], § 1.1, 定理4), 存在不全为零的实数 λ_0, λ_1 与 λ_2 满足¹⁾

$$\left[-\lambda_0 \frac{d}{dg} \langle g, h \rangle + \lambda_1 \frac{d}{dg} \langle f, g \rangle + \frac{\lambda_2}{2} \frac{d}{dg} \langle g, g \rangle \right]_{g=g_1} = 0, \quad (2.6)$$

$$\lambda_2 [\langle g_1, g_1 \rangle - \sigma^2 \|f\|_2^2] = 0, \quad (2.7)$$

$$\langle f, g_1 \rangle = 0, \quad (2.8)$$

$$\lambda_0 \geq 0 \text{ 及 } \lambda_2 \geq 0. \quad (2.9)$$

(2.6) 式就是

$$-\lambda_0 h + \lambda_1 f + \lambda_2 g_1 = 0. \quad (2.10)$$

当 f 与 h 线性相关时, (2.4) 式两端显然都是零. 以下设 f 与 h 线性无关. 这时由 (2.9) 及 (2.10) 式可知, $\lambda_2 > 0$, 再由 (2.7) 式, 可得

$$\langle g_1, g_1 \rangle = \sigma^2 \|f\|_2^2. \quad (2.11)$$

于是 $g_1 \neq 0$. 若 $\lambda_0 = 0$, 则由 (2.10) 式得 $\lambda_1 \neq 0$ 及 $g_1 = -\lambda_1 f / \lambda_2$. 以此代入 (2.8) 式, 得 $\langle f, f \rangle = 0$, 这与 $\|f\| > 0$ 矛盾, 所以由 (2.9) 式得 $\lambda_0 > 0$. 可以取定 $\lambda_0 = 1$. 于是 (2.10) 式可写成

$$g_1 = (h - \lambda_1 f) / \lambda_2. \quad (2.12)$$

将上式代入 (2.8) 式, 可得

$$\lambda_1 = \langle f, h \rangle / \|f\|_2^2. \quad (2.13)$$

再将上两式代入 (2.11) 式, 可得

$$\|h\|_2^2 - \langle f, h \rangle^2 / \|f\|_2^2 = \sigma^2 \lambda_1^2 \|f\|_2^2.$$

因为 $\lambda_2 > 0$, 所以有

$$1/\lambda_2 = \sigma \|f\|_2^2 / H(f, h). \quad (2.14)$$

将 (2.13) 与 (2.14) 式代入 (2.12) 式, 得

$$g_1 = \sigma (\|f\|_2^2 h - \langle f, h \rangle f) / H(f, h). \quad (2.15)$$

最后将上式代入 (2.5) 式, 可得

$$\begin{aligned} \sup\{\langle g, h \rangle : g \in S(f, \sigma)\} &= \langle g_1, h \rangle \\ &= \sigma (\|f\|_2 \|h\|_2^2 - \langle f, h \rangle^2) / H(f, h) = \sigma H(f, h). \end{aligned}$$

此即 (2.4) 式. 引理 4 证毕.

引理 5. 若 $\sigma \|f\| = 0$ 或存在正测度集 $E \subset [0, T]$ 有

$$|f(t)| = \begin{cases} \text{正常数}, & \forall t \in E, \\ 0, & \forall t \in [0, T] \setminus E, \end{cases} \quad (2.16)$$

则 $I(f, \sigma) = \|f\|$.

证. 当 $\sigma \|f\| = 0$ 时引理 5 显然. 当存在正测度集 $E \subset [0, T]$ 有着 (2.16) 式时, 可取 $h_0(t) = \operatorname{sgn} f(t)$, 显然这时有 $h_0 \in B_1$, 并且因为 h_0 与 f 线性相关, 所以有 $H(f, h_0) = 0$, 从而由引理 4 得 $\|f\| \geq I(f, \sigma) = \max\{P(f, h, \sigma) : h \in B_1\} \geq P(f, h_0, \sigma) = \|f\|$. 引理 5 证毕.

1) (2.5) 式可写成 $-\inf\{-\langle g, h \rangle : \langle f, g \rangle = 0, \langle g, g \rangle - \sigma^2 \|f\|_2^2 \leq 0\}$.

引理 4 说明, 存在着 $h_{f,\sigma} \in B_1$ 满足

$$P(f, h_{f,\sigma}, \sigma) = I(f, \sigma). \quad (2.17)$$

以下, 我们给出这个 $h_{f,\sigma}$ 的特征.

引理 6. 当 $\sigma \|f\| > 0$ 时, 在 B_1 中满足 (2.17) 式的 $h_{f,\sigma}$, 可表示成

$$h_{f,\sigma}(t) = \min\{1, a_{f,\sigma}|f(t)|\} \operatorname{sgn} f(t), \quad (2.18)$$

其中

$$a_{f,\sigma} = [H(f, h_{f,\sigma})/\sigma + \langle f, h_{f,\sigma} \rangle] / \|f\|_2^2, \quad (2.19)$$

且

$$a_{f,\sigma} \geq 1/\|f\|_\infty. \quad (2.20)$$

证. 当 f 与 $h_{f,\sigma}$ 线性相关时, $H(f, h_{f,\sigma}) = 0$, 且因为 $h_{f,\sigma} \in B_1$, 所以这时有 $\|f\|_\infty < \infty$, $h_{f,\sigma} = f/\|f\|_\infty$, $\langle f, h_{f,\sigma} \rangle = \|f\|_2^2/\|f\|_\infty$ 以及 (2.19) 式变成 $a_{f,\sigma} = 1/\|f\|_\infty$. 于是 (2.18) 与 (2.20) 式成立. 以下设 f 与 $h_{f,\sigma}$ 线性无关. 记 $E_n = \{x \in R: |h_{f,\sigma}(x)| < 1 - \frac{1}{n}\}$ ($n = 3, 4, \dots$). 任取满足 $h_n(x) = 0 \forall x \in R \setminus E_n$ 的 $h_n \in L^\infty(0, T)$, 则有

$$\frac{d}{dt} P(f, h_{f,\sigma} + th_n, \sigma)|_{t=0} = 0. \quad (2.21)$$

这是因为 f 与 $h_{f,\sigma}$ 线性无关等价于 $H(f, h_{f,\sigma}) > 0$, 所以这时上式左边的导数存在, 且可写成

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} [\langle f, h_{f,\sigma} + th_n \rangle - \sigma H(f, h_{f,\sigma} + th_n)]|_{t=0} \\ &= \langle f, h_n \rangle - \sigma [\|f\|_2^2 \langle h_{f,\sigma}, h_n \rangle - \langle f, h_{f,\sigma} \rangle \langle f, h_n \rangle] / H(f, h_{f,\sigma}) \\ &= \langle f - \sigma [\|f\|_2^2 h_{f,\sigma} - \langle f, h_{f,\sigma} \rangle f] / H(f, h_{f,\sigma}), h_n \rangle = 0. \end{aligned}$$

由上式中 h_n 的任意性, 就有

$$f(t) - \sigma [\|f\|_2^2 h_{f,\sigma}(t) - \langle f, h_{f,\sigma} \rangle f(t)] / H(f, h_{f,\sigma}) = 0, \quad \forall t \in E_n.$$

又由 $n \in \{3, 4, \dots\}$ 的任意性, 上式中的 E_n 可改为:

$$E = \{x \in R: |h_{f,\sigma}(x)| < 1\} = \bigcup_{n=3}^{\infty} E_n, \quad (2.22)$$

也即有着

$$h_{f,\sigma}(t) = a_{f,\sigma} f(t) \quad \forall t \in E. \quad (2.23)$$

记 $E_1 = \{x \in R: h_{f,\sigma}(x) = 1\}$. 又取 $h_1 \in L^\infty(0, T)$ 满足

$$h_1(x) \begin{cases} \geq 0, & \forall x \in E_1, \\ = 0, & \forall x \in R \setminus E_1, \end{cases}$$

则由引理 4 中 $i = 2$ 的情形, 我们有

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} [P(f, h_{f,\sigma}, \sigma) - P(f, h_{f,\sigma} - th_1, \sigma)] \geq 0,$$

此即

$$\langle f - \sigma [\|f\|_2^2 h_{f,\sigma} - \langle f, h_{f,\sigma} \rangle f] / H(f, h_{f,\sigma}), h_1 \rangle \geq 0.$$

由上式中 h_1 的任意性可得

$$f(t) - \sigma [\|f\|_2^2 h_{f,\sigma}(t) - \langle f, h_{f,\sigma} \rangle f(t)] / H(f, h_{f,\sigma}) \geq 0, \quad \forall t \in E_1,$$

此即

$$1 = h_{f,\sigma}(t) \leq a_{f,\sigma} f(t), \quad \forall t \in E_1. \quad (2.24)$$

记 $E_2 = \{x \in R; h_{f,\sigma}(x) = -1\}$, 则类似地可得

$$-1 = h_{f,\sigma}(t) \geq a_{f,\sigma} f(t), \quad \forall t \in E_2. \quad (2.25)$$

结合 (2.22)–(2.25) 式, 就得到了 (2.18) 与 (2.19) 式. 最后因为若 $a_{f,\sigma} < 1/\|f\|_\infty$, 则由 (2.18) 式得 $h_{f,\sigma} = a_{f,\sigma} f$, 从而 $h_{f,\sigma}$ 与 f 线性相关, 这与假设矛盾. 所以 (2.20) 式成立. 引理 6 证毕.

引理 7. 当 $\sigma\|f\| > 0$ 时, 有着

$$I(f, \sigma) = \max\{\langle f, f_a \rangle - \sigma H(f, f_a); a \in A_i(f, \sigma)\} \quad (i = 1, 2), \quad (2.26)$$

其中 $f_a(t) = \min\{1, a|f(t)|\} \operatorname{sgn} f(t)$, $A_1(f, \sigma) = [1/\|f\|_\infty, \infty)$,

$$A_2(f, \sigma) = G_f^{-1}(\sigma) = \{a \in A_1(f, \sigma); \sigma = G_f(a)\}$$

及

$$G_f(a) = H(f, f_a)/[a\|f\|_2^2 - \langle f, f_a \rangle].$$

证. 当 $a \in A_1(f, \sigma)$, 也即 $a \geq 1/\|f\|_\infty$ 时, 由引理 4, 有 $f_a \in B_1$ 及 $I(f, \sigma) \geq P(f, f_a, \sigma)$. 另一方面, 由引理 6, 存在 $a = a_{f,\sigma} \in A_1(f, \sigma)$, 使上式变为等式, 这时 (2.19) 式在 $h_{f,a} = f_a$ 下可以写成 $\sigma = G_f(a)$, 因此 (2.26) 式成立. 引理 7 证毕.

对于具体给定的函数 f 及 $\sigma > 0$, 常常可以根据上述引理 7 不难地算得 $I(f, \sigma)$. 在利用引理 7 时, 如能求得 $|f(t)|$ 在 $[0, T]$ 上的非增重排 $\bar{f}(t)$ (参见文献 [17] 或 [18]), 那末有

$$\langle f, f_a \rangle = \frac{1}{T} \left[\int_0^d \bar{f}(t) dt + a \int_d^T \bar{f}(t) dt \right] \quad (2.27)$$

及

$$\|f_a\|^2 = \frac{1}{T} \left[d + a^2 \int_d^T \bar{f}(t) dt \right], \quad (2.28)$$

其中

$$d = \sup\{t \in [0, T]; a\bar{f}(t) \geq 1\}. \quad (2.29)$$

若 a 在 (2.26) 式中达到最大值, 则将 f_a 代替 (2.15) 式中的 h 后得到的 g_1 , 就是引理 1 中 $g_{f,\sigma}$ 的具体表达式 [见文献 [14] 的定理 1 (V)]. 由此也可得到引理 2.

三、(1.9) 式的证明

在本节中令 $f(t) = \sin t$, 则 $T = 2\pi$, $f(t)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的非增重排为 $\bar{f}(t) = \cos \frac{t}{4}$,

$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2}$ 及 $\|f\|_\infty = 1$. 又设 $a \geq 1$, 则在 (2.29) 式中 $d = 4\cos^{-1} \frac{1}{a}$. 记着 $b = \frac{1}{2}d = 2\cos^{-1} \frac{1}{a}$, 也即 $a = 1/\cos \frac{b}{2}$, 则由 (2.27) 及 (2.28) 式, 有

$$\begin{aligned} \langle f, f_a \rangle &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2b} \cos \frac{t}{4} dt + \int_{2b}^{2\pi} \cos^2 \frac{t}{4} dt / \cos \frac{b}{2} \right] \\ &= (\pi + \sin b - b) / \left(2\pi \cos \frac{b}{2} \right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \|f_a\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \left[2b + \int_{2b}^{2\pi} \cos^2 \frac{t}{4} dt / \cos^2 \frac{b}{2} \right] \\ &= (\pi + b \cos b - \sin b) / \left(2\pi \cos^2 \frac{b}{2} \right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned}
 H(f, f_a) &= \sqrt{\frac{\pi + b \cos b - \sin b}{4\pi \cos^2 \frac{b}{2}} - \frac{(\pi + \sin b - b)^2}{4\pi^2 \cos^2 \frac{b}{2}}} \\
 &= \sqrt{\pi(2b + b \cos b - 3 \sin b) - (b - \sin b)^2} / \left(2\pi \cos \frac{b}{2}\right) \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}
 G_f(a) &= \frac{\sqrt{\pi(2b + b \cos b - 3 \sin b) - (b - \sin b)^2}}{2\pi \cos \frac{b}{2} \left[1 / \left(2 \cos \frac{b}{2}\right) - (\pi + \sin b - b) / \left(2\pi \cos \frac{b}{2}\right)\right]} \\
 &= \sqrt{\pi(2b + b \cos b - 3 \sin b) / (b - \sin b)^2 - 1}. \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

我们来证明上式关于 a 是严格单调的。由于

$$\begin{aligned}
 \frac{dG_f^2(a)}{da} &= \pi \frac{(2 - 2 \cos b - b \sin b)(b - \sin b) - 2(1 - \cos b)(2b + b \cos b - 3 \sin b)}{(b - \sin b)^3} \\
 &= \pi \frac{4(1 - \cos b) - b(b + \sin b)}{(b - \sin b)^3} \sin b = \frac{\pi \sin b}{(b - \sin b)^3} \varphi(b), \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

其中 $\varphi(b) = 4 - 4 \cos b - b^2 - b \sin b$, 满足 $\varphi^{(i)}(0) = 0 (i = 0, \dots, 4)$ 及 $\varphi^{(4)}(b) = -b \sin b < 0 \forall b \in (0, \pi)$, 所以有

$$\varphi(b) < 0, \forall b \in (0, \pi). \quad (3.6)$$

由 (3.5) 与 (3.6) 式可知, $G_f^2(a)$ [从而 $G_f(a)$] 关于 $b \in (0, \pi)$ 严格单调, 而 $b = 2 \cos^{-1} \frac{1}{a}$ 又关于 $a > 1$ 严格单调, 所以 $G_f(a)$ 关于 $a > 1$ 严格单调。注意到 a 从 1 开始无限增大时, b 从 0 开始连续地趋向于 π^- , 而相应地 $G_f(a)$ 从 $+\infty$ 开始连续地趋向于 0_+ , 所以 $G_f(a)$ 在 $(1, \infty)$ 上的值域为 $G_f(1, \infty) = (0, \infty)$ 。于是对于任意 $\sigma > 0$, 可以由

$$\sigma = G_f(a) = G_f\left(1 / \cos \frac{b}{2}\right) \quad (3.7)$$

唯一地确定 $a \in (1, \infty)$ 及 $b \in (0, \pi)$ 。这时由引理 7, (3.1)–(3.4) 及 (3.7) 式得

$$\begin{aligned}
 I(f, \sigma) &= \langle f, f_a \rangle - \sigma H(f, f_a) = \langle f, f_a \rangle - G_f^2(a) [a \|f\|_2^2 - \langle f, f_a \rangle] \\
 &= \left(2 \sin \frac{b}{2} - b \cos \frac{b}{2}\right) / (b - \sin b). \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

由此, 再注意到引理 2, 就有

$$\begin{aligned}
 \inf \left\{ \left\| \sin t - \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i \sin(it + \theta_i) \right\| : \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i^2 \leq \sigma^2 \right\} \\
 = \left(2 \sin \frac{b}{2} - b \cos \frac{b}{2}\right) / (b - \sin b), \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

其中 b 由 (3.7) 式, 也即 (1.7) 式唯一确定。利用类似于 (3.5)–(3.6) 式的方法, 可以证明 (3.8) 或 (3.9) 式关于 $b \in (0, \pi)$ [从而也关于 $\sigma > 0$] 严格单调, 所以 (3.9) 式中的不等号可以改为等号。于是我们又有(因为下述分子与分母在同一点取到极值)

$$\sup \left\{ \left\| \sin t - \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i \sin(it + \theta_i) \right\|_2 / \left\| \sin t \right\|_2 \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i \sin(i\tau + \theta_i) \Big\| : \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i^2 \leq \sigma^2 \Big\} \\
 & = \sqrt{(1 + \sigma^2)/2} / I(f, \sigma) = \sqrt{(1 + \sigma^2)/2} (b - \sin b) / \left(2 \sin \frac{b}{2} - b \cos \frac{b}{2} \right). \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

这就是 (1.9) 及 (1.6) 式, 而将 (3.4) 式代入 (3.7) 式后, 就得 (1.7) 式. (3.9) 与 (3.10) 式是文献 [19] 中相应结果的准确化, 所用的方法也是完全不同的.

四、(1.8) 式的证明

相应于 (2.2) 式, 我们考察极值问题

$$J_p(f, \sigma) = \sup \{ \|f - g\|_p : g \in S(f, \sigma) \} \quad (1 \leq p < 2; \sigma \geq 0), \quad (4.1)$$

其中记着

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty).$$

类似于上述引理 4, 有 (见文献 [14] 的定理 2)

$$\begin{aligned}
 J_p(f, \sigma) &= \sup_{\|h\|_q \leq 1} [\langle f, h \rangle - \inf_{g \in S(f, \sigma)} \langle g, h \rangle] = \sup_{\|h\|_q \leq 1} [\langle f, h \rangle + \sup_{g \in S(f, \sigma)} \langle g, -h \rangle] \\
 &= \sup \{ \langle f, h \rangle + \sigma H(f, h) : \|h\|_q \leq 1 \}, \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 因为当 $\|h\|_q \leq 1$ 时, 有 $\|h\|_2 \leq 1$ 及 $|\langle f, h \rangle| \leq \|f\|_p$, 所以由上式得

$$J_p(f, \sigma) \leq \max \{ t + \sigma \sqrt{\|f\|_2^2 - t^2} : |t| \leq \|f\|_p \}. \quad (4.3)$$

另一方面, 可令 $h_1 = |f|^{p-1} \|f\|_p^{-p} \operatorname{sgn} f$. 因为 $\|h_1\|_q = 1$, 所以由 (4.2) 式得

$$J_p(f, \sigma) \geq \langle f, h_1 \rangle + \sigma H(f, h_1) = \|f\|_p + \sigma \|f\|_p^{1-p} \sqrt{\|f\|_2^2 \|f\|^{2p-2} - \|f\|_p^{2p}}. \quad (4.4)$$

由上两式在 $p = 1$ 的情形, 可得

$$J_1(f, \sigma) = \|f\| + \sigma \sqrt{\|f\|_2^2 - \|f\|^2} \quad (\|f\|^2 \leq \|f\|_2^2 / (1 + \sigma^2)). \quad (4.5)$$

当 $\|f\| \geq \|f\|_2 / \sqrt{1 + \sigma^2}$ 时, 我们可取 h_0 使 $|h_0| = 1$, 且 $\langle f, h_0 \rangle = \|f\|_2 / \sqrt{1 + \sigma^2}$, 于是由 (4.2) 式得

$$J_1(f, \sigma) \geq \langle f, h_0 \rangle + \sigma H(f, h_0) = \|f\|_2 \sqrt{1 + \sigma^2} \quad (\|f\| \geq \|f\|_2 / \sqrt{1 + \sigma^2}). \quad (4.6)$$

结合 (4.3), (4.5) 及 (4.6) 式, 得

$$J_1(f, \sigma) = \begin{cases} \|f\| + \sigma \sqrt{\|f\|_2^2 - \|f\|^2} & (0 \leq \sigma \leq \sqrt{\|f\|_2^2 / \|f\|^2 - 1}), \\ \|f\|_2 \sqrt{1 + \sigma^2} & (\sigma \geq \sqrt{\|f\|_2^2 / \|f\|^2 - 1}). \end{cases} \quad (4.7)$$

由上式关于 σ 的严格单调性可知, $\|f - g\|$ 作为 g 的泛函, 仅在 $S(f, \sigma)$ 的边界 $\partial S(f, \sigma)$ 上取到上确界. 于是有

$$\begin{aligned}
 \inf_{g \in S(f, \sigma)} \frac{\|f - g\|_2}{\|f - g\|} &= \min_{0 \leq \alpha \leq \sigma} \inf_{g \in \partial S(f, \alpha)} \frac{\|f - g\|_2}{\|f - g\|} = \min_{0 \leq \alpha \leq \sigma} \frac{\|f\|_2 \sqrt{1 + \alpha^2}}{J_1(f, \alpha)} \\
 &= \frac{\|f\|_2 \sqrt{1 + \sigma^2}}{J_1(f, \sigma)} = \max \left\{ 1, \frac{\|f\|_2 \sqrt{1 + \sigma^2}}{\|f\| + \sigma \sqrt{\|f\|_2^2 - \|f\|^2}} \right\}. \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

类似于第二节最后的说明, 若将 (4.4) 与 (4.6) 式中相应的 h_1 代替 (2.15) 式中的 $-h$, 则

得到的 g_1 就是 (4.1) 式中在 $p = 1$ 时达到上确界的 g (见文献 [14] 的定理 2 (iii)). 从而可见, 当 f 为奇函数时, 必有达到上确界的奇函数 g . 于是, 将 $f(t) \equiv \sin t$ 代入 (4.7) 与 (4.8) 式后, 就可相应地得到

$$\begin{aligned} & \sup_{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \leq \sigma^2} \left\| \sin t - \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i \sin(it + \theta_i) \right\| \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\pi} + \sigma \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}} & (0 \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{\pi^2}{8} - 1}), \\ \sqrt{(1 + \sigma^2)/2} & (\sigma \geq \sqrt{\frac{\pi^2}{8} - 1}) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.9)$$

及

$$\inf_{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \leq \sigma^2} \frac{\left\| \sin t - \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i \sin(it + \theta_i) \right\|_2}{\left\| \sin t - \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i \sin(it + \theta_i) \right\|} = \max \left\{ 1, \frac{\pi \sqrt{1 + \sigma^2}}{2 \sqrt{2 + \sigma \sqrt{\pi^2 - 8}}} \right\}. \quad (4.10)$$

这就是 (1.5) 及 (1.8) 式. (4.9) 式是已知的 (文献 [20] 的 (1) 式中有笔误), 只是这里采用了很不相同的方法.

参 考 文 献

- [1] 成汉湘, 无线电计量, 1975, 2: 21—29.
- [2] 上海市电工仪器研究所, 电工仪表, 1975, 1: 1—12.
- [3] Laval, D.C., *Instrument Review*, **11** (1964), 146: 195—197.
- [4] Martin, J. W., *Electro-Technology*, **75** (1965), 4: 38—41.
- [5] 杨义群, 电测与仪表, 1973, 10: 32—33.
- [6] 吴达慎, 无线电计量, 1974, 2: 1—27.
- [7] 来妙林, 无线电计量, 1975, 3: 18—28.
- [8] Далеция А. Г., *Радиотехника*, **27** (1972), 5: 105—107.
- [9] 铃木, ラジオ技术, **29**, (1975), 4: 230—234.
- [10] 杨义群, 数学的实践与认识, 1978, 3: 46—50.
- [11] —, 电测与仪表, 1980, 7: 30.
- [12] —, 自然杂志, **6** (1983), 9: 713.
- [13] 关肇直等, 线性泛函分析入门, 上海科技出版社, 1979.
- [14] 杨义群, 浙江大学学报, 1981, 3: 107—115.
- [15] Гирсанов И. В., *Лекции по математической теории экстремальных задач*, Изд-во МУ, 1970.
- [16] Иоффе А. Д. и Тихомиров, В. М., *Теория экстремальных задач*, Издат. «Наука», М., 1974.
- [17] Hardy, G. H. et al., 不等式, 科学出版社, 1965.
- [18] Корнйчук Н. П., *Экстремальные задачи теории приближения*, Издат. «Наука», М., 1976.
- [19] 杨义群, 应用数学学报, **6** (1983), 1: 61—69.
- [20] —, 应用数学学报, **2** (1979), 4: 325—330.