



五次锥形小解消的平衡锥

献给彭家贵教授 80 寿辰

傅吉祥, 王弘杰*

复旦大学数学科学学院, 上海 200433

E-mail: majxfu@fudan.edu.cn, 21110180020@m.fudan.edu.cn

收稿日期: 2024-04-21; 接受日期: 2024-09-14; 网络出版日期: 2024-10-11; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 12141104) 资助项目

摘要 本文利用相交数得到 \mathbb{P}^4 中五次锥形小解消的平衡锥的边界, 从而比较其 Kähler 锥在平衡映射下的像与平衡锥的大小.

关键词 平衡锥 小解消 五次锥形 Kähler 锥

MSC (2020) 主题分类 32J25, 32Q15

1 引言

对紧 Kähler 流形 X , 可定义其 Kähler 锥与平衡锥 (balanced cone) 如下:

$$\mathcal{K}(X) = \{\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbb{R}) \mid \alpha \text{ 有一个 Kähler 度量代表元}\},$$

$$\mathcal{B}(X) = \{\alpha \in H^{n-1, n-1}(X, \mathbb{R}) \mid \alpha \text{ 有一个平衡度量代表元}\}.$$

这两个锥之间存在一个称为平衡映射的自然映射

$$\mathbf{b}: \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{B}(X), \quad \alpha \mapsto \alpha^{n-1}.$$

Fu 和 Xiao^[8] 证明平衡映射是单射, 但不一定是满射. 事实上, 他们给出了许多不是满射的例子, 而五次锥形的小解消 (small resolution) 就是他们提到的例子之一. 作为练习, 本文刻画这个流形的平衡锥, 从而比较其 Kähler 锥在平衡映射下的像与平衡锥的大小. 这样可以进一步研究五次锥形小解消的非 Kähler 典则度量.

记 \mathbb{P}^4 中五次锥形的小解消为 Y , $Y \subset \hat{\mathbb{P}}^4 \subset \mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^1$, 其中 $\hat{\mathbb{P}}^4$ 是 \mathbb{P}^4 在子流形 \mathbb{P}^2 的爆破 (blow-up). 本文得到如下结果.

英文引用格式: Fu J X, Wang H J. The balanced cone of the small resolution of the quintic conifold (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 67–74, doi: 10.1360/SSM-2024-0122

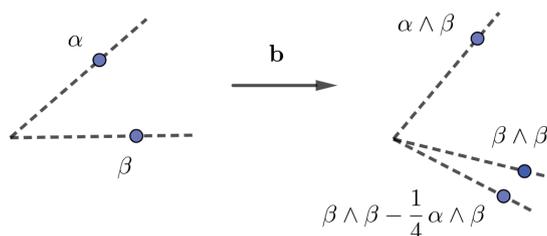


图 1 (网络版彩图) 五次锥形小解消的平衡映射的像

定理 1.1 Y 的平衡锥 $\mathcal{B}(Y)$ 的两个边界分别由 $\alpha \wedge \beta$ 与 $\beta \wedge \beta - \frac{1}{4}\alpha \wedge \beta$ 生成, 其中 α 与 β 分别是 \mathbb{P}^1 与 \mathbb{P}^4 中 Fubini-Study 度量对应的 Kähler 类到 Y 的拉回.

图 1 中映射 \mathbf{b} 是平衡映射, 左边的锥表示 Y 的 Kähler 锥 $\mathcal{K}(Y)$, 它是由类 α 与 β 围成的开凸锥. 而右边的大锥表示 Y 的平衡锥 $\mathcal{B}(Y)$, 它是由类 $\alpha \wedge \beta$ 与 $\beta \wedge \beta - \frac{1}{4}\alpha \wedge \beta$ 围成的开凸锥. 右边由类 $\alpha \wedge \beta$ 与 $\beta \wedge \beta$ 围成的开凸锥表示 $\mathbf{b}(\mathcal{K}(Y))$. 这样一来, $\mathbf{b}(\mathcal{K}(Y))$ 和 $\mathcal{B}(Y)$ 的差距就一目了然了.

由于 Y 是射影流形, 由文献 [8] 知, $\mathcal{B}(Y)$ 的闭包等于移动曲线锥 (movable cone) $\mathcal{M}(Y)$. 另一方面, 由文献 [3, 15] 知, $\mathcal{M}(Y)$ 是拟有效锥 $\mathcal{E}(Y)$ 的对偶锥. 因此, 我们通过 $\mathcal{E}(Y)$ 的边界得到 $\mathcal{B}(Y)$ 的边界. 显然 α 是 $\mathcal{E}(Y)$ 的一个边界的生成元, 它对应 $\mathcal{B}(Y)$ 的一个边界生成元 $\alpha \wedge \beta$. 为了得到 $\mathcal{B}(Y)$ 的另一个边界的生成元, 我们求出 $\mathcal{E}(Y)$ 的另一个边界的生成元.

之前计算射影流形的拟有效锥和移动曲线锥的文献主要有 [1, 4, 5, 7, 9, 10, 13, 14, 17], 他们考虑的对象是一些特定的模空间. 其中文献 [10, 17] 利用模空间的分类对象确定拟有效锥, 并由此得到移动曲线锥. 而文献 [9] 考虑的是数值有效锥等于拟有效锥的情形. 其他值得注意的文献有 [2, 6], 文献 [2] 刻画了超 Kähler 流形的移动曲线锥, 而文献 [6] 则考虑了射影空间爆破的有效锥的一些性质.

本文在第 2 节简单介绍 Y ; 在第 3 节计算所需的相交数; 在第 4 节计算 $\mathcal{E}(Y)$ 的另一个边界的生成元, 并用锥对偶得到 $\mathcal{B}(Y)$ 的另一个边界的生成元.

2 五次锥形的小解消

本文考虑的对象是 \mathbb{P}^4 中五次超曲面锥形的小解消. 设

$$x = [x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4]$$

是 \mathbb{P}^4 中的齐次坐标, g 与 h 是关于这些变量的一般四次齐次多项式. \mathbb{P}^4 中由 g 与 h 定义奇异超曲面

$$\tilde{Y} = \{x \in \mathbb{P}^4 \mid x_3g(x_0, \dots, x_4) + x_4h(x_0, \dots, x_4) = 0\},$$

它的奇点集

$$\text{Sing}(\tilde{Y}) = \{x \in \mathbb{P}^4 \mid x_3 = x_4 = g(x) = h(x) = 0\}$$

由 16 个点组成 (参见文献 [11]).

将 \mathbb{P}^4 沿子簇

$$\mathbb{P}^2 = \{x \in \mathbb{P}^4 \mid x_3 = x_4 = 0\}$$

爆破得到 $\mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^1$ 的子流形 $\hat{\mathbb{P}}^4$, 并记爆破态射为

$$\pi : \hat{\mathbb{P}}^4 \rightarrow \mathbb{P}^4.$$

则 $\hat{\mathbb{P}}^4$ 的子簇 $Y = \overline{\pi^{-1}(\tilde{Y} - \text{Sing}(\tilde{Y}))}$ 是 $\mathbb{P}^4(x) \times \mathbb{P}^1(y)$ 的三维复子流形, 这里 $y = [y_0 : y_1]$ 是 \mathbb{P}^1 的齐次坐标, 并且 π 诱导了 \tilde{Y} 的小解消

$$\pi|_Y : Y \rightarrow \tilde{Y}.$$

注意到

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^1 \mid y_0x_4 - y_1x_3 = y_0g(x) + y_1h(x) = 0\}. \quad (2.1)$$

关于 Y 有如下事实 (参见文献 [11]).

命题 2.1 Y 是三维 Calabi-Yau 流形, 且 $h^{1,1}(Y) = h^{1,1}(\hat{\mathbb{P}}^4) = h^{1,1}(\mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^1) = 2$.

3 相交数的计算

首先固定一些记号. 记包含映射

$$i : Y \hookrightarrow \mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^1,$$

记投影映射

$$\pi_1 : \mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^4,$$

$$\pi_2 : \mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1.$$

令

$$\alpha := i^* \tilde{\alpha} := i^* \pi_2^* [\omega_{FS, \mathbb{P}^1}],$$

$$\beta := i^* \tilde{\beta} := i^* \pi_1^* [\omega_{FS, \mathbb{P}^4}],$$

其中 ω_{FS} 是相应射影空间中 Fubini-Study 度量对应的 Kähler 形式. 显然, α 与 β 构成 $H^{1,1}(Y, \mathbb{R})$ 的一组基, 它们分别是 Kähler 锥 $\mathcal{K}(Y)$ 两条边界的生成元, 而且 (参见文献 [8, 16])

$$\beta \in \mathcal{E}^\circ(Y), \quad \beta \wedge \beta \in \mathcal{B}(Y), \quad \alpha \wedge \beta \in \partial \mathcal{B}(Y).$$

我们有以下关于相交数的引理.

引理 3.1

$$\int_Y \alpha \wedge \beta \wedge \beta = 4,$$

$$\int_Y \beta \wedge \beta \wedge \beta = 5.$$

证明 我们先做一些准备工作. 简记 $\mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^1$ 为 X . 考虑 X 上指数层正合列诱导的上同调群长正合列

$$\cdots \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \cdots.$$

因为 $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ 和 $H^2(X, \mathcal{O}_X)$ 等于 0, 所以态射 c_1 是同构, 并且 $H^2(X, \mathbb{Z})$ 由 $\tilde{\alpha}$ 与 $\tilde{\beta}$ 生成.

注意到 $V_1 := [y_0x_4 - y_1x_3 = 0]$ 与 $V_2 := [y_0g(x) + y_1h(x) = 0]$ 是 X 中两个除子, 因此 Y 上的相交数可以转化为 X 上的相交数, 即

$$\begin{aligned}\int_Y \alpha \wedge \beta \wedge \beta &= \int_X [Y] \wedge \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta} \wedge \tilde{\beta} \\ &= \int_X c_1(\mathcal{O}_X(V_1)) \wedge c_1(\mathcal{O}_X(V_2)) \wedge \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta} \wedge \tilde{\beta}, \\ \int_Y \beta \wedge \beta \wedge \beta &= \int_X [Y] \wedge \tilde{\beta} \wedge \tilde{\beta} \wedge \tilde{\beta} \\ &= \int_X c_1(\mathcal{O}_X(V_1)) \wedge c_1(\mathcal{O}_X(V_2)) \wedge \tilde{\beta} \wedge \tilde{\beta} \wedge \tilde{\beta}.\end{aligned}$$

于是需要计算 X 上双齐次多项式的零除子的第一陈类.

设 $u(x)$ 是 k 次齐次多项式, $v(y)$ 是 l 次齐次多项式, $w(x, y)$ 是关于 x 和 y 分别为 k 次和 l 次的双齐次多项式. 记

$$D_1 := [u(x) = 0], \quad D_2 := [v(y) = 0], \quad D_3 := [w(x, y) = 0].$$

易见 X 有如下仿射开覆盖:

$$\{W_{ij} := (x_i \neq 0) \cap (y_j \neq 0)\}_{i=0,1,2,3,4; j=0,1}.$$

通过检验线丛 $\mathcal{O}_X(D_1)$ 在以上开覆盖下的转移函数, 可知线丛 $\mathcal{O}_X(D_1)$ 同构于线丛 $\pi_1^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(k))$. 事实上, $\mathcal{O}_X(D_1)$ 的转移函数是

$$\left\{ g_{ij, i'j'} = \frac{x_{i'}^k}{x_i^k} \right\}_{ij, i'j'}.$$

于是由陈类的性质得到

$$c_1(\mathcal{O}_X(D_1)) = k\tilde{\beta}.$$

类似可得 $\mathcal{O}_X(D_2)$ 同构于 $\pi_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(l))$, 于是有

$$c_1(\mathcal{O}_X(D_2)) = l\tilde{\alpha}.$$

同样, $\mathcal{O}_X(D_3)$ 的转移函数是

$$\left\{ \hat{g}_{ij, i'j'} = \frac{x_{i'}^k y_{j'}^l}{x_i^k y_j^l} \right\}_{ij, i'j'},$$

$\mathcal{O}_X(D_3)$ 同构于 $\mathcal{O}_X(D_1 + D_2)$. 所以,

$$c_1(\mathcal{O}_X(D_3)) = c_1(\mathcal{O}_X(D_1)) + c_1(\mathcal{O}_X(D_2)) = l\tilde{\alpha} + k\tilde{\beta}.$$

因此由 V_1 与 V_2 的定义可得

$$\begin{aligned}c_1(\mathcal{O}_X(V_1)) &= \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}, \\ c_1(\mathcal{O}_X(V_2)) &= \tilde{\alpha} + 4\tilde{\beta}.\end{aligned}$$

现在计算引理中的相交数.

$$\begin{aligned}\int_Y \alpha \wedge \beta \wedge \beta &= \int_X [Y] \wedge \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta} \wedge \tilde{\beta} \\ &= \int_X (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) \wedge (\tilde{\alpha} + 4\tilde{\beta}) \wedge \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta} \wedge \tilde{\beta} \\ &= 4 \int_X \tilde{\beta}^4 \wedge \tilde{\alpha} \\ &= 4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_Y \beta \wedge \beta \wedge \beta &= \int_X [Y] \wedge \tilde{\beta} \wedge \tilde{\beta} \wedge \tilde{\beta} \\ &= \int_X (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) \wedge (\tilde{\alpha} + 4\tilde{\beta}) \wedge \tilde{\beta} \wedge \tilde{\beta} \wedge \tilde{\beta} \\ &= 5 \int_X \tilde{\beta}^4 \wedge \tilde{\alpha} \\ &= 5.\end{aligned}$$

证毕. □

4 平衡锥的边界

已知 α 是 $\mathcal{E}(Y)$ 的一条边界的生成元. 需要寻找 $\mathcal{E}(Y)$ 的另一条边界的生成元. 由于 β 是一个大类, 所以 $\mathcal{E}(Y)$ 的另一条边界的生成元形如

$$\xi = \beta - c\alpha,$$

其中 c 是需要确定的正常数. 因为关于 $(1,1)$ -类的 Hodge 猜想成立, 所以若能找到 Y 的所有有效除子对应的类, 就能确定拟有效锥的边界. 又因为每个有效除子类都是素除子类的非负线性组合, 因此仅需确定 Y 上所有素除子类.

由 Y 的定义式 (2.1) 知 Y 有仿射开子集

$$Y \cap W_{00} \cong \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{C}^5 \mid \tilde{x}_4 - \tilde{y}_1 \tilde{x}_3 = g(\tilde{x}) + \tilde{y}_1 h(\tilde{x}) = 0\}.$$

这里的 $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4)$ 与 $\tilde{y} = (\tilde{y}_1)$ 分别表示齐次坐标 x 与 y 在 W_{00} 上对应的非齐次坐标. 特别地, $Y \cap W_{00}$ 上有如下除子等式:

$$\begin{aligned}[\tilde{x}_4 = 0] &= [\tilde{y}_1 = 0] + [\tilde{x}_3 = 0], \\ [g(\tilde{x}) = 0] &= [\tilde{y}_1 = 0] + [h(\tilde{x}) = 0].\end{aligned}$$

注意到 $E_1 = [x_3 = x_4 = 0]$ 与 $E_2 = [g(x) = h(x) = 0]$ 分别是除子 $[\tilde{x}_3 = 0]$ 与 $[h(\tilde{x}) = 0]$ 在 Y 中的闭包. 由 Jacobi 判别法和 g 与 h 的一般性, $[\tilde{x}_3 = 0]$ 与 $[h(\tilde{x}) = 0]$ 均光滑且不可约, 从而它们都是 $Y \cap W_{00}$ 中的素除子. 因此其闭包 E_1 与 E_2 也是 Y 中的素除子, 且有

$$\begin{aligned}[x_4 = 0] &= [y_1 = 0] + E_1, \\ [g(x) = 0] &= [y_1 = 0] + E_2.\end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned}c_1(\mathcal{O}_Y(E_1)) &= \beta - \alpha, \\c_1(\mathcal{O}_Y(E_2)) &= 4\beta - \alpha.\end{aligned}$$

以下引理说明现在已经找到充足的素除子类.

引理 4.1 Y 中每个素除子对应的第一陈类都在闭凸锥 $\text{span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}\{\alpha, \beta - \alpha\}$ 中.

证明 设 D_0 是素除子, 由于仅需找不同于 E_1 的素除子类, 不妨设 $D_0 \neq E_1$. 记

$$c_1(\mathcal{O}_Y(D_0)) = a_1\alpha + a_2\beta.$$

由于 D_0 与 E_1 是不同的素除子, 对第一陈类是丰沛类的全纯线丛 A , 以下不等式成立:

$$\int_Y c_1(\mathcal{O}_Y(D_0)) \wedge c_1(\mathcal{O}_Y(E_1)) \wedge c_1(A) \geq 0. \quad (4.1)$$

设 $c_1(A) = C_1\alpha + C_2\beta$, 其中 $C_1 > 0, C_2 > 0$. 不等式 (4.1) 的左边计算如下:

$$\begin{aligned}\text{LHS} &= \int_Y (a_1\alpha + a_2\beta) \wedge (-\alpha + \beta) \wedge (C_1\alpha + C_2\beta) \\&= a_2C_2 \int_Y \beta \wedge \beta \wedge \beta + (a_1C_2 - a_2C_2 + a_2C_1) \int_Y \alpha \wedge \beta \wedge \beta \\&= a_2C_2 + 4a_2C_1 + 4a_1C_2.\end{aligned} \quad (4.2)$$

不妨取

$$C_1 = \frac{3}{4}C_2 > 0. \quad (4.3)$$

将 (4.3) 代入 (4.2), 由不等式 (4.1) 可得

$$4(a_1 + a_2)C_2 \geq 0.$$

从而有

$$a_1 + a_2 \geq 0.$$

另一方面, 由于 D_0 是有效除子, 且 $\alpha \in \partial\mathcal{E}(Y), \beta \in \mathcal{E}^\circ(Y)$, 可得 $a_2 \geq 0$. 于是有

$$\begin{aligned}c_1(\mathcal{O}_Y(D_0)) &= a_1\alpha + a_2\beta \\&= a_2(\beta - \alpha) + (a_1 + a_2)\alpha \in \text{span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}\{\alpha, \beta - \alpha\}.\end{aligned}$$

证毕. □

由上述引理可得到如下命题.

命题 4.1 $\mathcal{E}(Y) = \text{span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}\{\alpha, \beta - \alpha\}$.

我们还需要以下引理.

引理 4.2 设 C 是 n 维实向量空间 V 中以 0 为顶点的开凸锥, C^\vee 是它的对偶凸锥. 则对任意非零的 $x \in \partial C$, 存在非零的 $G \in \partial(C^\vee)$, 使得

$$G(x) = 0.$$

证明 假设 $x \in \partial C$ 是非零的. 已知 C 是一个开凸锥, 将 Hahn-Banach 分离定理 (文献 [12, 定理 3.4]) 用于 C 与 $\text{span}_{\mathbb{R}}\{x\}$, 则可知存在线性映射 $F: V \rightarrow \mathbb{R}$ 与实数 γ , 使得对任意 $\hat{x} \in \text{span}_{\mathbb{R}}\{x\}$ 以及任意 $y \in C$, 有

$$F(y) < \gamma \leq F(\hat{x}).$$

此时一定有 $F(\hat{x}) = \gamma = 0$. 取 $G = -F$. 由 F 的性质可见 $G \in C^\vee$.

需说明 $G \in \partial(C^\vee)$. 设 $\{u_1, \dots, u_{n-1}, x\}$ 构成 V 的一组基. 对于任意 $\varepsilon > 0$, 定义线性映射 $H_\varepsilon: V \rightarrow \mathbb{R}$, 使得对于任意的 $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, 有

$$H_\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i u_i + a_n x\right) = -\varepsilon a_n.$$

于是, 对任意 $\varepsilon > 0$,

$$G + H_\varepsilon \notin C^\vee.$$

另一方面,

$$G = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (G + H_\varepsilon) \in C^\vee.$$

因此 $G \in \partial(C^\vee)$, 且由以上构造可知 G 非零. □

现在利用文献 [3, 8, 15] 的结论得到 $\mathcal{B}(Y)$ 的另一个边界. 事实上, 由引理 4.2 以及 $\bar{\mathcal{B}}(Y)$ 是 $\mathcal{E}^\circ(Y)$ 的对偶凸锥, 只需考虑 $\mathcal{E}^\circ(Y)$ 的边界元与 (2, 2)- 类的基的相交数.

由 $\int_Y \alpha \wedge (\alpha \wedge \beta) = 0$, 且 $\alpha \wedge \beta$ 是半正的, 则重新得到 $\alpha \wedge \beta$ 是 $\mathcal{B}(Y)$ 的一条边界的生成元. 由于 $\beta \wedge \beta \in \mathcal{B}(Y)$, 所以 $\mathcal{B}(Y)$ 的另一条边界的生成元形如

$$\beta \wedge \beta - c\alpha \wedge \beta.$$

需要确定正常数 c . 由引理 4.2 和引理 3.1, 可得

$$\begin{aligned} 0 &= \int_Y (\beta - \alpha) \wedge (\beta \wedge \beta - c\alpha \wedge \beta) \\ &= \int_Y \beta \wedge \beta \wedge \beta - \int_Y \alpha \wedge \beta \wedge \beta - c \int_Y \beta \wedge \alpha \wedge \beta \\ &= 5 - 4 - 4c \\ &= 1 - 4c. \end{aligned}$$

于是得到 $c = \frac{1}{4}$, 因此 $\mathcal{B}(Y)$ 的另一条边界的生成元是

$$\beta \wedge \beta - \frac{1}{4}\alpha \wedge \beta.$$

从而完成了主要定理的证明.

参考文献

- 1 Biswas I, Hogadi A, Parameswaran A. Pseudo-effective cone of Grassmann bundles over a curve. *Geom Dedicata*, 2014, 172: 69–77
- 2 Boucksom S. Divisorial Zariski decompositions on compact complex manifolds. *Ann Sci Éc Norm Supér (4)*, 2004, 37: 45–76

- 3 Boucksom S, Demailly J-P, Păun M, et al. The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension. *J Algebraic Geom*, 2013, 22: 201–248
- 4 Coskun I, Harris J, Starr J. The effective cone of the Kontsevich moduli space. *Canad Math Bull*, 2008, 51: 519–534
- 5 Coskun I, Huizenga J, Woolf M. The effective cone of the moduli space of sheaves on the plane. *J Eur Math Soc (JEMS)*, 2017, 19: 1421–1467
- 6 Coskun I, Lesieutre J, Ottem J. Effective cones of cycles on blowups of projective space. *Algebra Number Theory*, 2016, 10: 1983–2014
- 7 Farkas G, Pandharipande R. The moduli space of twisted canonical divisors. *J Inst Math Jussieu*, 2018, 17: 615–672
- 8 Fu J, Xiao J. Relations between the Kähler cone and the balanced cone of a Kähler manifold. *Adv Math*, 2014, 263: 230–252
- 9 Misra S. Pseudo-effective cones of projective bundles and weak Zariski decomposition. *Eur J Math*, 2021, 7: 1438–1457
- 10 Mullane S. On the effective cone of $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. *Adv Math*, 2017, 320: 500–519
- 11 Rossi M. Geometric transitions. *J Geom Phys*, 2006, 56: 1940–1983
- 12 Rudin W. *Functional Analysis*. New York: McGraw-Hill, 1973
- 13 Rulla W. Effective cones of quotients of moduli spaces of stable n -pointed curves of genus zero. *Trans Amer Math Soc*, 2006, 358: 3219–3237
- 14 Ryan T. The effective cone of moduli spaces of sheaves on a smooth quadric surface. *Nagoya Math J*, 2018, 232: 151–215
- 15 Toma M. A note on the cone of mobile curves. *C R Math Acad Sci Paris*, 2010, 348: 71–73
- 16 Tosatti V. Limits of Calabi-Yau metrics when the Kähler class degenerates. *J Eur Math Soc (JEMS)*, 2009, 11: 755–776
- 17 Woolf M. Nef and effective cones on the moduli space of torsion sheaves on the projective plane. arXiv:1305.1465, 2013

The balanced cone of the small resolution of the quintic conifold

Jixiang Fu & Hongjie Wang

Abstract In this note, we use the intersection number to explicitly determine the balanced cone of the small resolution of the quintic conifold.

Keywords balanced cone, small resolution, quintic conifold, Kähler cone

MSC(2020) 32J25, 32Q15

doi: 10.1360/SSM-2024-0122