中国科学（A 辑）
第28卷　第9期　SCIENCE IN CHINA（Series A）　1998年9月

包含相对论四极矩-四极矩相互作用的两体运动方程*

吴雪君①　何跃娟①　须重明①②
（①南京师范大学物理系，南京 210097；②中国科学院理论物理研究所，北京 100080）

摘要　利用 DSX 体系，借助于 Maple 计算机代数系统，得到了包含相对论的单极矩、自旋和四极矩间相互作用的两体的完整和明确的一阶后 Newton 近似运动方程. 这套运动方程同时被表示在局部参考系以及整体参考系中. 方程中新包含的四极矩-四极矩项对今后精确决定双中子星结合过程中的运动轨道也许是重要的.

关键词　广义相对论　**DSX** 体系　相对论四极矩　两体问题

两体问题的研究一直是天文学中最重要的研究方向之一，特别是最近，用激光干涉引力波探测器-LIGO，VIRGO 及 LISA 来探测引力波信号将为宇宙的观察开辟一个全新的窗口，从而已成为当代广义相对论天体物理学中最重要和最前沿的课题之一[1,2]，而双中子星系统的结合(coalescence)不仅是产生高频引力波的最重要的源[3]，而且还是产生当今天文学中最大谜之一——γ 爆的最主要候选者[4]. 因此对双中子星系统结合的研究被公认为是对近代相对论天文学的最主要的挑战. 确实，如果两体问题能够足够精确地被解决，从双中子星系统结合过程中产生的引力辐射波形中就能得到有价值的信息[1,5]. 在双中子星结合的后期，中子星产生了可观的畸变，它们的四极矩将对动力学问题起不可忽略的作用. 四极矩产生的势 $\sim\frac{l^2}{r^2}V_{\rm mono}$，$l$ 是物体的非球对称尺度，r 是两物体之间的距离，$V_{\rm mono}$是物质单极矩产生的势，如果 $l^2/r^2\sim v^2/c^2$，当运动方程考虑到单极矩的二阶后 Newton 项时，我们不能忽略一阶后 Newton 的四极矩贡献. 因此，一阶后 Newton 的多极矩(主要是四极矩)对精确决定紧密结合的双体的轨道运动是重要的. Damour[6] 早已指出，严格地讲如果不考虑变形效应，则在运动方程中考虑二阶后 Newton 项的贡献将是没有意义的.

对两体问题的一阶后 Newton 近似运动方程的研究人们已做了大量的工作，有些工作中 Newton 四极矩项的贡献已被考虑[7]，Barker 和 O' Connel 得到过用单极矩、自旋和四极矩之间的相互作用来表示的两体问题[8]，但是他们认为四极矩仅仅和自旋变形有关，没有考虑潮汐矩导致的变形. Dixon 的工作[9] 无法区分场的自身部分和外界部分，且他考虑的延展物体的相对论四极矩项几乎和实际可测的 B-D 多极矩没有联系. 另外在 Thorne 和 Hartle[10] 得到的

1998-01-15 收稿，1998-04-28 收修改稿
*国家自然科学基金(批准号：19573007)和江苏省教委自然科学基金资助项目

N 体问题的运动方程中, 相对论项只考虑了单极矩和自旋及它们的相互作用的耦合项, 四极矩仅仅考虑了 Newton 项. 可见, 在 1991 年前没有得到过两体问题的包含相对论四极矩项的、完整的一阶后 Newton 近似运动方程. 事实上, 1991 年前还没有一个适当的框架可以用来描述 N 体问题的一阶后 Newton 近似运动, 仅仅在 1991 年后, Damour, Soffel 和 Xu(须)提出了一个完整的体系[11~14] 解决了广义相对论天体力学的一阶后 Newton 近似问题(简称为 DSX 体系). 运动方程不同于运动定律, Havas, Goldberg 和 DSX 的文章 II 都对此有过陈述[12]. 运动方程是一个具体的微分方程, 其中的每一项都必须明确地表示成物体的坐标和 B-D 多极矩的形式. 本文的目的是利用 DSX 框架得到精确到相对论四极矩-四极矩项的两体问题的完整的 1-PN 运动方程. 须重明、吴雪君和 Schäfer[15] 亦利用了 DSX 体系, 截断至单极矩、自旋和四极矩, 得到了两体问题的一阶后 Newton 近似运动方程, 但他们略去了相对论的四极矩乘以四极矩的项. 如前所述, 在双中子星系统的结合过程中, 两星之间的距离很近, 潮汐力很强, 因此非球对称尺度 l 较大, l^2/r^2 完全有可能达到 v^2/c^2 的数量级, 这样相对论的四极矩-四极矩作用项就能达到 3-PN 量级, 当运动方程考虑到 3-PN 的单极矩-单极矩作用项时, 1-PN 的四极矩-四极矩作用项就不能忽略. 因此为了适应对双中子星系统更精确求解的要求, 我们这篇文章保留到后 Newton 近似的四极矩-四极矩数量级的项. 我们的工作第一次得到了具有相对论四极矩-四极矩相互作用项的两体的明确的一阶后 Newton 近似运动方程, 所有的项都表示成物体的坐标和 B-D 单极矩、自旋和四极矩之间的耦合形式.

DSX 的文章 II 提供了一个完整的框架来推导计算完全用物质多极矩和自旋多极矩的形式表示的两体问题的运动方程. 由于单极、自旋、四极矩之间的相互作用是如此复杂, 计算所包含之项是如此多, 我们利用 Maple 计算机代数系统作为辅助手段来完成一部分计算工作, 既节省时间又能保证正确性.

1　局部坐标系中外势 $\boldsymbol{W^{B/A}}$, $\boldsymbol{W_a^{B/A}}$ 和潮汐矩 $\boldsymbol{G_a^{B/A}}$, $\boldsymbol{G_{abc}^{A}}$, $\boldsymbol{H_{ab}^{B/A}}$

本文中我们沿用 DSX 体系的符号, 四维 Minkowski 符号取为[$-1, +1, +1, +1$], 四维时空指标(0 到 3)用希腊字母表示, 空间指标(1 到 3)用拉丁字母表示, 相同的指标利用 Einstein 求和约定. 指标用 $\langle\ \rangle$ 括起来表示对称无迹(STF), 即 $\mathrm{STF}_{ijk}(T_{ijk}) \equiv T_{\langle ijk \rangle}$. G 为 Newton 引力常数, c 表示光速. 在后 Newton 展开式中我们用符号 $O(n)$ 表示省略到 c^{-n} 及以上高阶项. N 个物体用上标或下标拉丁字母 A, B, C, …来区别, Einstein 求和约定对物体的标记 A, B, C, …不适用. DSX 框架提供了多参考系方法(整体坐标系和 N 个局域坐标系), 整体坐标系用来描述 N 个物体系统的动力学问题, 在整体坐标系中, 所有的量都用小写字母表示, 坐标表示成 $x^\mu \equiv (ct, x^i)$; 定位在 N 个物体中每个物体的质心上的坐标系称为局域坐标系, 用来描述每个物体的动力学问题. 局域坐标系中的量都用大写字母表示, 坐标表示成 $(X_A^a) \equiv (cT_A, X_A^a)$. 此外我们采用压缩表示: L 代表一个包含 l 个指标的多重指标($L = i_1 i_2 \cdots i_l$), 例如 $\partial_L = \partial_{i_1}\partial_{i_2}\cdots\partial_{i_l}$. $\overset{(1)}{M}{}^B_{b_1 b_2}$ 和 $\overset{(2)}{M}{}^B_{b_1 b_2}$ 分别表示 $M^B_{b_1 b_2}$ 对时间的一次导数和二次导数, A 物体的世界线用 $\mathfrak{L}_A$ 表示, 世界线在整体坐标系下的坐标为 $x^\mu = z^\mu_A(\tau_A)$.

加速度在局域参考 A 系和整体参考系之间转换关系为

$$A_a^A = f_{\mu\upsilon} e_a^{A\mu} \frac{\mathrm{d}^2 z_A^\upsilon}{\mathrm{d}\tau_A^2}, \tag{1}$$

其中 $f_{\mu\upsilon}$ 为 Minkowski 度规，z_A 是 A 物体质心在整体坐标系中的坐标，$e_a^{A\mu}$ 是物体 A 的正交标架基，原时 $d\tau_A^2 = -c^{-2} f_{\mu\upsilon} dz_A^{\mu} dz_A^{\upsilon}$.

对两体问题截止到单极矩、自旋、四极矩项，其运动定律和演化方程为[15]

$$M^A A_a^A = M^A G_a^{B/A} + \frac{1}{2} M_{bc}^A G_{abc}^A - \frac{1}{c^2} \varepsilon_{abc} S_b^A \frac{dG_c^A}{dT^A} - \frac{2}{c^2} \varepsilon_{abc} \frac{dS_b^A}{dT^A} G_c^A - \frac{3}{c^2} \frac{d^2}{dT^{A^2}} (M_{ab}^A G_b^A) + \frac{1}{2c^2} S_b^A H_{ab}^A + \frac{1}{3c^2} \varepsilon_{abc} M_{be}^A \frac{dH_{ce}^A}{dT^A} + \frac{1}{2c^2} \varepsilon_{abc} \frac{dM_{be}^A}{dT^A} H_{ce}^A + O(4), \tag{2}$$

$$\frac{dM^A}{dT^A} = -\frac{1}{2c^2} \left[3 M_{ab}^A \frac{dG_{ab}^{B/A}}{dT^A} + 2 \frac{dM_{ab}^A}{dT^A} G_{ab}^{B/A} \right] + O(4), \tag{3}$$

$$\frac{dS_a^A}{dT^A} = \varepsilon_{abc} M_{be}^A G_{ce}^{B/A} + O(2), \tag{4}$$

式中 ε_{abc} 是三维 Levi-Civita 张量，G_a^A，G_{abc}^A 是 A 物体受到的引力-电潮汐矩，H_{ab}^A 是 A 物体受到的引力-磁潮汐矩，M^A，S_b^A，M_{be}^A 分别是 A 物体的物质单极矩、自旋和物质四极矩，这些量的指标都是对称无迹的，T^A 为 A 物体局域坐标系下的坐标时. 我们的任务就是要计算其中的每一项，将其都明确地表示成物体的坐标和物质多极矩及潮汐多极矩的形式. 对两体系统，潮汐矩可分成二部分 $G_L^A = G_L^{B/A} + G''_L$，第一项为 B 对 A 的直接作用，第二项表示惯性贡献，同样 $H_L^A = H_L^{B/A} + H''_L$. 根据 DSX[11]，$G_a^{A''}(T^A) = -A_a^A + O(4)$，$G_{abc}^{A''}(T^A) = O(4)$，$H_{ab}^{A''}(T^A) = O(4)$. 物体 A 所感受到的（B 物体产生的）潮汐矩的一般表达式为[12]：

$$G_L^{B/A}(T^A) = STF_L \left\{ d_L^A W^{B/A} + \frac{l}{c^2} V_{a_l}^A d_{L-1}^A \left(\frac{\partial W^{B/A}}{\partial t} \right) - \frac{l(l-1)}{c^2} A_{a_l}^A d_{L-1}^A W^{B/A} + \frac{4}{c^2} d_{L-1}^A \left(\frac{\partial W_{a_l}^{B/A}}{\partial t} + v_A^i \frac{\partial W_{a_l}^{B/A}}{\partial x^i} \right) \right\}_{\mathfrak{L}_A} + O(4), \tag{5}$$

$$H_L^{B/A}(T^A) = -4 STF_L \{ \varepsilon_{abc} d_{L-1}^A d_b^A W_c^{B/A} \}_{\mathfrak{L}_A} + O(2), \tag{6}$$

式中 $W_L^{B/A}$ 是物体 A 所感受到的（B 物体产生的）外势，V_a^A 是 A 物体在局域坐标系中的三维速度，t 和 x_i 是整体坐标系下的时间和空间坐标，下角标 $\mathfrak{L}_A$ 指对时间和空间微分后，代入世界线 $x = z^{\mu}{}_A(T^A)$ 点的值，$L \equiv a_1 \cdots a_l$，$d_L^A \equiv e_{a_1}^{Ai_1} \cdots e_{a_l}^{Ai_l} \dfrac{\partial^l}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_l}}$，其中

$$e_a^{Ai} = \left[1 - \frac{1}{c^2} \bar{\omega}^A \right] \left(\delta^{ij} + \frac{1}{2c^2} v_A^i v_A^j \right) \delta_a^j + O(4), \tag{7}$$

v_A^i 是整体坐标系中 A 物体中心世界线的三维速度，$\bar{\omega}^A$ 是物体 A 产生的外势. 为了求得 $G_L^{B/A}$ 和 $H_L^{B/A}$，首先要计算外势的时间分量 $W^{B/A}$ 和空间分量 $W_a^{B/A}$.

选取固定恒星坐标系且截止到四极矩-四极矩作用项，借助于 Maple 解析计算软件，我们首先计算了 $W^{B/A}$ 和 $W_a^{B/A}$. 由于（2）式中只出现 G_a^A 和 G_{abc}^A 的项，注意到 $G_a^{A''} = -A_a^A$，$G_{abc}^{A''} = 0$，（5）和（7）式可简化为

$$G_a^{B/A}(T_A) = \left\{ d_a^A W^{B/A} + \frac{1}{c^2} V_a^A \left(\frac{\partial}{\partial t} W^{B/A} \right) + \frac{4}{c^2} \left(\frac{\partial W_a^{B/A}}{\partial t} + v_A^i \frac{\partial W_a^{B/A}}{\partial x^i} \right) \right\}_{\mathfrak{L}_A} + O(4), \tag{8}$$

$$e_c^{Ai}=\delta_c^i-\frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{GM^B}{r_{AB}}+\frac{3GM^B_{ab}n^{\langle ab\rangle}_{AB}}{2r^3_{AB}}\right)\delta_c^i-\frac{v^i_Av^c_A}{2}\right]+O(4). \tag{9}$$

利用上面计算得到的外势 $W^{B/A}$ 和 $W_a^{B/A}$ 可以算得(8)式中的各项. 精确到相对论四极矩项, 计算结果如下, 其中带脚标“old”的量表示文献[15]的结果：

$$\begin{aligned}G_a^{B/A}={}&\left(G_a^{B/A}\right)_{\text{old}}+\frac{45G^2}{4c^2r^7_{AB}}M^B_{b_1b_2}n^{\langle ab_1b_2\rangle}_{AB}n^{\langle db\rangle}_{AB}\left(3M^A_{db}+M^B_{db}\right)-\\&\frac{60G^2}{c^2r^7_{AB}}M^A_{cd}\left(M^B_{ab}n^{\langle bcd\rangle}_{AB}-\frac{7}{4}M^B_{b_1b_2}n^{\langle ab_1cd\rangle b_2}_{AB}\right);\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}G^A_{a_1a_2a_3}={}&\left(G^A_{a_1a_2a_3}\right)_{\text{old}}+\frac{15G^2}{c^2r^7_{AB}}\left\{M^B_{b_1b_2}\left(\frac{189}{2}n^{\langle a_1a_2a_3b_1b_2\rangle}_{AB}M^B+\frac{109}{2}n^{\langle a_1a_2a_3\rangle b_1b_2}_{AB}M^B-\right.\right.\\&\left.20M^An^{\langle a_1a_2a_3\rangle b_1b_2}_{AB}\right)+M^A_{b_1b_2}\left(-\frac{17}{6}M^Bn^{\langle a_1a_2a_3b_1b_2\rangle}_{AB}+15\frac{M^B}{M^A}M^Bn^{\langle a_1a_2a_3\rangle b_1b_2}_{AB}\right)+\\&n^{b_1\langle a_1a_2}_{AB}M^{a_3\rangle b_1}_B\left(\frac{19}{2}M^A-26M^B\right)-2n^{\langle a_1}_{AB}M^{a_2a_3\rangle}_B\left(\frac{2}{5}M^A-M^B\right)+\\&\left.M^Bn^{b_1\langle a_1a_2}_{AB}M^{a_3\rangle b_1}_A\left(\frac{3}{2}-\frac{6M^B}{5M^A}\right)\right\}+\frac{945G}{c^2r^6_{AB}}\left\{M^B_{b_1b_2}\left[\frac{1}{2}n^{b_1b_2\langle a_1a_2}_{AB}v^{a_3\rangle}_A\left((\boldsymbol{v}_B\circ\boldsymbol{n}_{AB})-\right.\right.\right.\\&\left.\frac{3}{2}(\boldsymbol{v}_A\circ\boldsymbol{n}_{AB})\right)+\frac{1}{6}v^{\langle a_1}_Av^{a_2}_An^{a_3\rangle b_1b_2}_{AB}-\frac{1}{9}v^{\langle a_1}_Av^{a_2}_Bn^{a_3\rangle b_1b_2}_{AB}+\\&\frac{1}{3}n^{b_1\langle a_1a_2}_{AB}v^{a_3\rangle}_A\left(\frac{1}{2}v^{b_2}_A-\frac{1}{3}v^{b_2}_B\right)-\frac{4}{9}n^{b_1b_2\langle a_1}_{AB}v^{a_2}_{AB}v^{a_3\rangle}_{AB}-\\&\left.\frac{4}{9}v^{\langle a_1}_{AB}n^{a_2a_3\rangle b_1}_{AB}v^{b_2}_{AB}+2n^{b_1b_2\langle a_1a_2}_{AB}v^{a_3\rangle}_{AB}(\boldsymbol{n}_{AB}\circ\boldsymbol{v}_{AB})\right]+\\&\frac{1}{3}n^{b_1\langle a_1}_{AB}v^{a_2}_AM^{a_3\rangle b_1}_B\left[(\boldsymbol{v}_A\circ\boldsymbol{v}_{AB})-\frac{2}{3}(\boldsymbol{v}_B\circ\boldsymbol{n}_{AB})\right]-\\&\frac{8}{9}n^{b_1\langle a_1}_{AB}v^{a_2}_{AB}M^{a_3\rangle b_1}_B\left[(\boldsymbol{v}_A\circ\boldsymbol{n}_{AB})-\frac{5}{7}(\boldsymbol{v}_B\circ\boldsymbol{n}_{AB})\right]-\\&\frac{1}{21}v^{\langle a_1}_Av^{a_2}_AM^{a_3\rangle b_1}_Bn^{b_1}_{AB}+\frac{2}{63}v^{\langle a_1}_Av^{a_2}_BM^{a_3\rangle b_1}_Bn^{b_1}_{AB}+\frac{8}{63}v^{\langle a_1}_{AB}v^{a_2}_{AB}M^{a_3\rangle b_1}_Bn^{b_1}_{AB}+\\&\frac{2}{63}v^{\langle a_1}_An^{a_2}_{AB}M^{a_3\rangle b_1}_Bv^{b_1}_B-\frac{1}{21}v^{\langle a_1}_An^{a_2}_{AB}M^{a_3\rangle b_1}_Bv^{b_1}_A+\frac{8}{63}v^{\langle a_1}_{AB}n^{a_2}_{AB}M^{a_3\rangle b_1}_Bv^{b_1}_{AB}-\\&\frac{1}{21}v^{\langle a_1}_AM^{a_2a_3\rangle}_B\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_A\circ\boldsymbol{n}_{AB})-\frac{1}{3}(\boldsymbol{v}_B\circ\boldsymbol{n}_{AB})\right)+\\&\left.\frac{4}{63}M^{\langle a_1a_2}_Bv^{a_3\rangle}_{AB}\left((\boldsymbol{v}_A\circ\boldsymbol{n}_{AB})+3(\boldsymbol{v}_B\circ\boldsymbol{n}_{AB})\right)\right\},\end{aligned} \tag{11}$$

式中 V_B^c 和 v_B^c 分别是 B 物体在局域坐标和整体坐标系下的速度, $v^a_{AB}=v^a_A-v^a_B$, $r_{AB}=|z_B(t)-z_A(t)|$, ($z_A(t)$, $z_B(t)$分别为 A 物体和 B 物体的质心在整体坐标系下的坐标), $n^i_{AB}=(z^i_A(t)-z^i_B(t))/r_{AB}$, $n^{ijk\cdots}_{AB}=n^i_{AB}n^j_{AB}n^k_{AB}\cdots$.

由(6)式可算得引力-磁潮汐矩为

$$H_{ab}^{B/A} = \frac{15G}{r_{AB}^3}\left\{\frac{2}{5}M^B v_{AB}^c\left(\varepsilon_{adc}n_{AB}^{\langle bd\rangle} + \varepsilon_{bdc}n_{AB}^{\langle ad\rangle}\right) + \frac{\overset{(1)}{M}{}_{cd}^B}{r_{AB}}\left(\varepsilon_{ace}n_{AB}^{\langle bde\rangle} + \varepsilon_{bce}n_{AB}^{\langle ade\rangle}\right) + \frac{7}{r_{AB}^2}M_{b_1b_2}^B v_{AB}^c\left(\varepsilon_{adc}n_{AB}^{\langle b_1b_2bd\rangle} + \varepsilon_{bdc}n_{AB}^{\langle b_1b_2ad\rangle}\right) + \frac{2}{r_{AB}}S_c^B n_{AB}^{\langle abc\rangle}\right\} + O(2). \tag{12}$$

2 局部坐标系中两体的运动方程

至此我们已求得所需的全部潮汐矩项, 将其代入(2)式, 计算其中每一项保留到相对论四极矩-四极矩项, 并利用(3)和(4)式, 化简后得到在 A 局部坐标系中的两体运动方程. 由于方程很长, 为使物理涵义更清晰, 我们将它分成物体 A 和物体 B 的单极矩(M)、自旋(S)和四极矩(Q)相互耦合的九部分:

$$\begin{aligned} M^A A_a^A = {} & F_a^A(M^A\times M^B) + F_a^A(M^A\times S^B) + F_a^A(M^A\times Q^B) + \\ & F_a^A(S^A\times M^B) + F_a^A(S^A\times S^B) + F_a^A(S^A\times Q^B) + \\ & F_a^A(Q^A\times M^B) + F_a^A(Q^A\times S^B) + F_a^A(Q^A\times Q^B) + O(4), \end{aligned} \tag{13}$$

上式中 $F_a^A(M^A\times M^B)$, $F_a^A(M^A\times S^B)$, $F_a^A(S^A\times M^B)$, $F_a^A(S^A\times S^B)$, $F_a^A(S^A\times Q^B)$, $F_a^A(Q^A\times S^B)$ 与文献[15] 的结果一致, 其余 3 项为:

$$\begin{aligned} F_a^A(M^A\times Q^B) \equiv {} & \left(F_a^A(M^A\times Q^B)\right)_{\rm old} + \\ & \frac{45G^2}{4c^2r_{AB}^7}M^A M_{b_1b_2}^B M_{cd}^B\left[\left(4-\frac{3M^A}{M^B}\right)n_{AB}^{\langle ab_1b_2\rangle cd} - \frac{3M^A}{M^B}n_{AB}^{\langle ab_1\rangle}n_{AB}^{\langle b_2cd\rangle}\right], \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} F_a^A(Q^A\times M^B) \equiv {} & \left(F_a^A(Q^A\times M^B)\right)_{\rm old} + \\ & \frac{45G^2}{4c^2r_{AB}^7}M^B M_{bc}^A\left\{M_{b_1b_2}^A\left[n_{AB}^{\langle abc\rangle b_1b_2}\left(-\frac{29}{9}+\frac{34M^B}{3M^A}\right) + \right.\right. \\ & \left.\frac{4}{3}\left(1-\frac{4M^B}{M^A}\right)n_{AB}^{\langle ab\rangle}n_{AB}^{\langle cb_1b_2\rangle} + \frac{4}{3}\left(1-\frac{M^B}{M^A}\right)\varepsilon_{abg}\varepsilon_{cfd}n_{AB}^{\langle db_1b_2\rangle}n_{AB}^{\langle gf\rangle}\right] + \\ & \left.M_A^{b_1\langle a}n_{AB}^{bc\rangle b_1}\left(1-\frac{4M^B}{5M^A}\right)\right\} + \frac{9G^2M^B}{c^2r_{AB}^7M^A}M^B M_{b_1b_2}^A\times \\ & \left(\frac{4}{3}M_{ac}^A n_{AB}^{\langle cb_1b_2\rangle} + \frac{6}{5}M_{ab_1}^A n_{AB}^{b_2}\right) - \\ & \frac{45GM^B}{c^2r_{AB}^6M^A}M_{ad}^A M_{bc}^A\left[-21n_{AB}^{\langle bd}v_{AB}^{c\rangle}(\boldsymbol{n}_{AB}\circ\boldsymbol{v}_{AB}) + \frac{63}{2}n_{AB}^{\langle bdc\rangle}(\boldsymbol{n}_{AB}\circ\boldsymbol{v}_{AB})^2 - \right. \\ & \left.\frac{7}{2}n_{AB}^{\langle bdc\rangle}v_{AB}^2 + \frac{2}{5}n_{AB}^{\langle b}v_{AB}^d v_{AB}^{c\rangle}\right], \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} F_a^A(Q^A\times Q^B) \equiv {} & (F_a^A(Q^A\times Q^B))_{\rm old} + \frac{45G^2}{c^2r_{AB}^7}M_{b_1b_2}^B M_{cd}^A[21(M^B-M^A)n_{AB}^{\langle ab_1b_2cd\rangle} + \\ & \frac{7}{3}M^A n_{AB}^{\langle ab_1cd\rangle b_2} + \frac{7}{9}n_{AB}^{\langle b_1b_2cd\rangle a}\left(M^B-\frac{7}{8}M^A\right) + \\ & \frac{1}{3}n_{AB}^{\langle ab_1b_2\rangle cd}\left(M^B+\frac{19}{8}M^A\right) + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Big(M^B-\frac{107}{24}M^A\Big)n_{AB}^{\langle acd\rangle b_1b_2}-\frac{3}{4}n_{AB}^{\langle ab_1\rangle}n_{AB}^{\langle b_2cd\rangle}M^A+\\
&\frac{1}{3}(M^A-M^B)\Big(n_{AB}^{\langle cb_1b_2\rangle}n_{AB}^{\langle ad\rangle}+\varepsilon_{acg}\varepsilon_{dfb}n_{AB}^{\langle bb_1b_2\rangle}n_{AB}^{\langle gf\rangle}+\\
&\frac{7}{3}n_{AB}^{\langle dab_1b_2\rangle c}+\frac{7}{3}\varepsilon_{acg}\varepsilon_{dfb}n_{AB}^{\langle gfb_1b_2\rangle b}\Big)\Big]+\\
&\frac{15G^2}{c^2r_{AB}^7}M^AM_{be}^A\Big[-4\Big(\frac{16}{15}M_{ac}^Bn_{AB}^{\langle cde\rangle}+\frac{19}{4}M_B^{b_1\langle a}n_{AB}^{beb_1\rangle}-\frac{2}{5}M_B^{\langle ab}n_{AB}^{e\rangle}\Big)+\\
&\frac{4}{15}(M_{bg}^Bn_{AB}^{\langle eag\rangle}+\varepsilon_{abc}\varepsilon_{efd}n_{AB}^{\langle cfg\rangle}M_{dg}^B)+\frac{3}{25}(n_{AB}^aM_{be}^B-n_{AB}^bM_{ae}^B+\\
&\varepsilon_{abc}\varepsilon_{efd}n_{AB}^fM_{dc}^B)-M_{b_1g}^B(n_{AB}^{\langle bg\rangle}n_{AB}^{\langle eab_1\rangle}-n_{AB}^{\langle ag\rangle}n_{AB}^{\langle beb_1\rangle}+\varepsilon_{abc}\varepsilon_{efd}n_{AB}^{\langle dg\rangle}n_{AB}^{\langle cfb_1\rangle})\Big]+\\
&\frac{945G}{2c^2r_{AB}^6}M_{bc}^AM_{b_1b_2}^B\Big[-\frac{3}{4}(\boldsymbol{v}_A\cdot\boldsymbol{n}_{AB})n_{AB}^{b_1b_2\langle ab}v_A^{c\rangle}+\frac{1}{6}v_A^{\langle a}v_A^bn_{AB}^{c\rangle b_1b_2}+\\
&\frac{1}{6}v_A^{\langle a}n_{AB}^{bc\rangle b_1}v_A^{b_2}+\frac{1}{2}n_{AB}^{b_1b_2\langle ab}v_A^{c\rangle}(\boldsymbol{v}_B\cdot\boldsymbol{n}_{AB})-\frac{1}{9}n_{AB}^{b_1\langle ab}v_A^{c\rangle}v_B^{b_2}-\frac{1}{9}v_A^{\langle a}v_B^bn_{AB}^{c\rangle b_1b_2}-\\
&\frac{4}{9}v_{AB}^{\langle a}v_{AB}^bn_{AB}^{c\rangle b_1b_2}-\frac{4}{9}v_{AB}^{\langle a}n_{AB}^{bc\rangle b_1}v_{AB}^{b_2}+2(\boldsymbol{n}_{AB}\cdot\boldsymbol{v}_{AB})n_{AB}^{b_1b_2\langle ab}v_{AB}^{c\rangle}-\\
&\frac{8}{27}n_{AB}^{\langle cab_1}v_{AB}^{b_2\rangle}v_{AB}^b+\frac{8}{27}n_{AB}^{\langle cbb_1}v_{AB}^{b_2\rangle}v_{AB}^a-\frac{8}{27}\varepsilon_{abe}\varepsilon_{cfd}v_{AB}^dn_{AB}^{\langle efb_1}v_{AB}^{b_2\rangle}+\\
&\frac{2}{3}(\boldsymbol{n}_{AB}\cdot\boldsymbol{v}_{AB})(n_{AB}^{\langle acb_1b_2\rangle}v_{AB}^b-n_{AB}^{\langle cbb_1b_2\rangle}v_{AB}^a+\varepsilon_{abe}\varepsilon_{cfd}n_{AB}^{\langle efb_1b_2\rangle}v_{AB}^d)\Big]+\\
&\frac{945G}{2c^2r_{AB}^6}M_{bc}^A\Big[(\boldsymbol{v}_A\cdot\boldsymbol{n}_{AB})\Big(\frac{1}{3}M_B^{b_1\langle a}v_A^bn_{AB}^{c\rangle b_1}-\frac{8}{9}M_B^{b_1\langle a}v_{AB}^bn_{AB}^{c\rangle b_1}-\frac{1}{42}M_B^{\langle ab}v_A^{c\rangle}+\\
&\frac{4}{63}M_B^{\langle ab}v_{AB}^{c\rangle}\Big)+(\boldsymbol{v}_B\cdot\boldsymbol{n}_{AB})\Big(\frac{40}{63}M_B^{b_1\langle a}v_{AB}^bn_{AB}^{c\rangle b_1}-\frac{2}{9}M_B^{b_1\langle a}v_A^bn_{AB}^{c\rangle b_1}+\\
&\frac{1}{63}M_B^{\langle ab}v_A^{c\rangle}+\frac{4}{21}M_B^{\langle ab}v_{AB}^{c\rangle}\Big)-\frac{1}{21}M_B^{b_1\langle a}v_A^bn_{AB}^{c\rangle}v_A^{b_1}-\frac{1}{21}M_B^{b_1\langle a}v_A^bv_A^{c\rangle}n_{AB}^{b_1}+\\
&\frac{2}{63}M_B^{b_1\langle a}v_A^bn_{AB}^{c\rangle}v_B^{b_1}+\frac{2}{63}M_B^{b_1\langle a}v_A^bv_B^{c\rangle}n_{AB}^{b_1}+\frac{8}{63}M_B^{b_1\langle a}v_{AB}^bn_{AB}^{c\rangle}v_{AB}^{b_1}+\\
&\frac{8}{63}M_B^{b_1\langle a}v_{AB}^bv_{AB}^{c\rangle}n_{AB}^{b_1}\Big],
\end{aligned}
\tag{16}
$$

(14)～(16)式中带脚标“old”的量表示文献[15]的结果.

3　两体运动方程在整体坐标系中的表示

利用(1)式，考虑到 $\mathrm{d}r_A^2=\mathrm{d}t^2(1-v_A^iv_A^i/c^2)$及 $\mathrm{d}^2z^0/\mathrm{d}t^2=0$，可以得到整体坐标系中的加速度 $\mathrm{d}^2z_A^i/\mathrm{d}t^2$ 和局部坐标系中的加速度 A_a^A 的关系式为

$$
\begin{aligned}
a_i^A=\;&\delta_a^iA_a^A+\frac{Gv_A^2}{c^2r_{AB}^2}\Big[M^Bn_{AB}^i+\frac{15}{2r_{AB}^2}\Big(M_{b_1b_2}^B+\frac{M^B}{M^A}M_{b_1b_2}^A\Big)n_{AB}^{\langle ib_1b_2\rangle}\Big]-\\
&\frac{G^2M^B}{c^2r_{AB}^3}\Big\{M^Bn_{AB}^i+\frac{3}{2r_{AB}^2}\Big[\Big(6M_{b_1b_2}^B+5\frac{M^B}{M^A}M_{b_1b_2}^A\Big)n_{AB}^{\langle ib_1b_2\rangle}+\frac{2}{5}M_{ib}^Bn_{AB}^b\Big]\Big\}-
\end{aligned}
$$

$$\frac{Gv_A^i}{2c^2r_{AB}^2}\left[M^B\left(\boldsymbol{v}_A\circ\boldsymbol{n}_{AB}\right)+\frac{15}{2r_{AB}^2}\left(\boldsymbol{v}_A\circ\boldsymbol{n}_{AB}\right)\left(M^B_{b_1b_2}+\frac{M^B}{M^A}M^A_{b_1b_2}\right)n_{AB}^{\langle b_1b_2\rangle}-\right.$$
$$\left.\frac{3}{r_{AB}^2}\left(M^B_{b_1b_2}+\frac{M^B}{M^A}M^A_{b_1b_2}\right)v_A^{\langle b_1}n_{AB}^{c\rangle}\right]-\frac{945G^2}{4c^2r_{AB}^7}\frac{M^B}{M^A}M^A_{b_1b_2}M^B_{cd}n_{AB}^{\langle ib_1b_2cd\rangle}-$$
$$\frac{45G^2}{4c^2r_{AB}^7}M^B_{cd}n_{AB}^{\langle ib_1b_2\rangle cd}\left(M^B_{b_1b_2}+\frac{2M^B}{M^A}M^A_{b_1b_2}\right)+\frac{945G}{4c^2r_{AB}^6}\frac{M^A_{b_1b_2}M^B_{cd}}{M^A}\left(v_A^2n_{AB}^{\langle ib_1b_2cd\rangle}+\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}v_A^in_{AB}^{\langle b_1b_2cd\rangle}\left(\boldsymbol{v}_A\circ\boldsymbol{n}_{AB}\right)-\frac{2}{9}v_A^in_{AB}^{\langle b_1b_2c}v_A^{d\rangle}\right)+O(4). \tag{17}$$

利用(17)式，我们将局域坐标系中的双星运动方程转化到整体坐标系中得

$$M^A\frac{\mathrm{d}^2z_A^i}{\mathrm{d}t^2}=f_i^A(M^A\times M^B)+f_i^A(M^A\times S^B)+f_i^A(M^A\times Q^B)+$$
$$f_i^A(S^A\times M^B)+f_i^A(S^A\times S^B)+f_i^A(S^A\times Q^B)+$$
$$f_i^A(Q^A\times M^B)+f_i^A(Q^A\times S^B)+f_i^A(Q^A\times Q^B)+O(4), \tag{18}$$

其中

$$f_i^A(M^A\times M^B)\equiv-\frac{GM^AM^B}{r_{AB}^2}n_{AB}^i+\frac{GM^AM^B}{c^2r_{AB}^2}\left\{\left[4(\boldsymbol{v}_{AB}\circ\boldsymbol{n}_{AB})+(\boldsymbol{v}_B\circ\boldsymbol{n}_{AB})\right]v_{AB}^i-\right.$$
$$(\boldsymbol{v}_A\circ\boldsymbol{n}_{AB})v_A^i+\left[\frac{3}{2}(\boldsymbol{v}_B\circ\boldsymbol{n}_{AB})^2+(v_A)^2-\right.$$
$$\left.\left.2(v_{AB})^2+\frac{G}{r_{AB}}(5M^A+4M^B)\right]n_{AB}^i\right\}, \tag{19}$$

$$f_i^A(M^A\times S^B)\equiv\frac{6G}{c^2r_{AB}^3}M^AS_c^B\left(n_{AB}^{\langle id\rangle}\varepsilon_{cdb}v_{AB}^b+\varepsilon_{ibc}v_{AB}^dn_{AB}^{\langle bd\rangle}\right), \tag{20}$$

$$f_i^A(M^A\times Q^B)\equiv-\frac{15G}{2r_{AB}^4}M^AM^B_{b_1b_2}n_{AB}^{\langle ib_1b_2\rangle}+$$
$$\frac{3GM^A}{c^2r_{AB}^4}\left\{M^B_{b_1b_2}\left[n_{AB}^{\langle ib_1b_2\rangle}\left(\frac{17GM^A}{2r_{AB}}+\frac{12GM^B}{r_{AB}}+\frac{5}{2}(v_A)^2-5(v_{AB})^2+\right.\right.\right.$$
$$\left.\frac{25}{4}(\boldsymbol{v}_B\circ\boldsymbol{n}_{AB})^2\right)-\frac{15}{2}(\boldsymbol{v}_B\circ\boldsymbol{n}_{AB})v_B^{\langle i}n_{AB}^{b_1b_2\rangle}+$$
$$\frac{3}{2}v_B^{\langle i}v_B^{b_1}n_{AB}^{b_2\rangle}+v_A^iv_{AB}^{\langle b_1}n_{AB}^{b_2\rangle}+10(\boldsymbol{v}_{AB}\circ\boldsymbol{n}_{AB})v_{AB}^in_{AB}^{\langle b_1b_2\rangle}-$$
$$\left.4v_{AB}^iv_{AB}^{\langle b_1}n_{AB}^{b_2\rangle}-\frac{5}{2}(\boldsymbol{v}_{AB}\circ\boldsymbol{n}_{AB})v_A^in_{AB}^{\langle b_1b_2\rangle}\right]+$$
$$M^B_{ib}n_{AB}^b\circ\left[-\frac{GM^A}{10r_{AB}}+\frac{4GM^B}{5r_{AB}}+\frac{1}{5}(v_B)^2-(\boldsymbol{v}_B\circ\boldsymbol{n}_{AB})^2\right]+$$
$$\left.\frac{2}{5}M^B_{ib}v_B^b(\boldsymbol{v}_B\circ\boldsymbol{n}_{AB})+\frac{5}{2}n_{AB}^{\langle ib_1b_2\rangle}v_B^cv^B_{\langle b_1}M^B_{b_2\rangle c}\right\}+$$
$$\frac{3GM^A}{c^2r_{AB}^3}\left\{\overset{(1)}{M}{}^B_{b_1b_2}\left[(v_{AB}^{b_2}+v_A^{b_2})n_{AB}^{\langle ib_1\rangle}+\frac{5}{2}(\boldsymbol{v}_B\circ\boldsymbol{n}_{AB})n_{AB}^{\langle ib_1b_2\rangle}-\frac{3}{2}v_B^{\langle i}n_{AB}^{b_1b_2\rangle}+\right.\right.$$

$$\frac{1}{2}v_A^i n_{AB}^{\langle b_1 b_2\rangle} - 2v_{AB}^i n_{AB}^{\langle b_1 b_2\rangle}\Big] - 2\overset{(1)}{M}{}^B_{ib}\Big[(\boldsymbol{v}_{AB}\circ\boldsymbol{n}_{AB}) + \frac{1}{5}(\boldsymbol{v}_B\circ\boldsymbol{n}_{AB})n_{AB}^b -$$

$$\frac{1}{3}v_{AB}^b - \frac{1}{15}v_B^b\Big]\Big\} + \frac{3GM^A}{c^2 r_{AB}^2}\Big\{\frac{1}{4}\overset{(2)}{M}{}^B_{b_2 b_1} n_{AB}^{\langle i b_1 b_2\rangle} + \frac{3}{5}\overset{(2)}{M}{}^B_{ib} n_{AB}^b\Big\} +$$

$$\frac{45G^2}{4c^2 r_{AB}^7}M^A M^B_{b_1 b_2} M^B_{cd}\Big[\Big(4-\frac{3M^A}{M^B}\Big)n_{AB}^{\langle ib_1b_2\rangle cd} - \frac{3M^A}{M^B}n_{AB}^{\langle ib_1\rangle}n_{AB}^{\langle b_2 cd\rangle}\Big], \tag{21}$$

$$f_i^A(S^A\times M^B) \equiv \frac{3G}{c^2 r_{AB}^3}S_b^A M^B\Big\{v_{AB}^c(\varepsilon_{idc}n_{AB}^{\langle bd\rangle} + \varepsilon_{bdc}n_{AB}^{\langle id\rangle}) - \frac{5\varepsilon_{ibc}}{2r_{AB}M^A}\Big[\overset{(1)}{M}{}^A_{de}n_{AB}^{\langle cde\rangle} +$$

$$\frac{M^A_{de}}{r_{AB}}(3n_{AB}^{\langle cd}v_{AB}^{e\rangle} - 7n_{AB}^{\langle cde\rangle}(\boldsymbol{v}_{AB}\circ\boldsymbol{n}_{AB}))\Big]\Big\}, \tag{22}$$

$$f_i^A(S^A\times S^B) \equiv \frac{15G}{c^2 r_{AB}^4}S_b^A S_c^B n_{AB}^{\langle ibc\rangle}, \tag{23}$$

$$f_i^A(S^A\times Q^B) \equiv \frac{105G}{2c^2 r_{AB}^5}S_b^A M^B_{b_1b_2}v_{AB}^c(\varepsilon_{idc}n_{AB}^{\langle b_1b_2bd\rangle} + \varepsilon_{bdc}n_{AB}^{\langle b_1b_2id\rangle}) +$$

$$\frac{15G}{2c^2 r_{AB}^4}S_b^A \overset{(1)}{M}{}^B_{b_1b_2}(\varepsilon_{ib_1c}n_{AB}^{\langle bb_2c\rangle} + \varepsilon_{bb_1c}n_{AB}^{\langle ib_2c\rangle}), \tag{24}$$

$$f_i^A(Q^A\times M^B) \equiv -\frac{15G}{2r_{AB}^4}M^A_{b_1b_2}M^B n_{AB}^{\langle ib_1b_2\rangle} +$$

$$\frac{GM^B}{c^2 r_{AB}^4}\Big\{M^A_{b_1b_2}\Big[15n_{AB}^{\langle ib_1b_2\rangle}\Big(\frac{3GM^A}{r_{AB}} + \frac{4GM^B}{r_{AB}} + \frac{1}{2}(v_A)^2 - (v_{AB})^2 +$$

$$\frac{7}{4}(\boldsymbol{v}_B\circ\boldsymbol{n}_{AB})^2\Big) + 15v_A^{\langle i}n_{AB}^{b_1b_2\rangle}\Big(\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_B\circ\boldsymbol{n}_{AB}) - \frac{3}{4}(\boldsymbol{v}_A\circ\boldsymbol{n}_{AB})\Big) +$$

$$30(\boldsymbol{v}_{AB}\circ\boldsymbol{n}_{AB})v_{AB}^{\langle i}n_{AB}^{b_1b_2\rangle} - \frac{45}{2}(\boldsymbol{v}_B\circ\boldsymbol{n}_{AB})v_B^{\langle i}n_{AB}^{b_1b_2\rangle} -$$

$$\frac{15}{2}v_{AB}^{\langle i}v_{AB}^{b_1}n_{AB}^{b_2\rangle} + 6v_A^{\langle i}v_B^{b_1}n_{AB}^{b_2\rangle} - \frac{15}{4}(\boldsymbol{v}_A\circ\boldsymbol{n}_{AB})v_A^i n_{AB}^{\langle b_1b_2\rangle} +$$

$$\frac{3}{2}v_A^i v_A^{\langle b_1}n_{AB}^{b_2\rangle} - 2\varepsilon_{ib_1f}\varepsilon_{b_2dc}\Big(\frac{G(M^A+M^B)}{r_{AB}}n_{AB}^{c\langle df\rangle} +$$

$$5(\boldsymbol{v}_{AB}\circ\boldsymbol{n}_{AB})v_{AB}^c n_{AB}^{\langle df\rangle}\Big)\Big] + M^A_{ib}n_{AB}^b\Big(\frac{2GM^B}{3r_{AB}} + \frac{13GM^A}{6r_{AB}}\Big) +$$

$$2M^A_{bc}\Big[5(\boldsymbol{v}_{AB}\circ\boldsymbol{n}_{AB})(v_{AB}^i n_{AB}^{\langle bc\rangle} - n_{AB}^{\langle ib\rangle}v_{AB}^c) +$$

$$2n_{AB}^{\langle i}v_{AB}^{b\rangle}v_{AB}^c - 2v_{AB}^i v_{AB}^{\langle b}n_{AB}^{c\rangle} + 2\varepsilon_{ibf}\varepsilon_{cde}n_{AB}^{\langle d}v_{AB}^{f\rangle}v_{AB}^e\Big]\Big\} +$$

$$\frac{3GM^B}{c^2 r_{AB}^3}\overset{(1)}{M}{}^A_{be}\Big(n_{AB}^{\langle ie\rangle}v_{AB}^b - v_{AB}^i n_{AB}^{\langle be\rangle} - \varepsilon_{ibc}\varepsilon_{def}v_{AB}^f n_{AB}^{\langle cd\rangle}\Big) +$$

$$\frac{45G^2}{4c^2 r_{AB}^7}M^B M^A_{bc}\Big\{M^A_{b_1b_2}\Big[n_{AB}^{\langle ibc\rangle b_1b_2}\Big(-\frac{29}{9} + \frac{34M^B}{3M^A}\Big) +$$

$$\frac{4}{3}\Big(1-\frac{4M^B}{M^A}\Big)n_{AB}^{\langle ib\rangle}n_{AB}^{\langle cb_1b_2\rangle} + \frac{4}{3}\Big(1-\frac{M^B}{M^A}\Big)\varepsilon_{ibg}\varepsilon_{cfd}n_{AB}^{\langle db_1b_2\rangle}n_{AB}^{\langle gf\rangle}\Big] +$$

$$
\begin{aligned}
&M_{A}^{b_1\langle i} n_{AB}^{bc\rangle b_1}\Big(1-\frac{4M^B}{5M^A}\Big)\Big\} + \frac{9G^2M^B}{c^2 r_{AB}^7 M^A} M^B M^A_{b_1b_2}\Big(\frac{4}{3} M^A_{ic} n_{AB}^{\langle cb_1b_2\rangle} + \\
&\frac{6}{5} M^A_{ib_1} n_{AB}^{b_2}\Big) - \frac{45GM^B}{c^2 r_{AB}^6 M^A} M^A_{id}M^A_{bc}\Big[-21\, n_{AB}^{\langle bd}v_{AB}^{c\rangle}(\boldsymbol{n}_{AB}\circ \boldsymbol{v}_{AB}) + \\
&\frac{63}{2} n_{AB}^{\langle bdc\rangle}(\boldsymbol{n}_{AB}\circ \boldsymbol{v}_{AB})^2 - \frac{7}{2} n_{AB}^{\langle bdc\rangle}v_{AB}^2 + \frac{2}{5} n_{AB}^{\langle b}v_{AB}^d v_{AB}^{c\rangle}\Big],
\end{aligned}
\tag{25}
$$

$$
\begin{aligned}
f_i^A(Q^A\times S^B) \equiv\ & \frac{15G}{c^2 r_{AB}^5} M^A_{bc} S^B_d \Big\{4 n^{AB}_{\langle ib}\varepsilon_{c\rangle de} v^e_{AB} - 7\, n_{AB}^{\langle ibc\rangle f}\varepsilon_{def}v^e_{AB} + 2 n^{AB}_{e\langle i} v^{AB}_b \varepsilon_{c\rangle de} - \\
&7(\boldsymbol{v}_{AB}\circ \boldsymbol{n}_{AB}) n^{AB}_{e\langle ib}\varepsilon_{c\rangle de} + 2\varepsilon_{ibe}\Big[v_{AB}^{\langle c}n_{AB}^{de\rangle} - \frac{7}{3}(\boldsymbol{v}_{AB}\circ \boldsymbol{n}_{AB}) n_{AB}^{\langle cde\rangle}\Big]\Big\} + \\
&\frac{15G}{c^2 r_{AB}^4} \overset{(1)}{M}{}^A_{be} S^B_d \varepsilon_{ibc} n_{AB}^{\langle cde\rangle},
\end{aligned}
\tag{26}
$$

$$
\begin{aligned}
f_i^A(Q^A\times Q^B) \equiv\ & -\frac{945G}{4r_{AB}^6}M^A_{bc}M^B_{de} n_{AB}^{\langle ibcde\rangle} + \frac{45G^2}{c^2 r_{AB}^7} M^B_{b_1b_2}M^A_{cd}\Big[21(M^B-M^A) n_{AB}^{\langle ib_1b_2cd\rangle} + \\
&\frac{7}{3} M^A n_{AB}^{\langle ib_1cd\rangle b_2} + \frac{7}{9} n_{AB}^{\langle b_1b_2cd\rangle i}\Big(M^B - \frac{7}{8} M^A\Big) + \\
&\frac{1}{3} n_{AB}^{\langle ib_1b_2\rangle cd}\Big(M^B+\frac{19}{8}M^A\Big) + \Big(M^B - \frac{107}{24}M^A\Big) n_{AB}^{\langle icd\rangle b_1b_2} - \\
&\frac{3}{4} n_{AB}^{\langle ib_1\rangle} n_{AB}^{\langle b_2cd\rangle} M^A + \frac{1}{3}(M^A-M^B)\Big(n_{AB}^{\langle cb_1b_2\rangle} n_{AB}^{\langle id\rangle} + \\
&\varepsilon_{icg}\varepsilon_{dfb} n_{AB}^{\langle bb_1b_2\rangle} n_{AB}^{\langle gf\rangle} + \frac{7}{3} n_{AB}^{\langle dib_1b_2\rangle c} + \frac{7}{3} \varepsilon_{icg}\varepsilon_{dfb} n_{AB}^{\langle gfb_1b_2\rangle b}\Big)\Big] + \\
&\frac{15G^2}{c^2 r_{AB}^7} M^A M^A_{be}\Big[-4\Big(\frac{16}{15} M^B_{ic} n_{AB}^{\langle cbe\rangle} + \frac{19}{4} M_B^{b_1\langle i} n_{AB}^{beb_1\rangle} - \frac{2}{5} M_B^{\langle ib} n_{AB}^{e\rangle}\Big) + \\
&\frac{4}{15}(M^B_{bg} n_{AB}^{\langle eig\rangle} + \varepsilon_{ibc}\varepsilon_{efd} n_{AB}^{\langle cfg\rangle} M^B_{dg}) + \frac{3}{25}(n^i_{AB} M^B_{be} - n^b_{AB}M^B_{ie} + \\
&\varepsilon_{ibc}\varepsilon_{efd} n^f_{AB} M^B_{de}) - M^B_{b_1g}(n_{AB}^{\langle bg\rangle} n_{AB}^{\langle eib_1\rangle} - n_{AB}^{\langle ig\rangle} n_{AB}^{\langle beb_1\rangle} + \varepsilon_{ibc}\varepsilon_{efd} n_{AB}^{\langle dg\rangle} n_{AB}^{\langle cfb_1\rangle})\Big] + \\
&\frac{945G}{2c^2 r_{AB}^6} M^A_{bc} M^B_{b_1b_2}\Big[-\frac{3}{4}(\boldsymbol{v}_A\circ \boldsymbol{n}_{AB}) n_{AB}^{b_1b_2\langle ib} v_A^{c\rangle} + \frac{1}{6} v_A^{\langle i} v_A^b n_{AB}^{c\rangle b_1b_2} + \\
&\frac{1}{6} v_A^{\langle i} n_{AB}^{bc\rangle b_1} v_A^{b_2} + \frac{1}{2} n_{AB}^{b_1b_2\langle ib} v_A^{c\rangle}(\boldsymbol{v}_B\circ \boldsymbol{n}_{AB}) - \frac{1}{9} n_{AB}^{b_1\langle ib} v_A^{c\rangle} v_B^{b_2} - \frac{1}{9} v_A^{\langle i} v_B^b n_{AB}^{c\rangle b_1b_2} - \\
&\frac{4}{9} v_{AB}^{\langle i} v_{AB}^b n_{AB}^{c\rangle b_1b_2} - \frac{4}{9} v_{AB}^{\langle i} n_{AB}^{bc\rangle b_1} v_{AB}^{b_2} + 2(\boldsymbol{n}_{AB}\circ \boldsymbol{v}_{AB}) n_{AB}^{b_1b_2\langle ib} v_{AB}^{c\rangle} - \\
&\frac{8}{27} n_{AB}^{\langle cib_1} v_{AB}^{b_2\rangle} v_{AB}^b + \frac{8}{27} n_{AB}^{\langle cbb_1} v_{AB}^{b_2\rangle} v_{AB}^i - \frac{8}{27}\varepsilon_{ibe}\varepsilon_{cfd} v_{AB}^d n_{AB}^{\langle efb_1} v_{AB}^{b_2\rangle} + \\
&\frac{2}{3}(\boldsymbol{n}_{AB}\circ \boldsymbol{v}_{AB})(n_{AB}^{\langle cib_1b_2\rangle} v_{AB}^b - n_{AB}^{\langle cbb_1b_2\rangle} v^i_{AB} + \varepsilon_{ibe}\varepsilon_{cfd} n_{AB}^{\langle efb_1b_2\rangle} v^d_{AB})\Big] + \\
&\frac{945G}{2c^2 r_{AB}^6} M^A_{bc}\Big[(\boldsymbol{v}_A\circ \boldsymbol{n}_{AB})\Big(\frac{1}{3} M_B^{b_1\langle i} v_A^b n_{AB}^{c\rangle b_1} - \frac{8}{9} M_B^{b_1\langle i} v_{AB}^b n_{AB}^{c\rangle b_1} - \frac{1}{42} M_B^{\langle ib} v_A^{c\rangle} +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left.\frac{4}{63}M_B^{\langle ib}v_{AB}^{c\rangle}\right)+(\boldsymbol{v}_B\circ\boldsymbol{n}_{AB})\left(\frac{40}{63}M_B^{b_1\langle i}v_{AB}^{b}n_{AB}^{c\rangle b_1}-\frac{2}{9}M_B^{b_1\langle i}v_A^{b}n_{AB}^{c\rangle b_1}+\right.\\
&\left.\frac{1}{63}M_B^{\langle ib}v_A^{c\rangle}+\frac{4}{21}M_B^{\langle ib}v_{AB}^{c\rangle}\right)-\frac{1}{21}M_B^{b_1\langle i}v_A^{b}v_A^{c\rangle}n_{AB}^{b_1}-\frac{1}{21}M_B^{b_1\langle i}v_A^{b}n_{AB}^{c\rangle}v_A^{b_1}+\\
&\frac{2}{63}M_B^{b_1\langle i}v_A^{b}n_{AB}^{c\rangle}v_B^{b_1}+\frac{2}{63}M_B^{b_1\langle i}v_A^{b}v_B^{c\rangle}n_{AB}^{b_1}+\frac{8}{63}M_B^{b_1\langle i}v_{AB}^{b}n_{AB}^{c\rangle}v_{AB}^{b_1}+\\
&\left.\frac{8}{63}M_B^{b_1\langle i}v_{AB}^{b}v_{AB}^{c\rangle}n_{AB}^{b_1}\right]-\frac{45G^2}{2c^2r_{AB}^7}M^BM_{b_1b_2}^{A}M_{cd}^{B}\left(n_{AB}^{\langle ib_1b_2\rangle cd}+\frac{21}{2}n_{AB}^{\langle ib_1b_2cd\rangle}\right)+\\
&\frac{945G}{4c^2r_{AB}^6}M_{b_1b_2}^{A}M_{cd}^{B}\left(v_A^2n_{AB}^{\langle ib_1b_2cd\rangle}+\frac{1}{2}v_A^in_{AB}^{\langle b_1b_2cd\rangle}(\boldsymbol{v}_A\circ\boldsymbol{n}_{AB})-\frac{2}{9}v_A^in_{AB}^{\langle b_1b_2c}v_A^{d\rangle}\right).
\end{aligned}
\tag{27}
$$

4 结果分析和讨论

(1)如果忽略相对论四极矩-四极矩项，我们得到的运动方程和须重明，吴雪君和 Schafer 的文章[15]结果完全一致．如果总自旋和四极矩等于零，等式(18)仅剩下的 $f_i^A(M^A\times M^B)$ 部分，正好是 Lorentz-Droste(-Einstein-Infeld-Hoffmann)运动方程对两体的情况．如果仅仅四极矩等于零，等式(18)有四部分保留了下来，即 $f_i^A(M^A\times M^B)+f_i^A(M^A\times S^B)+f_i^A(S^A\times S^B)+f_i^A(S^A\times M^B)$，这和 DSXII 中 $N=2$ 的情况结果一致．

(2)适用于两体问题的等式(18)很容易展成 N 体的运动方程，只要加上一些求和符号并改变一下指标．

(3)我们的工作不仅是在形式上进行了推广，而且有实用意义，例如可以用来讨论引力波的高频源——双中子星的结合，虽然我们不能直接利用(18)式来讨论紧密结合的双中子星问题本身，因为这仅仅是一阶后 Newton 方程，没有包含引力辐射阻尼，但是包含相对论四极矩的项对双中子星结合的研究有重要贡献．最近 Apostolatos 等[3]对结合双星讨论了自旋引起的岁差和相关的引力波波形的改变，他们的"自旋轨道力"这一项也是一阶后 Newton 的，并且结论非常有价值．为了更进一步精确处理紧密结合的双中子星的问题，四极矩项应该计算在内，特别是相对论需达到更高的阶．因为有许多项和四极矩有关，因此对结合双星的影响比较复杂．

(4)仅仅当提供了四极矩项的演化方程时，(13)和(18)式才能完整地解出，然而四极矩项的演化方程将与所取的模型有关，与星体的物态方程有关，这个问题有待更进一步研究．

参　考　文　献

1　Thorne K S. Gravitational waves. Particle physics astrophysics and cosmology. In：Chan J, Deporcel L, eds. Standford CA (USA). 1996. 41～70

2　Abramovici A, Althouce W E, Drever R W P, et al. LIGO：The laser interferometer gravitational wave observatory. Science, 1992, 256：325～333

3　Apostolatos T A, Cutler C, Sussman G J, et al. Spin-induced orbital precession and its modulation of the gravitational waveforms from merging binaries. Phys Rev, 1994, D49：6 274～6 296

4　Mochkovitch R, Hernanz M, Isern J. Gamma-ray bursts from relativistic beams in neutron star mergers. Astron Astrophys, 1995, 293：803～809

5 Rasio F A, Shapiro S L. Hydrodynamics of binary coalescence. Astrophys J, 1994, 432: 242～261
6 Damour T. The problem of motion in Newtonian and Einsteinian gravity. In: Hawking S W, Israel W, eds. 300 Years of Gravitation. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1987. 128～198
7 Lai D, Rasio F A, Shapiro S L. Hydrodynamics of rotating stars and close binary interaction. Astrophys J, 1994, 437: 742～769
8 Barker B M, O' Connel R F. Gravitational two-body problem with arbitrary masses, spins and quadrupole moments. Phys Rev, 1975, D12: 329～335
9 Dixon W G. Isolated gravitating systems in general relativity. In: J Ehlers, ed. 67th Enrico Fermi School, Varenna, Italy, 1976. Amsterdam: North-Holland, 1979. 156～219
10 Thorne K S, Hartle J B. Lows of motion and precession for black hole and other bodies. Phys Rev, 1985, D31: 1 815～1 837
11 Damour T, Soffel M, Xu C. General-relativistic celestial mechanics I. Method and definition of reference systems. Phys Rev, 1991, D43: 3 273～3 307
12 Damour T, Soffel M, Xu C. General-relativistic celestial mechanics II. Translational equation of motion. Phys Rev, 1992, D45: 1 017～1 044
13 Damour T, Soffel M, Xu C. General-relativistic celestial mechanics III. Rotational equation of motion. Phys Rev, 1993, D47: 3 124～3 135
14 Damour T, Soffel M, Xu C. General-relativistic celestial mechanics IV. Theory of satellite motion. Phys Rev, 1994, D49: 618～635
15 Xu C, Wu X, Schäfer G. Binary systems with monopole, spin and quadrupole moments. Phys Rev, 1997, D55: 528～539