

结合点云随机模型的高效球面拟合方法

王 伟¹, 齐志军^{1*}, 朱东辉^{2,3}, 程文杰¹, 刘增泉¹

- (1. 深圳综合粒子设施研究院, 广东 深圳 518107;
2. 中国科学技术大学 国家同步辐射实验室, 安徽 合肥 230029;
3. 重庆大学 超瞬态装置实验室, 重庆 400044)

摘 要: 在进行点云球面拟合并考虑点云随机模型时, 需要建立非线性高斯赫尔默特模型 (Gauss-Helmert model, GHM), 使用附有参数的条件平差方法解算球面参数, 其精度优于现有的几何拟合和代数拟合方法。然而, 该方法在处理大量点云数据时, 需要进行大型矩阵求逆运算, 面临着较大的计算负担。针对该问题, 将所有的球面点云数据分为若干个独立的子集, 序贯更新参数的估计值, 改进的方法在求解参数过程中显著减少了求逆矩阵的维度。通过实验验证了文中算法的结果和基于 GHM 的方法是一致的, 均方根误差小于已有的几何拟合和代数拟合方法, 同时文中算法消耗时间不足基于 GHM 方法的 2%, 球面估计效率显著提升。

关键词: 激光点云; 球面拟合; 算法效率; 分组策略; 随机模型

中图分类号: TP391.4 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3788/IRLA20240340

0 引 言

受限于物体的遮挡和范围的限制, 激光扫描仪需要进行多站测量, 将不同视角下的点云配准到统一坐标系^[1]。球面物体在空间上具有各向同性, 可以通过标靶球拟合球面点云, 使用其球心坐标进行坐标转换, 球心的拟合精度直接影响了点云配准的可靠性。除此之外, 球面拟合在仪器的校准^[2]和激光跟踪仪的自标定^[3]等模型中均有广泛的应用。

使用激光扫描仪观测球面得到点云数据后, 通过设置阈值剔除粗差点^[4]或者采用稳健估计方法, 如稳健最小截断二乘方法^[5]或者 MSAC(M-estimate sample consensus) 算法^[6], 得到不含粗差的球面点云数据。若假设所有点云坐标均是等权独立的, 可以使用最小二乘准则进行球面拟合, 根据是否需要迭代求解可以分为闭式解和迭代解^[7]。前者主要包括线性最小二乘方法和代数拟合方法^[8], 这种方法基于球面的代数方程进行求解, 没有实际的几何意义, 但计算效率上具有明显优势。后者最小化点到球面正交距离的平方

和^[9], 需要使用梯度优化方法迭代求解, 计算效率较低。

在笛卡尔坐标系下的坐标三个分量是由边长角度转换而来, 坐标分量之间存在相关性^[10], 几何和代数拟合方法均简化了点云协方差矩阵。为了考虑更加严密的随机模型, 需要建立球面拟合的非线性高斯赫尔默特模型 (Gauss-Helmert model, GHM), 使用附有参数的间接平差进行球面参数求解^[11-13], 其中协因数矩阵并非简单的对角矩阵, 三个坐标分量也不是等权的。文献^[7]系统对比了不同球面拟合方法的精度和计算效率, 结果表明基于 GHM 的方法精度优于其他默认等权的球面拟合方法。同时, 激光扫描仪的扫描密度很高, 得到的点云数量十分多, 使得基于 GHM 的方法运算时间明显多余其他对比方法, 难以满足对计算效率方面的需求^[14]。

造成附有参数的间接平差解算效率低下的主要原因是其需要进行大型矩阵求逆运算, 因为矩阵求逆的复杂度正比于矩阵维度的三次方^[15], 远高于矩阵的线性运算。文献^[16]在变量误差模型中通过分组策

收稿日期: 2024-09-01; 修订日期: 2024-10-09

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金项目 (42204047)

作者简介: 王伟, 男, 高级工程师, 硕士, 主要从事加速器准直和测量数据处理方面的研究。

通讯作者: 齐志军, 男, 助理工程师, 硕士, 主要从事精密工程测量和测量平差方面的研究。

略提高了点云平面拟合的效率,文中沿用这一策略,将所有球面点云进行分组采样,推导了点云球面拟合的序贯求解方法,有效降低了运算过程中矩阵维度,大幅减少了程序运行的时间。最后通过模拟实验和实测数据验证了文中算法的有效性。

1 球面拟合算法

1.1 基于 GHM 的球面拟合

使用激光扫描仪观测得到球面上的一系列点 (x_i, y_i, z_i) , 其中 $i = 1, 2, \dots, n$, 建立球面的 GHM 如下:

$$\begin{cases} g(\tilde{l}, \xi) = g(l - e, \xi) = 0 \\ e \sim N(0, \sigma_0^2 Q) \end{cases} \quad (1)$$

式中: ξ 是由球心 $c(x_0, y_0, z_0)$ 和半径 r 组成的待估向量, 即 $\xi = [x_0 \ y_0 \ z_0 \ r]^T$; l 是由所有观测点组成的 $3n \times 1$ 观测向量, 即 $l = [x_1 \ y_1 \ z_1 \ \dots \ x_n \ y_n \ z_n]^T$, 其对应的真值和随机误差记为 $\tilde{l}$ 和 e , σ_0^2 和 Q 分别为单位权方差和协因数矩阵。 $g(\cdot)$ 是非线性的球面函数模型, 其中第 i 个点的方程为:

$$g_i = (\tilde{x}_i - x_0)^2 + (\tilde{y}_i - y_0)^2 + (\tilde{z}_i - z_0)^2 - r^2 = 0 \quad (2)$$

图 1 为激光扫描仪的测量工作示意图, 其原理和激光跟踪仪^[17]类似, 在仪器坐标系 $o-xyz$ 中扫描得到原始观测值为水平角 φ , 竖直角 θ 和距离 d , 以仪器中心建立笛卡尔坐标系, 得到点 i 的三维坐标为:

$$\begin{cases} x_i = d_i \cos \theta_i \cos \varphi_i \\ y_i = d_i \cos \theta_i \sin \varphi_i \\ z_i = d_i \sin \theta_i \end{cases} \quad (3)$$

对公式 (3) 两边同时微分, 并应用协方差传播率得到点 i 在笛卡尔坐标系下的协因数矩阵^[18]:

$$Q_{ii} = C_i \text{diag} \left(\begin{bmatrix} \sigma_d^2 & \sigma_\theta^2 & \sigma_\varphi^2 \end{bmatrix} \right) C_i^T / \sigma_0^2 \quad (4)$$

式中: σ_0^2 是单位权方差。矩阵为:

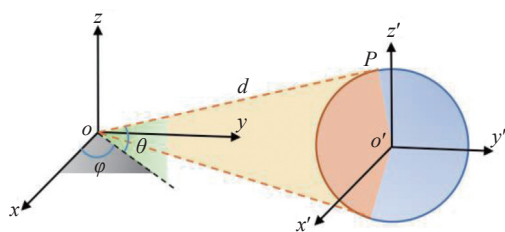


图 1 激光扫描仪测量示意图

Fig.1 Measurement diagram of laser scanner

$$C_i = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i \cos \theta_i & -d_i \sin \varphi_i \cos \theta_i & -d_i \cos \varphi_i \sin \theta_i \\ \sin \varphi_i \cos \theta_i & d_i \cos \varphi_i \cos \theta_i & -d_i \sin \varphi_i \sin \theta_i \\ \sin \theta_i & 0 & d_i \cos \theta_i \end{bmatrix}$$

σ_d^2 、 σ_θ^2 和 σ_φ^2 分别表示测距误差、竖直角误差和水平角误差, 可以从仪器手册中获得。由公式 (4) 计算出来的协方差矩阵并不是一个单位阵, 因此点位坐标并不是独立同分布的, 在拟合球面时需要考虑实际的随机模型^[11]。全部点位坐标对应的协因数矩阵是一个块对角矩阵, 其结构为:

$$Q = \text{blkdiag} \left(Q_{11} \ \dots \ Q_{nn} \right) \quad (5)$$

算法的输入是点云的三维直角坐标及其协因数矩阵 Q , 在误差加权平方和最小的准则下, 球面拟合问题可以表达为:

$$\min : e^T Q^{-1} e \text{ s.t. } g(l - e, \xi) = 0 \quad (6)$$

在近似值 (l^0, ξ^0) 处进行线性化, 使用拉格朗日乘数法得到参数改正数估计值 $\delta \xi$ 及其协因数矩阵 Q_ξ :

$$\delta \xi = \left[A^T (B Q B^T)^{-1} A \right]^{-1} A^T (B Q B^T)^{-1} w \quad (7)$$

$$Q_\xi = \left[A^T (B Q B^T)^{-1} A \right]^{-1} \quad (8)$$

式中: 系数矩阵 $A = -\partial g / \partial \xi^T \Big|_{(l^0, \xi^0)}$ 和 $B = \partial g / \partial l^T \Big|_{(l^0, \xi^0)}$ 的维度分别是 $n \times 4$ 和 $n \times 3n$, $w = g(l^0, \xi^0) + B(l - l^0)$, 矩阵的结构组成和详细推导过程可以参考文献 [11-12]。该模型是非线性的, 需要迭代求解, 退出迭代的条件设置为向量 $\delta \xi$ 的 2 范数小于给定的阈值 ε , 最后得到参数估计值为 $\hat{\xi} = \xi^0 + \delta \xi$ 。

文献 [7] 系统比较了几种球面拟合方法, 实验结果表明了基于 GHM 的方法优于其他传统的球面拟合方法。然而, 其运算时间也明显大于其他算法, 极大限制该算法的实际应用。

为了更好地记录三维场景的细节, 激光扫描仪点位密度相对比较高, 能在短时间内得到大量的坐标观测值。例如, 激光扫描仪测量距离为 2 m 左右、半径为 7.25 cm 的标靶球, 能够得到超过数以千计的坐标数据。当使用如公式 (7) 所示的方案进行求解时, 需要涉及大型矩阵求逆运算, 特别是矩阵 $(B Q B^T)^{-1}$ 的运算。而矩阵求逆的时间复杂度正比于矩阵维度的三次方, 当观测点数量增加到原先的 10 倍, $(B Q B^T)^{-1}$ 消耗的时间将是原先的 1000 倍。一种可行的方案就是通过降采样减少点位数量^[19], 但是减少正常观测值数

量也会增加参数的方差。虽然基于 GHM 的球面拟合方法能够顾及到更加严密的随机模型,但是糟糕的运算效率极大地阻碍了其实际应用。

1.2 球面拟合的高效序贯求解方法

通过分组策略提升点云平面拟合效率^[16]是有效的,文中借鉴这一策略,将所有的球面坐标数据分为 v 个子集,对应函数模型为:

$$\begin{cases} g_1(l_1 - e_1, \xi) = 0 \\ \vdots \\ g_i(l_i - e_i, \xi) = 0 \\ \vdots \\ g_v(l_v - e_v, \xi) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

式中:第 $i(i=1, \dots, v)$ 个子集 l_i 包含的点云数量为 n_i ,其对应的协因数矩阵记为 Q_i ,展开后的相关矩阵和向量分别记为 A_i 、 B_i 和 w_i 。每个观测值只属于其中一个子集,那么满足 $\sum_{i=1}^v n_i = n$ 。同一点的三个坐标分量存在相关性,点和点之间是协因数为零,因此不同子集之间是独立的。

为了简化表达,令 $Q_{B_i} = B_i Q_i B_i^T$,以前两个子集为例,探究参数估计值的递推关系。第一个子集的估计结果为:

$$\delta \hat{\xi}_1 = (A_1^T Q_{B_1}^{-1} A_1)^{-1} A_1^T Q_{B_1}^{-1} w_1 \quad (10)$$

$$Q_{\hat{\xi}_1} = (A_1^T Q_{B_1}^{-1} A_1)^{-1} \quad (11)$$

前两个子集的参数及其协因数矩阵为:

$$\delta \hat{\xi}_2 = (A_1^T Q_{B_1}^{-1} A_1 + A_2^T Q_{B_2}^{-1} A_2)^{-1} (A_1^T Q_{B_1}^{-1} w_1 + A_2^T Q_{B_2}^{-1} w_2) \quad (12)$$

$$Q_{\hat{\xi}_2} = (Q_{\hat{\xi}_1}^{-1} + A_2^T Q_{B_2}^{-1} A_2)^{-1} \quad (13)$$

将公式 (10) 和公式 (11) 代入公式 (12) 并化简为:

$$\delta \hat{\xi}_2 = (Q_{\hat{\xi}_1}^{-1} + A_2^T Q_{B_2}^{-1} A_2)^{-1} (Q_{\hat{\xi}_1}^{-1} \delta \hat{\xi}_1 + A_2^T Q_{B_2}^{-1} w_2) \quad (14)$$

综合公式 (13), 对公式 (14) 进行化简得到:

$$\delta \hat{\xi}_2 = \delta \hat{\xi}_1 + Q_{\hat{\xi}_2} A_2^T Q_{B_2}^{-1} (w_2 - A_2 \delta \hat{\xi}_1) \quad (15)$$

由于 $Q_{\hat{\xi}_2}$ 包含了未知参数,还需要进一步化简,由公式 (13) 得到:

$$Q_{\hat{\xi}_1}^{-1} = Q_{\hat{\xi}_2}^{-1} - A_2^T Q_{B_2}^{-1} A_2 \quad (16)$$

对公式 (16) 左乘 $Q_{\hat{\xi}_2}$ 并右乘 $Q_{\hat{\xi}_1}$ 得到:

$$Q_{\hat{\xi}_2} = Q_{\hat{\xi}_1} - Q_{\hat{\xi}_2} A_2^T Q_{B_2}^{-1} A_2 Q_{\hat{\xi}_1} \quad (17)$$

对公式 (13) 应用矩阵反演公式^[15] 则有:

$$Q_{\hat{\xi}_2} = (Q_{\hat{\xi}_1}^{-1} + A_2^T Q_{B_2}^{-1} A_2)^{-1} = Q_{\hat{\xi}_1} - Q_{\hat{\xi}_1} A_2^T (Q_{B_2} + A_2 Q_{\hat{\xi}_1} A_2^T)^{-1} A_2 Q_{\hat{\xi}_1} \quad (18)$$

对比公式 (17) 和 (18), 可知在公式 (15) 中的矩阵满足:

$$Q_{\hat{\xi}_2} A_2^T Q_{B_2}^{-1} = Q_{\hat{\xi}_1} A_2^T (Q_{B_2} + A_2 Q_{\hat{\xi}_1} A_2^T)^{-1} \quad (19)$$

根据上述推导, 拓展到更加一般的情况, 则参数估计值存在以下递推关系:

$$\delta \hat{\xi}_{i+1} = \delta \hat{\xi}_i + G_i l_i \quad (20)$$

式中: $G_i = Q_{\hat{\xi}_i} A_{i+1}^T (Q_{B_{i+1}} + A_{i+1} Q_{\hat{\xi}_i} A_{i+1}^T)^{-1}$, $l_i = w_{i+1} - A_{i+1} \delta \hat{\xi}_i$ 。

相比较于公式 (7), 序贯求解的方法涉及的矩阵维度明显减小。对于包含 1000 个球面坐标的点云数据, 基于 GHM 的解法中矩阵求逆的复杂度为 $O(1000^3)$, 若将其分为 20 组, 那么矩阵求逆的复杂度降为 $O(50^3)$ 。虽然计算过程引入了一些额外的辅助矩阵, 但是计算效率还是能够显著提升。

1.3 算法步骤

由于 GHM 是非线性的, 文中算法需要进行迭代求解。参数初值可以由不在一个平面上的四点或者代数拟合方法获得, 获得在一次迭代过程中需要进行 $v-1$ 次递推更新得到 $\delta \hat{\xi}_{i+1}$, 以 $\delta \hat{\xi}_{i+1}$ 作为下一次迭代初值。设置 j 记录迭代的次数, ε 为退出迭代的阈值, 具体步骤如下所示。

1) 初始化: 将观测值分为 v 组, 初始迭代次数何参数估计值分别记为 $j=1$ 和 $(x^0)^j$ 。2) 开始迭代: (a) 根据 $(x^0)^j$ 更新相关矩阵和向量, 并估计第一组结果 $\delta \hat{x}_1^j$; (b) 根据公式 (19) 进行 $v-1$ 次迭代得到 $\delta \hat{x}_i^j$; (c) $(x^0)^{j+1} = (x^0)^j + \delta \hat{x}_v^j$ 并且 $j=j+1$; (d) 如果 $\|\delta \hat{x}_v^{j-1}\| < \varepsilon$, 退出迭代。3) 输出: 参数估计结果 $\hat{x} = (x^0)^{j-1} + \delta \hat{x}_v^{j-1}$ 。

2 实验与分析

2.1 模拟实验

在三维直角坐标系中, 位于原点的仪器观测一个球面, 其方程为 $(x-6)^2 + y^2 + z^2 = 1^2$, 即参数真值分别为 $x_0 = 6$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ 和 $r = 1$ 。由于仪器不能从一个位置扫描得到一个完整的球面, 设置了三种 x 坐标的范围模拟不同点云覆盖率 η : 1) 当 $x < 6$ 时, $\eta = 50\%$; 2) 当 $x < 5.8$ 时, $\eta = 40\%$; 3) 当 $x < 5.6$ 时, $\eta = 30\%$ 。采

用均匀分布产生 $n = 1\,000$ 个球面上的点, 通过点位坐标和激光跟踪仪的位置反算出边长角度的原始观测值。为了突出随机模型对参数的影响, 添加标准差为 0.01 的距离观测误差和 $3'$ 的测角误差。根据极坐标

和笛卡尔坐标的转换, 模拟出球面点云的坐标观测值, 其中一次模拟实验中不同覆盖率的点云分布结果如图 2 所示。

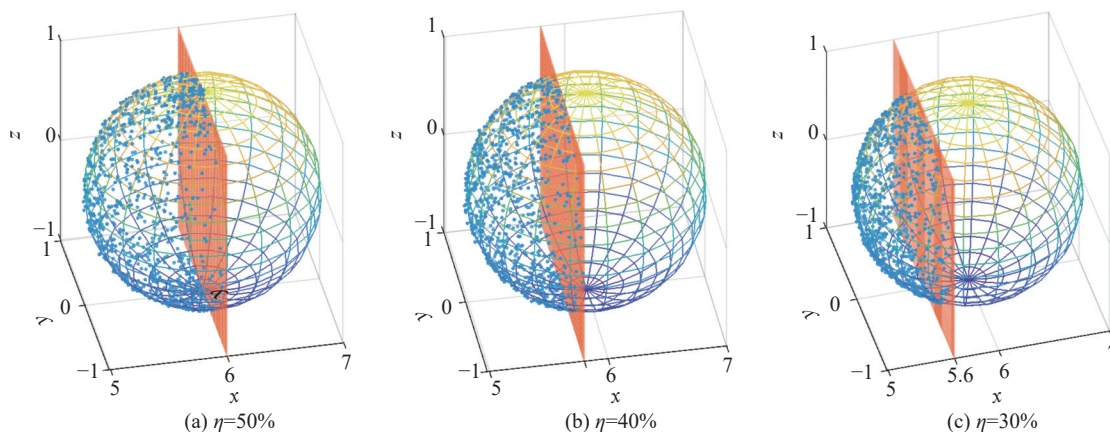


图 2 不同覆盖率的点云分布图

Fig.2 Distribution of point cloud with different coverage rates

为了避免随机误差对结果的干扰, 重复实验 $N = 1\,000$ 次, 分别采用下列五种方案得到参数。方案 1: 采用线性最小二乘算法; 方案 2: 基于高斯牛顿优化的几何拟合方法, 其最小化点到球面的正交距离平方和; 方案 3: 基于 Hyper 的代数拟合方法^[20]; 方案 4: 基于 GHM 的方法, 如 1.1 节所示; 方案 5: 文中序贯求解方法, 参考了高效的平面拟合方法^[16], 将所有的观测值随机采样 20 次, 每次采样 50 个坐标数据。方案 1~3 默认所有坐标是等权独立的, 方案 4 和 5 使用如公式 (4) 所示的随机模型。所有需要迭代方案的参数初值为 Hyper 拟合方法的结果, 收敛条件均设置为 $\varepsilon = 10^{-10}$, 五种方案均在同一台电脑上运行。表 1 记录了四种方案在不同覆盖率下的迭代次数 j 和运行时间 t , 并分别统计球心和半径的均方根误差, 计算公式如下:

$$\sigma_{\hat{\mathbf{c}}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{x}_0^i - x_0)^2 + (\hat{y}_0^i - y_0)^2 + (\hat{z}_0^i - z_0)^2} \quad (21)$$

$$\sigma_{\hat{r}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{r}^i - r)^2} \quad (22)$$

从表 1 中可以看出: 1) 对于任一方案, 点云覆盖率越低, 球面拟合精度越低。较低的覆盖率会增加需要迭代运算方案的迭代次数, 从而增加了运算时间,

更高的球面点云覆盖率有利于提高估计精度和减少迭代次数; 2) 代数拟合方法和线性最小二乘方法无需迭代, 在计算效率上具有显著的优势。然而这两种方案目标函数均没有实际物理含义, 参数均方根误差明显大于其他方案, 可以应用于对精度要求不高的球面拟合问题。几何拟合方法最小化正交距离平方和并且需要迭代计算, 其均方根误差指标好于无需迭代的

表 1 不同算法的统计结果

Tab.1 Statistical results for different algorithms

η	Scheme	$\sigma_{\hat{\mathbf{c}}}/10^{-3}$	$\sigma_{\hat{r}}/10^{-3}$	j	t/s
50%	1	11.359	4.126	1	0.002
	2	8.853	2.920	3	0.015
	3	9.762	3.295	1	0.003
	4	6.826	2.421	4	1.633
	5	6.826	2.421	4	0.021
40%	1	11.601	4.592	1	0.002
	2	9.562	3.140	3	0.017
	3	10.325	3.521	1	0.003
	4	7.711	2.649	6	2.372
	5	7.711	2.649	6	0.034
30%	1	12.452	4.940	1	0.002
	2	9.923	3.316	4	0.026
	3	11.496	3.773	1	0.004
	4	8.539	2.844	7	2.840
	5	8.539	2.844	7	0.037

方案; 3) 方案 4 和 5 的统计结果是一样的, 因为它们
的数学模型和目标函数是一致的。基于 GHM 球面拟
合方法的均方根误差约为几何拟合方案的 76%~
85%, 这是因为该方法使用严密的随机模型, 参数统
计结果更优; 4) 文中算法的计算时间仅为方案 3 的
1.29%~1.43%, 极大提高了基于 GHM 模型球面拟合
的效率, 这是因为方案 3 需要计算 1000 维度矩阵的
逆, 而文中算法涉及到的求逆矩阵维度仅为 50, 极大
地减少了矩阵求逆的运算时间。

在覆盖率为 50% 的情况下, 保持以上的设置不
变, 进一步增加点云的数量, 探究两种基于 GHM 的
算法运算时间和点云数量的关系, 其结果如图 3 所
示。文中算法的耗时仍然远低于方案 3, 其运行时间
的差异保持在两个量级左右。例如当观测值数量等于
4000 时, 方案 3 和 4 分别耗时 80.76 s 和 0.89 s。

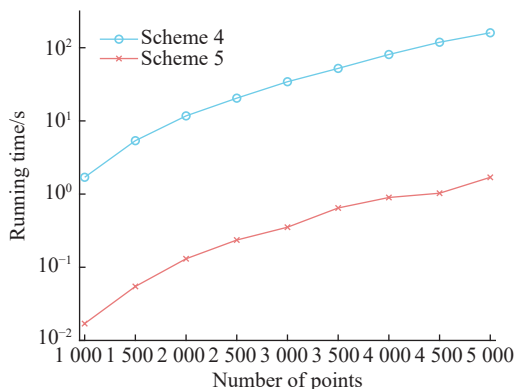


图 3 两种方案的运行时间

Fig.3 Running time for two schemes

2.2 实测实验

上述实验证明了考虑更加严密随机模型的球面
拟合方法能够提高拟合的精度, 通过实测数据进一
步验证文中算法的效率提升结果。选择利用 FARO
Focus3D X330 激光扫描仪观测同济大学模型
中^[21] 的五个半径为 7.25 cm 靶球点云数据, 点云分布
如图 4 所示, 仪器的测距和测角精度分别为 2 mm 和
32.4"。首先使用 CloudCompare 中的球面探测功能筛
选出大致的球面点云, 进一步通过稳健截断最小二乘
算法^[5] 剔除粗差数据, 保持迭代初值和收敛阈值均不
变, 使用方案 3 和 4 解算球心半径参数, 其中方案
4 随机采样 20 次, 前 19 次采样数量为 $\lceil n/20 \rceil$ ($\lceil \cdot \rceil$ 为向
上取整符号), 最后一次采样点云数量可略少。两种
方案的球心 $\hat{c}$ 和半径 $\hat{r}$ 估计值及其运行时间如表 2 所
示。

从表 2 中可以看出, 点云数量越多, 两种算法耗
时均有所增加。文中算法的估计结果和基于 GHM 是
完全一致的, 验证了通过序贯求解能获得和原先一样
的估计结果。当靶球点云数量增加时, 两种算法的运
行时间均有所增加。但是两种算法的效率差异十分
显著, 文中算法的消耗时间仅为方案 3 的 0.98%~
1.74%, 说明通过分组能够减少大型矩阵求逆时间。

进一步探索方案 5 运行时间和采样次数之间的
关系, 取编号 2 对应的靶球, 将其进行 k 次采样, k 的
取值范围为 10~100, 其他设置保持不变。不同采样次
数下算法的运行时间如图 5 所示。从图 5 中可以看
出, 随着分数数量增加, 运行时间总体上经历了先减少
后增

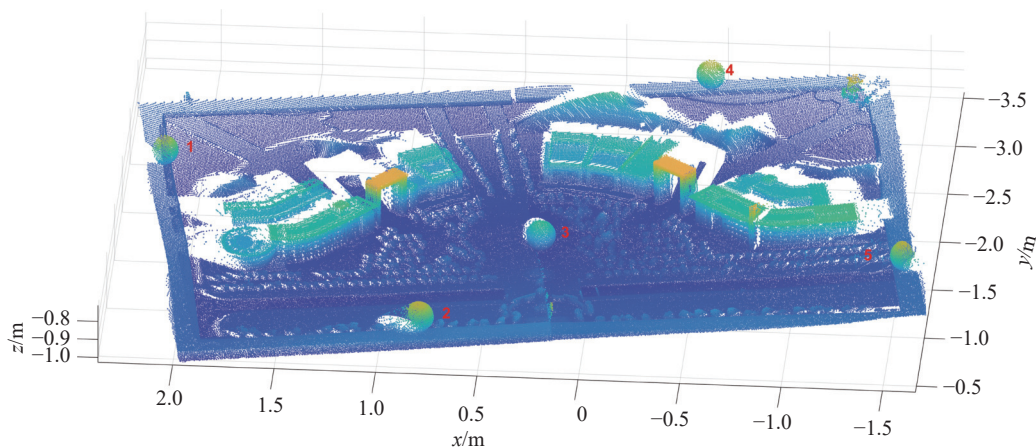


图 4 靶球点云分布图

Fig.4 Distribution of target ball point cloud

表 2 靶球点云中不同方案的统计结果

Tab.2 Statistical results for different algorithms for the target ball point cloud

Ball number	Number of points	Scheme 4			Scheme 5		
		$\hat{c}/m$	$\hat{r}/cm$	t/s	$\hat{c}/m$	$\hat{r}/cm$	t/s
1	965	2.1943	7.254	1.609	2.1943	7.254	0.020
		-2.3723			-2.3723		
		-0.8697			-0.8697		
		0.7951			0.7951		
2	3 721	-0.7229	7.243	67.723	-0.7229	7.243	0.663
		-0.8469			-0.8469		
		0.2838			0.2838		
		-1.7105			-1.7105		
3	2084	-0.9108	7.245	12.072	-0.9108	7.245	0.186
		-0.4312			-0.4312		
		-3.3282			-3.3282		
		-0.8586			-0.8586		
4	1 569	-1.5156	7.239	5.941	-1.5156	7.239	0.104
		-1.5244			-1.5244		
		-0.8508			-0.8508		
		-0.8508			-0.8508		

加的过程,最短的运行时间出现在分组数为 80 左右。这是因为过多的采样次数能够更好减少矩阵维度,但是也会增加程序递归计算量。定性而言,相较于基于 GHM 的解法,文中算法效率依旧有显著的提升。

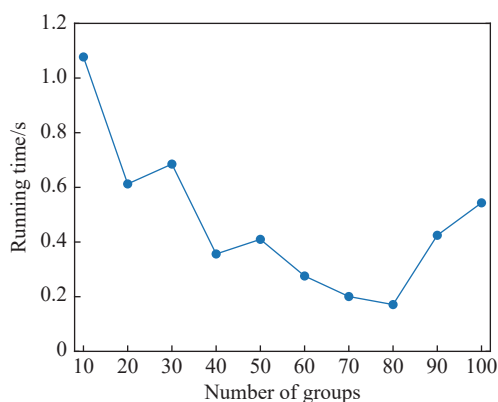


图 5 不同分组数下的运行时间

Fig.5 Runing time with different number of groups

3 结 论

通过激光扫描仪扫描球面物体能够得到大量的点云数据,并且配合稳健估计方法可以剔除粗差。在只含随机误差的观测值中,当需要顾及点云的随机模型求解球面参数时,基于 GHM 的球面拟合方法面临着巨大的计算负担。将所有的点云数据分为独立的

子集,减小了矩阵运算的维度,通过模拟和实测实验进行验证,算法效率提升超过了 50 倍,更好地适用于球面点云的参数估计。同时,矩阵维度减小,其空间复杂度相应减小,也相应降低了对硬件性能的要求。

当扫描的球面点云数据量不大时,也无需使用分组策略,可以直接进行参数求解。例如当点云数量少于 200 时,基于 GHM 的方法的运行时间不足 0.1 s,计算负担不大。当对球面参数的精度要求不高时,可以通过代数拟合方法得到参数的闭式解或者降采样的方法减少数据维度。

文中算法的随机模型主要考虑了测距和测角误差,实际情况中误差分布还会受到光束发散,物体反射率和扫描环境的影响,可以使用方差分量估计的方法得到更加准确的点云误差分布模型,这将进一步有利于提高拟合精度。同时,文中算法局限于球面点云,还可以深入研究其他几何图形快速拟合算法。

参考文献:

- [1] WANG Mingjun, YI Fang, LI Le, et al. Local neighborhood feature point extraction and matching for point cloud alignment [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2022, 51(5): 20210342. (in Chinese)
- [2] ARYAN A, BOSCHÉ F, TANG P. Planning for terrestrial laser scanning in construction: A review [J]. *Automation in Construction*, 2021, 125: 103551.
- [3] QI Zhijun, ZHU Donghui, LUO Tao, et al. A high-precision self-

- calibration method for laser tracker without common points [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2024, 53(2): 20230607. (in Chinese)
- [4] HE Jun, ZHANG Fumin, ZHANG Huadi, et al. Multilateral laser tracking system self-calibration method based on spherical center fitting [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2020, 49(8): 20190438. (in Chinese)
- [5] NURUNNABI A, SADAHIRO Y, LAEFER D F. Robust statistical approaches for circle fitting in laser scanning three-dimensional point cloud data [J]. *Pattern Recognition*, 2018, 81: 417-31.
- [6] SALEHI B, JARAHIZADEH S, SARAFRAZ A. An improved RANSAC outlier rejection method for UAV-derived point cloud [J]. *Remote Sensing*, 2022, 14(19): 4917.
- [7] SHI Y, ZHAO G, HU C, et al. Comparative study of the representative algorithms for fitting spherical target based on point cloud [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2022, 60: 5705616.
- [8] TANG H, ZHOU L, LIU Y, et al. Tiny hole inspection of aircraft engine nacelle in 3D point cloud via robust statistical fitting [J]. *Measurement*, 2022, 196: 111250.
- [9] HU Y, FANG X, QIN Y, et al. Weighted geometric circle fitting for the Brogar Ring: parameter-free approach and bias analysis [J]. *Measurement*, 2022, 192: 110832.
- [10] SHEN N, WANG B, MA H, et al. A review of terrestrial laser scanning (TLS)-based technologies for deformation monitoring in engineering [J]. *Measurement*, 2023, 223: 113684.
- [11] FANG X, HU Y, ZENG W, et al. Weighted least-squares fitting of circles with variance component estimation [J]. *Measurement*, 2022, 205: 112132.
- [12] SCHAFFRIN B, SNOW K. Total least-squares regularization of Tykhonov type and an ancient racetrack in Corinth [J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 2010, 432(8): 2061-2076.
- [13] ZHAO Zhisheng, CHEN Yu, WANG Bin. Point cloud fitting method using the nonlinear Gauss-Helmert model and robust estimation [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2024, 49(7): 1201-1211.
- [14] QIN Lili, LI Lijuan, REN Jiaojiao, et al. Adaptive sparse algorithm for terahertz time domain signals based on gradient threshold [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2023, 52(4): 20220443. (in Chinese)
- [15] ZHANG X. Matrix Analysis and Applications [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2017.
- [16] QI Zhijun, WANG Wei, ZENG Wenxian, et al. Efficient total least squares algorithm applied in the image registration and point cloud fitting [J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2024, 51(23): 240581. (in Chinese)
- [17] LUO Tao, QI Zhijun, WANG Wei, et al. Improved adjustment method applied in transformation of laser tracker [J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2024, 51(2): 0204001. (in Chinese)
- [18] WANG B, ZHAO Z, CHEN Y, et al. A novel robust point cloud fitting algorithm based on nonlinear Gauss-Helmert model [J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2023, 72: 1-12.
- [19] LU Zhuxing, GUO Jiming, SONG Dengsheng, et al. Study on the method of total least square fitting for 3D laser target sphere center [J]. *Bulletin of Survey and Mapping*, 2019(S2): 48-51. (in Chinese)
- [20] AL-SHARADQAH A, CHERNOV N. Error analysis for circle fitting algorithms [J]. *Electronic Journal of Statistics*, 2009, 3: 886-911.
- [21] WANG B, YU J, CHEN Y, et al. Efficient and robust solution to universal symmetric transformation for 3-D point sets [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2022, 60: 4708715.

An efficient spherical fitting method combined with the statistical model of point cloud

WANG Wei¹, QI Zhijun^{1*}, ZHU Donghui^{2,3}, CHENG Wenjie¹, LIU Zengquan¹

(1. Institute of Advanced Science Facilities, Shenzhen 518107, China;

2. National Synchrotron Radiation Laboratory, University of Science and Technology of China, Hefei 230029, China;

3. Laboratory for Ultrafast Transient Facility, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract:

Objectives Fitting spherical point clouds has a wide range of applications in the field of measurement, such as point cloud registration, instrument calibration, and laser tracker self-calibration. In the uncontaminated point cloud or the data processed by robust estimation, existing geometric and algebraic fitting methods use the identity matrix as the cofactor matrix, which ignores the correlation of point cloud coordinates. In order to consider the rigorous statistical models of the point cloud, the nonlinear Gauss-Helmert model (GHM) needs to be established for the iterative solution. The method based on GHM is verified to be more accurate than the existing methods, including geometric fitting and algebraic fitting. However, when estimating a large number of spherical point clouds, this method generates a serious computational burden.

Methods The spherical fitting method based on GHM requires large matrix inversion operations, which is the main reason for reducing the efficiency of the algorithm. Because the complexity of matrix inversion is the cube of its dimension. For example, when the number of observations doubles, the time consumed by matrix inversion will be 8 times the original operation. In order to reduce the dimension of the matrix, all point cloud coordinates are grouped in many subsets. Only the three coordinate components of the same point are correlated, so the point clouds of different groups are independent of each other. When the existing parameter estimators are fused with the unprocessed point cloud data, the center and radius parameters are updated sequentially. In the proposed method, the matrix dimension is significantly smaller than the existing spherical fitting method based on GHM, which will help reduce the running time of the algorithm.

Results and Discussions In the simulation experiment, we used five methods to fit 1 000 spherical points with different coverages (Fig.2), including geometric fitting, algebraic fitting, linear least squares, the method based on GHM, and the proposed method. All the observations are divided into 20 subsets randomly in the proposed method. The results of 1 000 Monte Carlo experiments show that high coverage will increase the accuracy and computational efficiency of the five schemes. The results of the algorithm based on the GH model and the proposed algorithm are consistent in the root mean square errors (RMSE) of the sphere center and radius, and both of them are better than the existing benchmarking methods. Therefore, it is necessary to consider the statistical models of the point cloud in spherical fitting. When the coverage is 50%, the average running time of the proposed method is only 0.021s, which is less than 1.633 s of the method based on the GH model (Tab.1). Our algorithm has significant superiority in efficiency compared with the method based on GHM in the different coverages. When the number of point clouds increases from 1 000 to 5 000, the running time of the proposed algorithm is much lower than that of the method based on GHM (Fig.3). Further experiment by the point cloud data of 5 target balls in the Tongji University model (Fig.4) shows that the time the proposed method consumes is only 0.98%-1.74% of the method based on the GH model (Tab.2). Different grouping strategies covering from 10

to 100 were tested for the second spherical point cloud. As the number of groups increases, the running time first decreases and then increases (Fig.5). Although more grouping can reduce the matrix dimension in the computation, it will increase the number of recursions. In general, the grouping strategy can still significantly improve the efficiency of the original algorithm by more than an order of magnitude.

Conclusions The efficiency of the algorithm is as important as its numerical performance. We derive a sequential solution based on the spherical fitting of the GH model, which reduced the matrix dimension and greatly increase the computation efficiency. The next step is to obtain a more rigorous statistical model by variance component estimation and fitting more geometric shapes.

Key words: laser point cloud; spherical fitting; algorithm efficiency; grouping strategy; statistical model

Funding projects: Young Scientists Fund of National Natural Science Foundation of China (42204047)