中国科学: 数学 2017 年 第 47 卷 第 2 期: 291～312
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS
论 文

扩展链 Gel'fand-Dikii 型方程族及其解

赵松林[1*], 冯玮[1], 沈守枫[1], 施英[2]

1. 浙江工业大学理学院应用数学系, 杭州 310023;
2. 浙江科技学院理学院数学系, 杭州 310023
E-mail: songlinzhao@zjut.edu.cn, wfeng@zjut.edu.cn, mathssf@zjut.edu.cn, yingshi@zust.edu.cn

收稿日期: 2015-07-11; 接受日期: 2015-10-13; 网络出版日期: 2016-08-03; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11301483, 11401529, 11371323 和 11501510) 资助项目

摘要 借助广义 Cauchy 矩阵方法, 本文给出扩展链 Gel'fand-Dikii (GD) 型方程族, 包括扩展链 GD 方程族和扩展修正链 GD 方程族. 这些方程族可用定义在特定点上的标量函数 $S^{(i,j)}$ 进行表示. 通过分析矩阵 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{K}'$ 的特征值结构, 本文得到扩展链 GD 型方程族的解. 这些解, 如孤子解和 Jordan 块解, 均含有 γ 个平面波因子.

关键词 扩展链 GD 型方程族 广义 Cauchy 矩阵方法 精确解

MSC (2010) 主题分类 39A14, 35Q51

1 引言

近期文献 [1–8] 表明, Sylvester 方程[9]

$$\boldsymbol{AM}-\boldsymbol{MB}=\boldsymbol{C} \tag{1.1}$$

与可积系统之间具有紧密联系. 在 (1.1) 中, $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 为已知矩阵, $\boldsymbol{M}$ 为未知矩阵. Cauchy 矩阵方法是构造链方程及其孤子解的强有力的工具之一 (参见文献 [10–13]). 该方法最早由 Nijhoff 等[10] 提出, 他们利用该方法构造了链 Korteweg-de Vries (KdV) 型方程和 Adler-Bobenko-Suris (ABS) 链方程[14] 的孤子解. 在该方法中, 他们引入了一个 Cauchy 型矩阵 $\boldsymbol{M}=(M_{i,j})_{N\times N}$ ($M_{i,j}=\frac{\rho_i c_j}{k_i+k_j}$) 满足 Sylvester 方程

$$\boldsymbol{KM}+\boldsymbol{MK}=\boldsymbol{r}\,{}^{t}\boldsymbol{c}, \tag{1.2}$$

其中 $\boldsymbol{K}=\mathrm{Diag}(k_1,k_2,\ldots,k_N)$; $\boldsymbol{r}=(\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_N)^{\mathrm{T}}$ 为已知平面波因子 $\rho_i=(\frac{p-k_i}{p+k_i})^n(\frac{q-k_i}{q+k_i})^m\rho_i^0$ 的列向量且 ${}^{t}\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\ldots,c_N)$ 为常数行向量. 通过引入标量函数 $S^{(i,j)}={}^{t}\boldsymbol{c}\boldsymbol{K}^j(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{M})^{-1}\boldsymbol{K}^i\boldsymbol{r}$ 和 $S(a,b)={}^{t}\boldsymbol{c}\,(b\boldsymbol{I}+\boldsymbol{K})^{-1}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{M})^{-1}(a\boldsymbol{I}+\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{r}$ 并讨论其动力学关系, 他们构造了链 KdV 型方程并用 $S^{(i,j)}$ 和 $S(a,b)$ 表示出此类方程的孤子解, 同时他们还讨论了 ABS 链方程的孤子解. 这里及下文中 $\boldsymbol{I}$

英文引用格式: Zhao S L, Feng W, Shen S F, et al. Extended lattice Gel'fand-Dikii type hierarchies and solutions (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 291–312, doi: 10.1360/012016-27

表示 N 阶单位矩阵. 基于这种方法, Zhang 等[15] 提出了一种扩展方法, 称为广义 Cauchy 矩阵方法. 与 Cauchy 矩阵方法[10] 不同, 广义 Cauchy 矩阵方法以系统

$$(p\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})\widetilde{\boldsymbol{r}}=(p\boldsymbol{I}+\boldsymbol{K})\boldsymbol{r}, \tag{1.3a}$$

$$(q\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})\widehat{\boldsymbol{r}}=(q\boldsymbol{I}+\boldsymbol{K})\boldsymbol{r}, \tag{1.3b}$$

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{K}=\boldsymbol{r}\,{}^{t}\boldsymbol{c} \tag{1.3c}$$

为出发点, 其中列向量 $\boldsymbol{r}$ 和矩阵 $\boldsymbol{M}$ 未知, $\boldsymbol{K}$ 为 $N\times N$ 常数矩阵, ${}^{t}\boldsymbol{c}$ 仍为常数行向量. 系统 (1.3) 称为决定方程组. 通过上述形式的标量函数 $S^{(i,j)}$ 和 $S(a,b)$, Zhang 等研究了链 KdV 型方程和 ABS 链方程的多种形式的精确解. 例如, 当 $\boldsymbol{K}$ 为 Jordan 块时, 可以获得这两类方程的 Jordan 块解或多重极点解. 广义 Cauchy 矩阵方法已被成功地用于求解许多著名的离散可积方程, 如链 Boussinesq (BSQ) 型方程[16, 17] 和链 Kadomtsev-Petviashvili 型方程[18] 等.

作为一个与零维和二维量子重力场的弦理论相关的模型[19], 连续 GD 族受到众多学者的关注 (参见文献 [20, 21]). 该族为包含 KdV 方程的偏微分方程族. 运用直接线性化方法, 文献 [22] 首次给出了连续 GD 族的离散形式, 即链 GD 族. 在该方法中, Nijhoff 等[22] 考虑了一个积分方程

$$\boldsymbol{u}_k+\rho_k\int_{\Gamma}d\lambda(l)\frac{\boldsymbol{u}_l}{k-\omega l}=\rho_k\boldsymbol{c}_k, \tag{1.4}$$

其中 $\boldsymbol{u}_k=(u_k^{(i)})$ 和 $\boldsymbol{c}_k=(k^i)$ $(i\in\mathbb{Z})$ 均为无穷维列向量; 参数 $\omega\equiv\exp(2\pi i/(\gamma+1))$ $(\gamma\in\mathbb{Z}^+)$ 为方程 $\omega^{\gamma+1}=1$ 的根; $\rho_k=(\frac{p+k}{p+\omega k})^n(\frac{q+k}{q+\omega k})^m\rho_k^0$ 为离散的平面波因子; Γ 为复平面 l 上的任意围线. 根据 γ 的不同取值, 利用函数 $\boldsymbol{U}=\int_\Gamma d\lambda(l)\rho_l\boldsymbol{u}_l\boldsymbol{c}_l^{\mathrm{T}}$ 和 $u=\boldsymbol{U}^{(0,0)}$ 可以表示出链 GD 族内的各个成员, 其中 $\boldsymbol{U}^{(0,0)}$ 表示 $\infty\times\infty$ 矩阵 $\boldsymbol{U}$ 的第 $(0,0)$ 个元素. 当 $\gamma=1$ 和 $\gamma=2$ 时, 所对应的方程分别为链势 KdV 方程和链势 BSQ 方程, 即

$$(p-q+u_{n,m+1}-u_{n+1,m})(p+q+u_{n,m}-u_{n+1,m+1})=p^2-q^2 \tag{1.5}$$

和

$$\begin{aligned}&\frac{p^3-q^3}{p-q-u_{n+1,m+1}+u_{n,m+2}}-\frac{p^3-q^3}{p-q-u_{n+2,m}+u_{n+1,m+1}}\\&\quad=(p-q-u_{n+1,m}+u_{n,m+1})(2p+q-u_{n+2,m+1}+u_{n,m})\\&\qquad-(p-q-u_{n+2,m+1}+u_{n+1,m+2})(2p+q-u_{n+2,m+2}+u_{n,m+1}),\end{aligned} \tag{1.6}$$

其中 p 和 q 分别为联系于自变量 n 和 m 的连续链参数. 文献 [22] 不仅给出了链 GD 族, 同时还给出了连续修正 GD 族的离散版本. 为研究 "链 BSQ 类的 Q3 方程", Nijhoff [23] 推广了积分方程 (1.4) 并引入了定义在复平面 k 上的未定围线或弧 Γ_j 上的积分

$$\boldsymbol{C}=\sum_{j=1}^{\gamma+1}\int_{\boldsymbol{\Gamma}_j}d\lambda_j(k)\,\rho_k\boldsymbol{c}_k\,\boldsymbol{c}_{-\omega^jk}^{\mathrm{T}}\sigma_{-\omega^jk}, \tag{1.7}$$

其中 ω 和 $\boldsymbol{c}_k$ 由 (1.4) 给出. 因子 ρ_k 和 $\sigma_{k'}$ 分别为 k 和 k' 的离散 e- 指数函数, 定义为

$$\rho_k=(p+k)^n(q+k)^m\rho_k^0,\quad \sigma_{k'}=(p-k')^{-n}(q-k')^m\sigma_{k'}^0. \tag{1.8}$$

通过引入矩阵 $\boldsymbol{V}$ 满足 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{C}-\boldsymbol{V}\,\Omega\,\boldsymbol{C}$ 和向量 $\boldsymbol{v}_k=\rho_k(\boldsymbol{c}_k-\boldsymbol{V}\,\Omega\,\boldsymbol{c}_k)$, Nijhoff 构造了链 BSQ 类的 Q3 方程. 运用比 (1.7) 更一般的形式, Zhang 等[24] 发现 Hietarinta 运用多维相容法构造出的扩展三分量链 BSQ 系统[25] 遵循色散关系 $\sum_{j=1}^{3}\alpha_j(\omega^j-k^j)=0$ 且 $\alpha_3=1$.

基于上述结果以及直接线性化方法和 Cauchy 矩阵方法之间的紧密联系, 本文将运用广义 Cauchy 矩阵方法构造扩展链 GD 型方程族, 包括扩展链 GD 方程族和扩展修正链 GD 方程族, 以及它们的精确解. 如文献 [15], 我们将从决定方程组出发, 给出 Sylvester 方程和两个发展方程. 进一步定义向量函数 $\boldsymbol{u}^{(i)}$、${}^t\boldsymbol{u}^{(j)}$ 和标量函数 $S^{(i,j)}$ 并考虑这些函数的一些相关性质, 如迭代关系、不变性和发展关系. 紧接着, 给出 Lax 表示并构造扩展链 GD 型方程族. 最后, 通过求解决定方程组的标准型形式, 获得扩展链 GD 型方程族的多种形式的精确解, 包括孤子解和 Jordan 块解.

本文组织如下: 第 2 节设定决定方程组, 引入目标函数 $\boldsymbol{u}^{(i)}$、${}^t\boldsymbol{u}^{(j)}$ 和 $S^{(i,j)}$ 并讨论其相关性质; 第 3 节给出 Lax 表示和扩展链 GD 型方程族; 第 4 节研究精确解的构造; 最后一节将给出结论. 此外, 本文的最后还列出了三个附录.

2 Sylvester 方程和一些相关性质

我们用记号

$$u=u_{n,m}\mapsto \widetilde{u}=u_{n+1,m},\quad \widehat{u}=u_{n,m+1},\quad \widehat{\widetilde{u}}=u_{n+1,m+1}$$

表示基本的链平移.

关于 Sylvester 方程 (1.1) 的解的存在性有以下命题 (参见文献 [9]).

命题 1 记 $\mathcal{E}(\boldsymbol{A})$ 和 $\mathcal{E}(\boldsymbol{B})$ 分别为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的特征值集. 对于已知矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$, 方程 (1.1) 有唯一解 $\boldsymbol{M}$ 当且仅当 $\mathcal{E}(\boldsymbol{A})\cap\mathcal{E}(\boldsymbol{B})=\emptyset$.

当 $\mathcal{E}(\boldsymbol{A})$ 和 $\mathcal{E}(\boldsymbol{B})$ 满足特定条件时, Sylvester 方程 (1.1) 的解可用级数或积分进行表示 (参见文献 [26] 及其引用文献).

考虑代数关系式 (参见文献 [24])

$$G_{\gamma+1}(\omega,k):=g(\omega)-g(k)=0,\quad \text{且}\quad g(k)=\sum_{j=1}^{\gamma+1}\alpha_j k^j,\quad \alpha_{\gamma+1}=1, \tag{2.1}$$

其中 $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\gamma}$ 为任意常数. 用记号 $\omega_j(k)$ $(j=1,2,\ldots,\gamma)$ 和 $\omega_{\gamma+1}(k)=k$ 表示方程 (2.1) 的根. 此外, 记矩阵方程

$$G_{\gamma+1}(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{K}):=g(\boldsymbol{\omega})-g(\boldsymbol{K})=0,\quad \text{其中}\ g(\boldsymbol{K})=\sum_{j=1}^{\gamma+1}\alpha_j\boldsymbol{K}^j,\quad \alpha_{\gamma+1}=1 \tag{2.2}$$

的根为 $N\times N$ 矩阵 $\boldsymbol{\omega}_j(\boldsymbol{K})$ $(j=1,2,\ldots,\gamma)$ 1) 和 $\boldsymbol{\omega}_{\gamma+1}(\boldsymbol{K})=\boldsymbol{K}$. 定义两个 $N\times N$ 复常数对角块矩阵 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{K}'$ 分别为

$$\boldsymbol{K}=\mathrm{Diag}(\boldsymbol{K}_1,\boldsymbol{K}_2,\ldots,\boldsymbol{K}_\gamma), \tag{2.3a}$$

1) 当 $\gamma=2$ 时 (参见文献 [27]),

$$\boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{K})=\frac{1}{2}(-\alpha_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}+\sqrt{(\alpha_2\boldsymbol{I}-3\boldsymbol{K})(\alpha_2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{K})-4\alpha_1\boldsymbol{I}}),$$
$$\boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{K})=\frac{1}{2}(-\alpha_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}-\sqrt{(\alpha_2\boldsymbol{I}-3\boldsymbol{K})(\alpha_2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{K})-4\alpha_1\boldsymbol{I}}).$$

$$\boldsymbol{K}' = \mathrm{Diag}(\boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{K}_1), \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{K}_2), \ldots, \boldsymbol{\omega}_\gamma(\boldsymbol{K}_\gamma)), \tag{2.3b}$$

其中 $\boldsymbol{K}_i \in \mathbb{C}_{N_i \times N_i}$ 且 $\sum_{i=1}^{\gamma} N_i = N$. 易知对于任意复常数 c, 等式

$$\prod_{h=1}^{\gamma+1} (\omega_h(c)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}) = \prod_{h=1}^{\gamma+1} (\omega_h(c)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}') \tag{2.4}$$

成立, 其证明见附录 A.

2.1 决定方程组

本文考虑形如

$$-\boldsymbol{K}\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{K}' = \boldsymbol{r}\,{}^t\boldsymbol{s} \tag{2.5a}$$

的 Sylvester 方程, 其中 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{K}'$ 满足 (2.3); $\boldsymbol{M} \in \mathbb{C}_{N\times N}$, $\boldsymbol{r} \in \mathbb{C}_{N\times 1}$ 和 ${}^t\boldsymbol{s} \in \mathbb{C}_{1\times N}$ 均为依赖于自变量 n 和 m 的待定函数. 为了保证 Sylvester 方程 (2.5a) 的可解性, 依据命题 1, 我们假设 $\mathcal{E}(\boldsymbol{K}) \cap \mathcal{E}(\boldsymbol{K}') = \emptyset$. 同时假定对于 $s = 0, p, q$, 矩阵 $s\boldsymbol{I} \pm \boldsymbol{K}$ 和 $s\boldsymbol{I} \pm \boldsymbol{K}'$ 均可逆. 除了方程 (2.5a), 我们还需引入发展方程组

$$\widetilde{\boldsymbol{r}} = (p\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K})\boldsymbol{r}, \quad \widehat{\boldsymbol{r}} = (q\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K})\boldsymbol{r}, \tag{2.5b}$$

$$\widetilde{{}^t\boldsymbol{s}} = {}^t\boldsymbol{s}(p\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}')^{-1}, \quad \widehat{{}^t\boldsymbol{s}} = {}^t\boldsymbol{s}(q\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}')^{-1}. \tag{2.5c}$$

称系统 (2.5) 为决定方程组. 在该方程组中, 发展方程 (2.5b) 和 (2.5c) 用于决定向量 $\boldsymbol{r}$ 和 ${}^t\boldsymbol{s}$, Sylvester 方程 (2.5a) 用于决定矩阵 $\boldsymbol{M}$.

用矩阵 $\boldsymbol{M}$ 右乘等式 (2.4), 重复运用方程 (2.5a) 并结合 (2.4), 我们可以得到下述关于矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的等式[2)]

$$\begin{aligned}
&\left[\prod_{h=1}^{\gamma+1} (\omega_h(c)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}')\right]\boldsymbol{M} \\
&\quad = \boldsymbol{M}\left[\prod_{h=1}^{\gamma+1} (\omega_h(c)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K})\right] + \sum_{k=1}^{\gamma+1}\left[\prod_{h=1}^{k-1} (\omega_h(c)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K})\right]\boldsymbol{r}\,{}^t\boldsymbol{s}\left[\prod_{h=k+1}^{\gamma+1} (\omega_h(c)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}')\right].
\end{aligned} \tag{2.6}$$

值得注意的是, (2.6) 也可改写为

$$\begin{aligned}
&\left[\prod_{h=1}^{\gamma+1} (\omega_h(c)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}')\right]\boldsymbol{M} \\
&\quad = \boldsymbol{M}\left[\prod_{h=1}^{\gamma+1} (\omega_h(c)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K})\right] + \sum_{k=1}^{\gamma+1}\left[\prod_{h=k+1}^{\gamma+1} (\omega_h(c)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K})\right]\boldsymbol{r}\,{}^t\boldsymbol{s}\left[\prod_{h=1}^{k-1} (\omega_h(c)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}')\right].
\end{aligned} \tag{2.7}$$

用 (2.5a)$^{\sim}$ 减去 (2.5a) 并结合 (2.5b) 和 (2.5c), 由命题 1 可知,

$$\widetilde{\boldsymbol{M}} - \boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}\,\widetilde{{}^t\boldsymbol{s}}. \tag{2.8a}$$

类似地, 我们可得

$$\widehat{\boldsymbol{M}} - \boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}\,\widehat{{}^t\boldsymbol{s}}. \tag{2.8b}$$

方程 (2.8a) 和 (2.8b) 分别描述了矩阵 $\boldsymbol{M}$ 沿 n- 方向和 m- 方向的发展性质. 它们连同 (2.5a) 被认为是矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的定义性质.

2) 这里项 $\prod_{h=1}^{0}(\omega_h(c)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K})$ 和 $\prod_{h=\gamma+2}^{\gamma+1}(\omega_h(c)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}')$ 均理解为单位矩阵.

2.2 目标函数 $\boldsymbol{u}^{(i)}$、${}^t\boldsymbol{u}^{(j)}$ 和 $\boldsymbol{S}^{(i,j)}$

对于 $i,j\in\mathbb{Z}$, 我们引入如下量:

$$\boldsymbol{u}^{(i)}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{M})^{-1}(-\boldsymbol{K})^i\boldsymbol{r}, \tag{2.9a}$$

$${}^t\boldsymbol{u}^{(j)}={}^t\boldsymbol{s}\boldsymbol{K}'^j(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{M})^{-1}, \tag{2.9b}$$

$$S^{(i,j)}={}^t\boldsymbol{s}\boldsymbol{K}'^j(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{M})^{-1}(-\boldsymbol{K})^i\boldsymbol{r}. \tag{2.9c}$$

显然, $\{\boldsymbol{u}^{(i)}\}$、$\{{}^t\boldsymbol{u}^{(j)}\}$ 和 $\{S^{(i,j)}\}$ 分别为无穷多的列向量、行向量和标量且

$$S^{(i,j)}={}^t\boldsymbol{s}\boldsymbol{K}'^j\boldsymbol{u}^{(i)}={}^t\boldsymbol{u}^{(j)}(-\boldsymbol{K})^i\boldsymbol{r}. \tag{2.10}$$

在 (2.9) 中, 假设矩阵 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{M}$ 形式可逆, 即可以写出矩阵 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{M}$ 的逆. 一般而言, $|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{M}|$ 在可积系统中扮演着 τ- 函数的角色 (参见文献 [10,28]). 类似于文献 [28], 由于 $S^{(i,j)}$ 可生成可积方程, 我们称其为主函数.

下面讨论目标函数 $\boldsymbol{u}^{(i)}$、${}^t\boldsymbol{u}^{(j)}$ 和 $S^{(i,j)}$ 的一些性质.

2.2.1 迭代关系

命题 2 对于由 (2.9c) 定义的主函数 $S^{(i,j)}$, 其中 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{K}'$、$\boldsymbol{r}$ 和 ${}^t\boldsymbol{s}$ 满足 Sylvester 方程 (2.5a), 我们有如下关系:

$$\begin{aligned}&\left[\prod_{h=1}^{\gamma+1}(\omega_h(c)-E_1)\right]S^{(i,j)}\\&\quad=\left[\prod_{h=1}^{\gamma+1}(\omega_h(c)+E_2)\right]S^{(i,j)}-\sum_{k=1}^{\gamma+1}\left[\prod_{h=1}^{k-1}(\omega_h(c)+E_2)\right]S^{(0,j)}\left[\prod_{h=k+1}^{\gamma+1}(\omega_h(c)-E_1)\right]S^{(i,0)},\end{aligned} \tag{2.11}$$

其中 $c\in\mathbb{C}$ 为任意复常数; E_1 和 E_2 为满足 $E_1S^{(i,j)}=S^{(i,j+1)}$ 和 $E_2S^{(i,j)}=S^{(i+1,j)}$ 的两个算子.

证明 我们首先考虑函数 $\boldsymbol{u}^{(i)}$. 将项 $\prod_{h=1}^{\gamma+1}(\omega_h(c)\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}')$ 左乘 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{M})\boldsymbol{u}^{(i)}=(-\boldsymbol{K})^i\boldsymbol{r}$, 并注意到等式 (2.4), 可得

$$\left[\prod_{h=1}^{\gamma+1}(\omega_h(c)\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}')\right]\boldsymbol{u}^{(i)}+\left[\prod_{h=1}^{\gamma+1}(\omega_h(c)\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}')\right]\boldsymbol{M}\boldsymbol{u}^{(i)}=\left[\prod_{h=1}^{\gamma+1}(\omega_h(c)\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})\right](-\boldsymbol{K})^i\boldsymbol{r}. \tag{2.12}$$

在上式中用 (2.6) 替换项 $[\prod_{h=1}^{\gamma+1}(\omega_h(c)\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}')]\boldsymbol{M}$ 并再次运用等式 (2.4) 和关系式 (2.10) 得到

$$\begin{aligned}\left[\prod_{h=1}^{\gamma+1}(\omega_h(c)\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}')\right]\boldsymbol{u}^{(i)}&=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{M})^{-1}\left[\prod_{h=1}^{\gamma+1}(\omega_h(c)\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})\right](-\boldsymbol{K})^i\boldsymbol{r}\\&\quad-(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{M})^{-1}\left\{\sum_{k=1}^{\gamma+1}\left[\prod_{h=1}^{k-1}(\omega_h(c)\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})\right]\boldsymbol{r}\left[\prod_{h=k+1}^{\gamma+1}(\omega_h(c)-E_1)\right]S^{(i,0)}\right\}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

定义算子 E_3 为 $E_3\boldsymbol{u}^{(i)}=\boldsymbol{u}^{(i+1)}$, 这样 (2.13) 变为

$$\left[\prod_{h=1}^{\gamma+1}(\omega_h(c)\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}')\right]\boldsymbol{u}^{(i)}=\left[\prod_{h=1}^{\gamma+1}(\omega_h(c)+E_3)\right]\boldsymbol{u}^{(i)}$$

$$- \sum_{k=1}^{\gamma+1} \left[\prod_{h=1}^{k-1} (\omega_h(c) + E_3) \right] \boldsymbol{u}^{(0)} \left[\prod_{h=k+1}^{\gamma+1} (\omega_h(c) - E_1) \right] S^{(i,0)}. \tag{2.14}$$

(2.14) 即为 $\boldsymbol{u}^{(i)}$ 的迭代关系式. 通过类似的讨论, 可得 ${}^t\boldsymbol{u}^{(j)}$ 的迭代关系式为

$$\begin{aligned} {}^t\boldsymbol{u}^{(j)} \left[\prod_{h=1}^{\gamma+1} (\omega_h(c)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}) \right] &= \left[\prod_{h=1}^{\gamma+1} (\omega_h(c) - E_4) \right] {}^t\boldsymbol{u}^{(j)} \\ &+ \sum_{k=1}^{\gamma+1} \left[\prod_{h=1}^{k-1} (\omega_h(c) + E_2) \right] S^{(0,j)} \left[\prod_{h=k+1}^{\gamma+1} (\omega_h(c) - E_4) \right] {}^t\boldsymbol{u}^{(0)}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

其中算子 E_4 定义为 $E_4\,{}^t\boldsymbol{u}^{(j)} = {}^t\boldsymbol{u}^{(j+1)}$.

用项 ${}^t\boldsymbol{s}\boldsymbol{K}'^j$ 左乘 (2.14), 并注意到 (2.10), 便得到迭代关系式 (2.11). 此迭代关系亦可由 (2.15) 右乘列向量 $(-\boldsymbol{K})^i\boldsymbol{r}$ 获得. □

2.2.2 $S^{(i,j)}$ 的不变性

假定在变换矩阵 $\boldsymbol{T}_i$ 下, $\boldsymbol{K}_i$ 相似于标准型矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}_i$,

$$\boldsymbol{K}_i = \boldsymbol{T}_i^{-1} \boldsymbol{\Gamma}_i \boldsymbol{T}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \gamma. \tag{2.16}$$

则通过变换矩阵 $\boldsymbol{T} = \mathrm{Diag}(\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \ldots, \boldsymbol{T}_\gamma)$, 矩阵 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{K}'$ 分别对应于标准型矩阵 $\boldsymbol{\Gamma} = \mathrm{Diag}(\boldsymbol{\Gamma}_1, \boldsymbol{\Gamma}_2, \ldots, \boldsymbol{\Gamma}_\gamma)$ 和 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{Diag}(\boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\Gamma}_1), \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\Gamma}_2), \ldots, \boldsymbol{\omega}_\gamma(\boldsymbol{\Gamma}_\gamma))$, 即

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{T}, \quad \boldsymbol{K}' = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}. \tag{2.17}$$

对于决定方程组 (2.5) 和主函数 $S^{(i,j)}$, 我们有如下结果.

命题 3 运用变换 (2.17) 和

$$\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{M}\boldsymbol{T}^{-1}, \quad \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{r}, \quad {}^t\boldsymbol{s}_1 = {}^t\boldsymbol{s}\boldsymbol{T}^{-1}, \tag{2.18}$$

决定方程组 (2.5) 变为

$$-\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{r}_1\,{}^t\boldsymbol{s}_1, \tag{2.19a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{r}}_1 = (p\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Gamma})\boldsymbol{r}_1, \quad \widehat{\boldsymbol{r}}_1 = (q\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Gamma})\boldsymbol{r}_1, \tag{2.19b}$$

$$\widetilde{{}^t\boldsymbol{s}}_1 = {}^t\boldsymbol{s}_1(p\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Lambda})^{-1}, \quad \widehat{{}^t\boldsymbol{s}}_1 = {}^t\boldsymbol{s}_1(q\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Lambda})^{-1}, \tag{2.19c}$$

且 $S^{(i,j)}$ 满足

$$S^{(i,j)} = {}^t\boldsymbol{s}\boldsymbol{K}'^j(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{M})^{-1}(-\boldsymbol{K})^i\boldsymbol{r} = {}^t\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{\Lambda}^j(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{M}_1)^{-1}(-\boldsymbol{\Gamma})^i\boldsymbol{r}_1. \tag{2.20}$$

(2.20) 表明, 在变换 (2.17) 和 (2.18) 下, $S^{(i,j)}$ 保持不变. 将变换 (2.17) 和 (2.18) 代入 (2.9a) 和 (2.9b), 有

$$\boldsymbol{u}^{(i)} = \boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{M}_1)^{-1}(-\boldsymbol{\Gamma})^i\boldsymbol{r}_1,$$
$${}^t\boldsymbol{u}^{(j)} = {}^t\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{\Lambda}^j(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{M}_1)^{-1}\boldsymbol{T}.$$

定义向量函数

$$\boldsymbol{v}^{(i)} = (\boldsymbol{I}+\boldsymbol{M}_1)^{-1}(-\boldsymbol{\Gamma})^i\boldsymbol{r}_1, \tag{2.21a}$$

$${}^t\boldsymbol{v}^{(j)} = {}^t\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{\Lambda}^j(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{M}_1)^{-1}. \tag{2.21b}$$

在第 3 节中, 我们将用其构造扩展链 GD 型方程族的 Lax 表示.

2.2.3　$\boldsymbol{u}^{(i)}$、${}^t\boldsymbol{u}^{(j)}$ 和 $S^{(i,j)}$ 的发展关系式

首先考虑目标函数 $\boldsymbol{u}^{(i)}$. 对 (2.9a) 两端取 $\tilde{}$- 平移并运用 (2.8a) 可得

$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{M})\widetilde{\boldsymbol{u}}^{(i)} = p(-\boldsymbol{K})^i\boldsymbol{r} + (-\boldsymbol{K})^{i+1}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}\,{}^t\widetilde{\boldsymbol{s}}\widetilde{\boldsymbol{u}}^{(i)}. \tag{2.22}$$

在上式两端左乘 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{M})^{-1}$, 并注意到关系式 (2.10), 有

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}^{(i)} = p\boldsymbol{u}^{(i)} + \boldsymbol{u}^{(i+1)} - \widetilde{S}^{(i,0)}\boldsymbol{u}^{(0)}. \tag{2.23}$$

类似地, 考虑 (2.9a) 的 $\underset{\sim}{}$- 平移 (后退方向). 应用关系 (2.8a), 我们可将 $(2.9\mathrm{a})_{\sim}$ 写为

$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{M})\underset{\sim}{\boldsymbol{u}}^{(i)} = \underset{\sim}{\boldsymbol{r}}\,{}^t\boldsymbol{s}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{u}}^{(i)} + (-\boldsymbol{K})^i\underset{\sim}{\boldsymbol{r}}. \tag{2.24}$$

在上式两端左乘 $\prod_{h=1}^{\gamma+1}(\omega_h(p)\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}')$ 并利用 (2.4) 和 (2.6) 可得

$$\begin{aligned}\left[\prod_{h=1}^{\gamma+1}(\omega_h(p)\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}')\right]\underset{\sim}{\boldsymbol{u}}^{(i)} = {}&(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{M})^{-1}\Bigg\{\left[\prod_{h=1}^{\gamma}(\omega_h(p)\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})\right](-\boldsymbol{K})^i\boldsymbol{r}\\ &-\sum_{k=1}^{\gamma}\left[\prod_{h=1}^{k-1}(\omega_h(p)\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})\right]\boldsymbol{r}\,{}^t\underset{\sim}{\boldsymbol{s}}\left[\prod_{h=k+1}^{\gamma}(\omega_h(p)\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}')\right]\underset{\sim}{\boldsymbol{u}}^{(i)}\Bigg\},\end{aligned} \tag{2.25}$$

其中我们运用了关系式 (2.5b) 和 (2.5c). 根据 (2.9), 方程 (2.25) 可改写为

$$\begin{aligned}&\left[\prod_{h=1}^{\gamma+1}(\omega_h(p)\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}')\right]\boldsymbol{u}^{(i)}\\ &\quad=\left[\prod_{h=1}^{\gamma}(\omega_h(p)+E_3)\right]\widetilde{\boldsymbol{u}}^{(i)} - \sum_{k=1}^{\gamma}\left[\prod_{h=k+1}^{\gamma}(\omega_h(p)-E_1)\right]S^{(i,0)}\left[\prod_{h=1}^{k-1}(\omega_h(p)+E_3)\right]\widetilde{\boldsymbol{u}}^{(0)},\end{aligned} \tag{2.26}$$

其中算子 E_i $(i=1,2,3)$ 的定义见命题 2. 方程 (2.23) 和 (2.26) 构成了 $\boldsymbol{u}^{(i)}$ 沿 n- 方向的发展关系式. 用 $\hat{}$- 平移替换 $\tilde{}$- 平移以及 q 替换 p, 我们便可得 $\boldsymbol{u}^{(i)}$ 沿 m- 方向的发展关系式

$$\widehat{\boldsymbol{u}}^{(i)} = q\boldsymbol{u}^{(i)} + \boldsymbol{u}^{(i+1)} - \widehat{S}^{(i,0)}\boldsymbol{u}^{(0)}, \tag{2.27a}$$

$$\begin{aligned}&\left[\prod_{h=1}^{\gamma+1}(\omega_h(q)\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}')\right]\boldsymbol{u}^{(i)}\\ &\quad=\left[\prod_{h=1}^{\gamma}(\omega_h(q)+E_3)\right]\widehat{\boldsymbol{u}}^{(i)} - \sum_{k=1}^{\gamma}\left[\prod_{h=k+1}^{\gamma}(\omega_h(q)-E_1)\right]S^{(i,0)}\left[\prod_{h=1}^{k-1}(\omega_h(q)+E_3)\right]\widehat{\boldsymbol{u}}^{(0)}.\end{aligned} \tag{2.27b}$$

类似地, ${}^{t}\boldsymbol{u}^{(j)}$ 的发展关系式可表示为

$$
{}^{t}\boldsymbol{u}^{(j)} = p\,\widetilde{{}^{t}\boldsymbol{u}}^{(j)} - \widetilde{{}^{t}\boldsymbol{u}}^{(j+1)} + S^{(0,j)}\,\widetilde{{}^{t}\boldsymbol{u}}^{(0)}, \tag{2.28a}
$$

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{{}^{t}\boldsymbol{u}}^{(j)}\left[\prod_{h=1}^{\gamma+1}(\omega_h(p)\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})\right] \\
&\quad = \left[\prod_{h=1}^{\gamma}(\omega_h(p)-E_4)\right]{}^{t}\boldsymbol{u}^{(j)} + \sum_{k=1}^{\gamma}\left[\prod_{h=k+1}^{\gamma}(\omega_h(p)+E_2)\right]\widetilde{S}^{(0,j)}\left[\prod_{h=1}^{k-1}(\omega_h(p)-E_4)\right]{}^{t}\boldsymbol{u}^{(0)},
\end{aligned} \tag{2.28b}
$$

$$
{}^{t}\boldsymbol{u}^{(j)} = q\,\widehat{{}^{t}\boldsymbol{u}}^{(j)} - \widehat{{}^{t}\boldsymbol{u}}^{(j+1)} + S^{(0,j)}\,\widehat{{}^{t}\boldsymbol{u}}^{(0)}, \tag{2.28c}
$$

$$
\begin{aligned}
&\widehat{{}^{t}\boldsymbol{u}}^{(j)}\left[\prod_{h=1}^{\gamma+1}(\omega_h(q)\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})\right] \\
&\quad = \left[\prod_{h=1}^{\gamma}(\omega_h(q)-E_4)\right]{}^{t}\boldsymbol{u}^{(j)} + \sum_{k=1}^{\gamma}\left[\prod_{h=k+1}^{\gamma}(\omega_h(q)+E_2)\right]\widehat{S}^{(0,j)}\left[\prod_{h=1}^{k-1}(\omega_h(q)-E_4)\right]{}^{t}\boldsymbol{u}^{(0)}.
\end{aligned} \tag{2.28d}
$$

进一步, 分别用行向量 $\widetilde{{}^{t}\boldsymbol{s}}\boldsymbol{K}'^{j}$ 左乘 (2.23) 和 (2.26), 并用行向量 $\widehat{{}^{t}\boldsymbol{s}}\boldsymbol{K}'^{j}$ 左乘 (2.27), 我们便得 $S^{(i,j)}$ 的发展关系式

$$
p\widetilde{S}^{(i,j)} - \widetilde{S}^{(i,j+1)} = pS^{(i,j)} + S^{(i+1,j)} - \widetilde{S}^{(i,0)}S^{(0,j)}, \tag{2.29a}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left[\prod_{h=1}^{\gamma}(\omega_h(p)-E_1)\right]S^{(i,j)} \\
&\quad = \left[\prod_{h=1}^{\gamma}(\omega_h(p)+E_2)\right]\widetilde{S}^{(i,j)} - \sum_{k=1}^{\gamma}\left[\prod_{h=1}^{k-1}(\omega_h(p)+E_2)\right]\widetilde{S}^{(0,j)}\left[\prod_{h=k+1}^{\gamma}(\omega_h(p)-E_1)\right]S^{(i,0)},
\end{aligned} \tag{2.29b}
$$

$$
q\widehat{S}^{(i,j)} - \widehat{S}^{(i,j+1)} = qS^{(i,j)} + S^{(i+1,j)} - \widehat{S}^{(i,0)}S^{(0,j)}, \tag{2.29c}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left[\prod_{h=1}^{\gamma}(\omega_h(q)-E_1)\right]S^{(i,j)} \\
&\quad = \left[\prod_{h=1}^{\gamma}(\omega_h(q)+E_2)\right]\widehat{S}^{(i,j)} - \sum_{k=1}^{\gamma}\left[\prod_{h=1}^{k-1}(\omega_h(q)+E_2)\right]\widehat{S}^{(0,j)}\left[\prod_{h=k+1}^{\gamma}(\omega_h(q)-E_1)\right]S^{(i,0)}.
\end{aligned} \tag{2.29d}
$$

该式亦可由 (2.28) 右乘列向量 $(-\boldsymbol{K})^{i}\boldsymbol{r}$ 得到.

一般来讲, 通过对 (2.29) 中 γ 的特殊取值, 可推导出多种形式的链方程. 例如, 当 $\gamma=1$ 时, 可以获得链 KdV 型方程[15], 而当 $\gamma=2$ 时, 可以得到扩展链 BSQ 型方程[24]. 下面, 类似于文献 [22], 我们将考虑扩展链 GD 型方程族的线性问题.

3 扩展链 GD 型方程族

由于 $\boldsymbol{\Gamma}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}$ 均为标准型矩阵 (见第 2.2.2 小节), 它们可表示为

$$
\boldsymbol{\Gamma} = \begin{pmatrix} k_{11} & \boldsymbol{0} \\ * & * \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} k_1 & \boldsymbol{0} \\ * & * \end{pmatrix}, \quad k_1 = \omega_1(k_{11}). \tag{3.1}
$$

将变换 (2.17) 和 (2.18) 代入 (2.23) 和 (2.26)–(2.28), 可得 $(\boldsymbol{v}^{(i)})_1$ 和 $({}^{t}\boldsymbol{v}^{(j)})_1$ 的发展关系式 (这里 $(\boldsymbol{v}^{(i)})_1$ 和 $({}^{t}\boldsymbol{v}^{(j)})_1$ 分别表示向量 $\boldsymbol{v}^{(i)}$ 和 ${}^{t}\boldsymbol{v}^{(j)}$ 的第一个分量):

$$(\boldsymbol{v}^{(i)})_1{}^{\sim} = p(\boldsymbol{v}^{(i)})_1 + (\boldsymbol{v}^{(i+1)})_1 - \widetilde{S}^{(i,0)}(\boldsymbol{v}^{(0)})_1, \tag{3.2a}$$

$$\begin{aligned}&\left[\prod_{h=1}^{\gamma+1}(\omega_h(p)-k_1)\right](\boldsymbol{v}^{(i)})_1\\ &\quad=\left[\prod_{h=1}^{\gamma}(\omega_h(p)+E_5)\right](\boldsymbol{v}^{(i)})_1{}^{\sim}-\sum_{k=1}^{\gamma}\left[\prod_{h=k+1}^{\gamma}(\omega_h(p)-E_1)\right]S^{(i,0)}\left[\prod_{h=1}^{k-1}(\omega_h(p)+E_5)\right](\boldsymbol{v}^{(0)})_1{}^{\sim},\end{aligned} \tag{3.2b}$$

$$(\boldsymbol{v}^{(i)})_1{}^{\wedge} = q(\boldsymbol{v}^{(i)})_1 + (\boldsymbol{v}^{(i+1)})_1 - \widehat{S}^{(i,0)}(\boldsymbol{v}^{(0)})_1, \tag{3.2c}$$

$$\begin{aligned}&\left[\prod_{h=1}^{\gamma+1}(\omega_h(q)-k_1)\right](\boldsymbol{v}^{(i)})_1\\ &\quad=\left[\prod_{h=1}^{\gamma}(\omega_h(q)+E_5)\right](\boldsymbol{v}^{(i)})_1{}^{\wedge}-\sum_{k=1}^{\gamma}\left[\prod_{h=k+1}^{\gamma}(\omega_h(q)-E_1)\right]S^{(i,0)}\left[\prod_{h=1}^{k-1}(\omega_h(q)+E_5)\right](\boldsymbol{v}^{(0)})_1{}^{\wedge}\end{aligned} \tag{3.2d}$$

和

$$({}^{t}\boldsymbol{v}^{(j)})_1 = p({}^{t}\boldsymbol{v}^{(j)})_1{}^{\sim} - ({}^{t}\boldsymbol{v}^{(j+1)})_1{}^{\sim} + S^{(0,j)}({}^{t}\boldsymbol{v}^{(0)})_1{}^{\sim}, \tag{3.3a}$$

$$\begin{aligned}&({}^{t}\boldsymbol{v}^{(j)})_1{}^{\sim}\left[\prod_{h=1}^{\gamma+1}(\omega_h(p)-k_{11})\right]\\ &\quad=\left[\prod_{h=1}^{\gamma}(\omega_h(p)-E_6)\right]({}^{t}\boldsymbol{v}^{(j)})_1+\sum_{k=1}^{\gamma}\left[\prod_{h=k+1}^{\gamma}(\omega_h(p)+E_2)\right]\widetilde{S}^{(0,j)}\left[\prod_{h=1}^{k-1}(\omega_h(p)-E_6)\right]({}^{t}\boldsymbol{v}^{(0)})_1,\end{aligned} \tag{3.3b}$$

$$({}^{t}\boldsymbol{v}^{(j)})_1 = q({}^{t}\boldsymbol{v}^{(j)})_1{}^{\wedge} - ({}^{t}\boldsymbol{v}^{(j+1)})_1{}^{\wedge} + S^{(0,j)}({}^{t}\boldsymbol{v}^{(0)})_1{}^{\wedge}, \tag{3.3c}$$

$$\begin{aligned}&({}^{t}\boldsymbol{v}^{(j)})_1{}^{\wedge}\left[\prod_{h=1}^{\gamma+1}(\omega_h(q)-k_{11})\right]\\ &\quad=\left[\prod_{h=1}^{\gamma}(\omega_h(q)-E_6)\right]({}^{t}\boldsymbol{v}^{(j)})_1+\sum_{k=1}^{\gamma}\left[\prod_{h=k+1}^{\gamma}(\omega_h(q)+E_2)\right]\widehat{S}^{(0,j)}\left[\prod_{h=1}^{k-1}(\omega_h(q)-E_6)\right]({}^{t}\boldsymbol{v}^{(0)})_1,\end{aligned} \tag{3.3d}$$

其中算子 E_5 和 E_6 定义为 $E_5(\boldsymbol{v}^{(i)})_1 = (\boldsymbol{v}^{(i+1)})_1$ 和 $E_6({}^{t}\boldsymbol{v}^{(j)})_1 = ({}^{t}\boldsymbol{v}^{(j+1)})_1$.

从关系式 (3.2) 和 (3.3) 可以获得 Zakharov-Shabat 型的线性问题. 为方便起见, 引入如下变量:

$$u = S^{(0,0)}, \tag{3.4a}$$

$$v = 1 - S^{(-1,0)}, \quad \mu^{(j)} = \frac{S^{(-1,j)}}{v}, \quad j = 1,2,\dots,\gamma-1, \tag{3.4b}$$

$$w = -1 + S^{(0,-1)}, \quad \nu^{(j)} = \frac{S^{(j,-1)}}{w}, \quad j = 1,2,\dots,\gamma-1. \tag{3.4c}$$

3.1　扩展链 GD 方程族

对于向量

$$\boldsymbol{\phi}_1 = ((\boldsymbol{v}^{(0)})_1, (\boldsymbol{v}^{(1)})_1, \dots, (\boldsymbol{v}^{(\gamma)})_1)^{\mathrm{T}}, \tag{3.5}$$

由关系式 (3.2) 可得线性问题

$$\widetilde{\phi}_1 = \mathcal{L}_{\mathrm{GD}}\ \phi_1, \quad \widehat{\phi}_1 = \mathcal{M}_{\mathrm{GD}}\ \phi_1, \tag{3.6}$$

其中 $\mathcal{L}_{\mathrm{GD}}$ 表示为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{GD}} = \begin{pmatrix} p-\widetilde{u} & 1 & & & \\ -\widetilde{S}^{(1,0)} & p & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ -\widetilde{S}^{(\gamma-1,0)} & 0 & \cdots & p & 1 \\ *_0 & *_1 & \cdots & *_{\gamma-1} & p+u+\alpha_1 \end{pmatrix}_{(\gamma+1)\times(\gamma+1)}, \tag{3.7}$$

且 $\{*_i\}$ 为

$$\begin{aligned} *_0 = {} & (-1)^{\gamma+1}g(k_1) + \sum_{j=0}^{\gamma-1}[A_{\gamma-j}(p)(\widetilde{S}^{(j,0)} - (-1)^j S^{(0,j)}) + ((-1)^{\gamma}\alpha_{j+1} \\ & + (-1)^{j+1}\widetilde{S}^{(\gamma-j-1,0)})S^{(0,j)}] + \sum_{h=0}^{\gamma-2}\sum_{j=0}^{h}(-1)^{j+1}A_{h+1-j}(p)S^{(0,j)}\widetilde{S}^{(\gamma-h-2,0)}, \end{aligned} \tag{3.8a}$$

$$*_i = (-1)^{\gamma-i}\left(S^{(0,\gamma-i)} + \alpha_i + \sum_{j=i+1}^{\gamma}\alpha_j S^{(0,j-i-1)}\right), \quad i = 1,2,\ldots,\gamma-1. \tag{3.8b}$$

(3.8) 中 $\{A_j(p)\}$ 的定义与 (3.7) 的说明分别见附录 B 和 C. 对 (3.7) 进行替换 $p \mapsto q$ 和 $\widetilde{} \mapsto \widehat{}$ 即得矩阵 $\mathcal{M}_{\mathrm{GD}}$. 这里 k_1 可视为谱参数.

当 $\gamma = 1$ 时, 由系统 (3.6) 的相容性 $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathrm{GD}}\mathcal{M}_{\mathrm{GD}} = \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathrm{GD}}\mathcal{L}_{\mathrm{GD}}$ 可导出 "扩展" [3)] 链势 KdV 方程

$$(p - q + \widehat{u} - \widetilde{u})(p + q + u - \widehat{\widetilde{u}} + \alpha_1) = p^2 - q^2 + \alpha_1(p-q). \tag{3.9}$$

而当 $\gamma \geqslant 2$ 时, 上述相容性给出了一系列方程:

$$\widehat{S}^{(h+1,0)} - \widetilde{S}^{(h+1,0)} = (p - q + \widehat{u} - \widetilde{u})\widehat{\widetilde{S}}^{(h,0)} - p\widehat{S}^{(h,0)} + q\widetilde{S}^{(h,0)}, \tag{3.10a}$$

$$\widehat{S}^{(0,h+1)} - \widetilde{S}^{(0,h+1)} = (p - q + \widehat{u} - \widetilde{u})S^{(0,h)} - p\widetilde{S}^{(0,h)} + q\widehat{S}^{(0,h)}, \tag{3.10b}$$

$h = 0,1,\ldots,\gamma-2$ 以及

$$\begin{aligned} & (p - q + \widehat{u} - \widetilde{u})(\widehat{\widetilde{S}}^{(\gamma-1,0)} + (-1)^{\gamma}S^{(0,\gamma-1)}) \\ & \quad = (p + q + u + \alpha_{\gamma})[(p - q + \widehat{u} - \widetilde{u})\widehat{\widetilde{S}}^{(\gamma-2,0)} - p\widehat{S}^{(\gamma-2,0)} + q\widetilde{S}^{(\gamma-2,0)}] \\ & \qquad + \sum_{h=0}^{\gamma-2}(A_{\gamma-h}(p)(\widetilde{S}^{(h,0)} - (-1)^h S^{(0,h)}) - A_{\gamma-h}(q)(\widehat{S}^{(h,0)} - (-1)^h S^{(0,h)})) \end{aligned}$$

[3)] 通过变换 $p \to p - \frac{\alpha_1}{2}$ 和 $q \to q - \frac{\alpha_1}{2}$, 方程 (3.9) 中的参数 α_1 可以被消掉. 这说明对于链势 KdV 方程, 参数 α_1 给出的是平凡扩展. 值得注意的是, 对整个扩展链 GD 型方程族, 参数 α_1 均给出平凡扩展而参数 $\{\alpha_j\}_{j=2}^{\gamma}$ 给出非平凡扩展 (参见文献 [24]).

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{h=0}^{\gamma-2}\sum_{j=0}^{h}(-1)^{j+1}S^{(0,j)}(A_{h+1-j}(p)\widetilde{S}^{(\gamma-2-h,0)}-A_{h+1-j}(q)\widehat{S}^{(\gamma-2-h,0)})\\
&+\sum_{h=1}^{\gamma-2}(-1)^{h+1}S^{(0,h)}(\widetilde{S}^{(\gamma-1-h,0)}-\widehat{S}^{(\gamma-1-h,0)}).
\end{aligned}
\tag{3.10c}
$$

方程 (3.10c) 取自于矩阵方程 $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathrm{GD}}\mathcal{M}_{\mathrm{GD}}=\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathrm{GD}}\mathcal{L}_{\mathrm{GD}}$ 的第 $(\gamma,1)$ 个分量. 在方程 (3.10) 中分别消去 $S^{(\gamma-1,0)}$ 和 $S^{(0,\gamma-1)}$, 便可得由 u、$S^{(h,0)}$ 和 $S^{(0,h)}$ $(h=1,\ldots,\gamma-2,\gamma\geqslant 2)$ 构成的方程组. 该方程组与 (3.9) 便组成了扩展链 GD 方程族. 值得注意的是, 当 $\gamma=2$ 时, 方程 (3.10) 对应于扩展三分量链 BSQ 方程 (参见文献 [24]). 在限制 $\alpha_1=\alpha_2=0$ 下通过消去 $S^{(1,0)}$ 和 $S^{(0,1)}$ 便可获得 (1.6).

考虑发展方程 (3.3) 并定义向量

$$
\boldsymbol{\phi}_2=(({}^{t}\boldsymbol{v}^{(0)})_1,({}^{t}\boldsymbol{v}^{(1)})_1,\ldots,({}^{t}\boldsymbol{v}^{(\gamma)})_1)^{\mathrm{T}},
\tag{3.11}
$$

可以获得类似于 (3.6) 的另一线性系统, 其相容性亦给出扩展链 GD 方程族 (3.9) 和 (3.10).

3.2 扩展修正链 GD 方程族

与扩展链 GD 方程族不同, 扩展修正链 GD 方程族具有两种形式. 为了得到它们的线性系统, 我们引入向量

$$
\boldsymbol{\psi}_1=((\boldsymbol{v}^{(-1)})_1,(\boldsymbol{v}^{(0)})_1,\ldots,(\boldsymbol{v}^{(\gamma-1)})_1)^{\mathrm{T}}
\tag{3.12}
$$

和

$$
\boldsymbol{\psi}_2=(({}^{t}\boldsymbol{v}^{(-1)})_1,({}^{t}\boldsymbol{v}^{(0)})_1,\ldots,({}^{t}\boldsymbol{v}^{(\gamma-1)})_1)^{\mathrm{T}}.
\tag{3.13}
$$

3.2.1 族 I

对于向量 (3.12), 由 (3.2) 可得线性系统

$$
\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_1=\mathcal{L}^1_{\mathrm{mGD}}\,\boldsymbol{\psi}_1,\quad \widehat{\boldsymbol{\psi}}_1=\mathcal{M}^1_{\mathrm{mGD}}\,\boldsymbol{\psi}_1,
\tag{3.14}
$$

其中

$$
\mathcal{L}^1_{\mathrm{mGD}}=\begin{pmatrix}
p & \widetilde{v} & & & & \\
0 & p-\widetilde{u} & 1 & & & \\
0 & -\widetilde{S}^{(1,0)} & p & 1 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\
0 & -\widetilde{S}^{(\gamma-2,0)} & 0 & \cdots & p & 1\\
(-1)^{\gamma+1}\frac{g(k_1)}{v} & \star_0 & \star_1 & \cdots & \star_{\gamma-2} & p+\alpha_\gamma-\mu^{(1)}
\end{pmatrix}_{(\gamma+1)\times(\gamma+1)}.
\tag{3.15}
$$

当 $\gamma=1$ 时,

$$
\star_0=(p+\alpha_1)\frac{\widetilde{v}}{v},
$$

而当 $\gamma \geqslant 2$ 时,

$$\star_0 = -pA_{\gamma-1}(p) - A_\gamma(p)\frac{\widetilde{v}}{v} + \sum_{j=1}^{\gamma-1}[(-1)^j(pA_{\gamma-1-j}(p) - \widetilde{S}^{(\gamma-1-j,0)})\mu^{(j)} + A_j(p)\widetilde{S}^{(\gamma-1-j,0)}] + \sum_{h=2}^{\gamma-1}\sum_{j=1}^{h-1}(-1)^{j+1}A_{h-j}(p)\mu^{(j)}\widetilde{S}^{(\gamma-1-h,0)}, \tag{3.16a}$$

$$\star_i = (-1)^{\gamma-i}\left(\mu^{(\gamma-i)} - \alpha_{i+1} + \sum_{j=i+2}^{\gamma}\alpha_j\mu^{(j-i-1)}\right), \quad i = 1,2,\dots,\gamma-2. \tag{3.16b}$$

$\mathcal{M}^1_{\mathrm{mGD}}$ 为对 (3.15) 进行替换 $p \mapsto q$ 和 $\widetilde{\ } \mapsto \widehat{\ }$ 后所得的矩阵. 这里 k_1 为谱参数.

当 $\gamma = 1$ 时, 由系统 (3.14) 的相容性, 我们可推导出 "扩展" 修正链势 KdV 方程

$$p(v\widehat{v} - \widetilde{v}\widehat{\widetilde{v}}) - q(v\widetilde{v} - \widehat{v}\widehat{\widetilde{v}}) = \alpha_1(\widetilde{v} - \widehat{v})\widehat{\widetilde{v}}. \tag{3.17}$$

当 $\gamma \geqslant 2$ 时, 相容性 $\widehat{\mathcal{L}}^1_{\mathrm{mGD}}\mathcal{M}^1_{\mathrm{mGD}} = \widetilde{\mathcal{M}}^1_{\mathrm{mGD}}\mathcal{L}^1_{\mathrm{mGD}}$ 给出一系列方程

$$p - q + \widehat{u} - \widetilde{u} = p\frac{\widehat{v}}{\widehat{\widetilde{v}}} - q\frac{\widetilde{v}}{\widehat{\widetilde{v}}}, \tag{3.18a}$$

$$\widehat{S}^{(h,0)} - \widetilde{S}^{(h,0)} = (p - q + \widehat{u} - \widetilde{u})\widehat{\widetilde{S}}^{(h-1,0)} - p\widehat{S}^{(h-1,0)} + q\widetilde{S}^{(h-1,0)}, \tag{3.18b}$$

$$p - q - \widehat{\mu}^{(1)} + \widetilde{\mu}^{(1)} = p\frac{v}{\widetilde{v}} - q\frac{v}{\widehat{v}}, \tag{3.18c}$$

$$\widehat{\mu}^{(h+1)} - \widetilde{\mu}^{(h+1)} = (p - q - \widehat{\mu}^{(1)} + \widetilde{\mu}^{(1)})\mu^{(h)} - p\widetilde{\mu}^{(h)} + q\widehat{\mu}^{(h)}, \tag{3.18d}$$

$h = 1,\dots,\gamma-2$, 以及

$$\begin{aligned}
&A_\gamma(p) - A_\gamma(q) - (A_\gamma(p)\widetilde{v} - A_\gamma(q)\widehat{v})\frac{1}{v} + \sum_{j=1}^{\gamma-1}[(-1)^j(A_{\gamma-1-j}(p) - A_{\gamma-1-j}(q)\\
&- \widetilde{S}^{(\gamma-1-j,0)} + \widehat{S}^{(\gamma-1-j,0)})\mu^{(j)} + A_j(p)\widetilde{S}^{(\gamma-1-j,0)} - A_j(q)\widehat{S}^{(\gamma-1-j,0)}]\\
&+ \sum_{h=2}^{\gamma-1}\sum_{j=1}^{h-1}(-1)^{j+1}(A_{h-j}(p)\widetilde{S}^{(\gamma-1-h,0)} - A_{h-j}(q)\widehat{S}^{(\gamma-1-h,0)})\mu^{(j)}\\
&= (p - q + \widehat{u} - \widetilde{u})\widehat{\widetilde{S}}^{(\gamma-2,0)} - p\widehat{S}^{(\gamma-2,0)} + q\widetilde{S}^{(\gamma-2,0)}.
\end{aligned} \tag{3.18e}$$

方程 (3.18e) 取自于矩阵方程 $\widehat{\mathcal{L}}^1_{\mathrm{mGD}}\mathcal{M}^1_{\mathrm{mGD}} = \widetilde{\mathcal{M}}^1_{\mathrm{mGD}}\mathcal{L}^1_{\mathrm{mGD}}$ 的第 $(\gamma, 2)$ 个分量. 与前面的分析类似, 消去方程 (3.18) 中的 $\mu^{(\gamma-1)}$ 和 u, 便可获得一系列由 v、$S^{(h,0)}$ 和 $\mu^{(h)}$ $(h = 1,\dots,\gamma-2, \gamma \geqslant 2)$ 构成的方程组. 这些方程组与 (3.17) 便组成了扩展修正链 GD 方程族.

值得注意的是, 系统 (3.6) 与 (3.14) 之间存在规范变换

$$\boldsymbol{\psi}_1 = \boldsymbol{\Theta}\begin{pmatrix} \diamond_0 & \diamond_1 & \cdots & \diamond_{\gamma-1} & v \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{\phi}_1, \tag{3.19}$$

其中 $\{\diamond_i\}$ 定义为

$$\diamond_i = A_{\gamma-i}(c)v + \sum_{j=1}^{\gamma-i}(-1)^{j+1}A_{\gamma-i-j}(c)S^{(-1,j)}, \quad i=1,2,\dots,\gamma-1, \tag{3.20}$$

且 $\boldsymbol{\Theta} = \mathrm{Diag}((-1)^{\gamma+1}/g(k_1),1,1,\dots,1)$ 为对角矩阵.

3.2.2　族 II

对于向量 (3.13), 由发展方程 (3.3) 可知其线性系统为

$$\boldsymbol{\psi}_2 = \mathcal{L}^2_{\mathrm{mGD}}\ \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_2, \quad \boldsymbol{\psi}_2 = \mathcal{M}^2_{\mathrm{mGD}}\ \widehat{\boldsymbol{\psi}}_2, \tag{3.21}$$

其中

$$\mathcal{L}^2_{\mathrm{mGD}} = \begin{pmatrix} p & w & & & & \\ 0 & p+u & -1 & & & \\ 0 & S^{(0,1)} & p & -1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & S^{(0,\gamma-2)} & 0 & \cdots & p & -1 \\ \frac{g(k_{11})}{\widetilde{w}} & \lhd_0 & \lhd_1 & \cdots & \lhd_{\gamma-2} & p+\alpha_\gamma-\widetilde{\nu}^{(1)} \end{pmatrix}_{(\gamma+1)\times(\gamma+1)}. \tag{3.22}$$

当 $\gamma=1$ 时,

$$\lhd_0 = (p+\alpha_1)\frac{w}{\widetilde{\widetilde{w}}},$$

而当 $\gamma\geqslant 2$ 时,

$$\begin{aligned}\lhd_0 = (-1)^{\gamma-1}\bigg\{&-pA_{\gamma-1}(p) - A_\gamma(p)\frac{w}{\widetilde{\widetilde{w}}} + \sum_{j=1}^{\gamma-1}[(-pA_{\gamma-1-j}(p)+(-1)^{\gamma-j}S^{(0,\gamma-1-j)})\widetilde{\nu}^{(j)} \\ &+(-1)^{\gamma-j}A_j(p)S^{(0,\gamma-1-j)}] + \sum_{h=2}^{\gamma-1}\sum_{j=1}^{h-1}(-1)^{\gamma-h}A_{h-j}(p)\widetilde{\nu}^{(j)}S^{(0,\gamma-1-h)}\bigg\},\end{aligned} \tag{3.23a}$$

$$\lhd_i = (-1)^{\gamma-i}\bigg(\widetilde{\nu}^{(\gamma-i)} + \sum_{j=i+2}^{\gamma}(-1)^{j-\gamma+1}\alpha_j\widetilde{\nu}^{(j-i-1)}\bigg) + \alpha_{i+1}, \quad i=1,2,\dots,\gamma-2. \tag{3.23b}$$

$\mathcal{M}^2_{\mathrm{mGD}}$ 为对 (3.22) 进行替换 $p\mapsto q$ 和 $\widetilde{\ }\mapsto\widehat{\ }$ 后所得的矩阵. 这里 k_{11} 为谱参数.

当 $\gamma=1$ 时, 系统 (3.21) 的相容性 $\mathcal{L}^2_{\mathrm{mGD}}\widetilde{\mathcal{M}}^2_{\mathrm{mGD}} = \mathcal{M}^2_{\mathrm{mGD}}\widehat{\mathcal{L}}^2_{\mathrm{mGD}}$ 给出 “扩展” 修正链势 KdV 方程

$$p(w\widehat{w} - \widetilde{w}\widehat{\widetilde{w}}) - q(w\widetilde{w} - \widehat{w}\widehat{\widetilde{w}}) = \alpha_1 w(\widetilde{w}-\widehat{w}). \tag{3.24}$$

当 $\gamma\geqslant 2$ 时, 该相容性给出一系列方程

$$p-q+\widehat{u}-\widetilde{u} = p\frac{\widetilde{w}}{w} - q\frac{\widehat{w}}{w}, \tag{3.25a}$$

$$\widehat{S}^{(0,h)} - \widetilde{S}^{(0,h)} = (p-q+\widehat{u}-\widetilde{u})S^{(0,h-1)} - p\widetilde{S}^{(0,h-1)} + q\widehat{S}^{(0,h-1)}, \tag{3.25b}$$

$$p-q+\widehat{\nu}^{(1)}-\widetilde{\nu}^{(1)}=p\frac{\widehat{\widetilde{w}}}{\widehat{w}}-q\frac{\widehat{\widetilde{w}}}{\widetilde{w}}, \tag{3.25c}$$

$$\widehat{\nu}^{(h+1)}-\widetilde{\nu}^{(h+1)}=(p-q+\widehat{\nu}^{(1)}-\widetilde{\nu}^{(1)})\widehat{\widetilde{\nu}}^{(h)}-p\widehat{\nu}^{(h)}+q\widetilde{\nu}^{(h)}, \tag{3.25d}$$

$h=1,\dots,\gamma-2$, 以及

$$\begin{aligned}&-A_\gamma(p)+A_\gamma(q)+(A_\gamma(p)\widehat{w}-A_\gamma(q)\widetilde{w})\frac{1}{\widehat{\widetilde{w}}}+\sum_{j=1}^{\gamma-1}[(pA_{\gamma-1-j}(p)-qA_{\gamma-1-j}(q)\\&+(-1)^{\gamma-j}(\widetilde{S}^{(0,\gamma-1-j)}-\widehat{S}^{(0,\gamma-1-j)}))\widehat{\widetilde{\nu}}^{(j)}+(-1)^{\gamma-j}(A_j(q)\widetilde{S}^{(0,\gamma-1-j)}-A_j(p)\widehat{S}^{(0,\gamma-1-j)}]\\&+\sum_{h=2}^{\gamma-1}\sum_{j=1}^{h-1}(-1)^{\gamma-h}(A_{h-j}(q)\widetilde{S}^{(0,\gamma-1-h)}-A_{h-j}(p)\widehat{S}^{(0,\gamma-1-h)})\widehat{\widetilde{\nu}}^{(j)}\\&\quad=(-1)^\gamma((p-q+\widehat{u}-\widetilde{u})S^{(0,\gamma-2)}-p\widetilde{S}^{(0,\gamma-2)}+q\widehat{S}^{(0,\gamma-2)}).\end{aligned} \tag{3.25e}$$

方程 (3.25e) 取自于矩阵方程 $\mathcal{L}^2_{\mathrm{mGD}}\widetilde{\mathcal{M}}^2_{\mathrm{mGD}}=\mathcal{M}^2_{\mathrm{mGD}}\widehat{\mathcal{L}}^2_{\mathrm{mGD}}$ 的第 $(\gamma,2)$ 个分量. 消去方程 (3.25) 中的 $\nu^{(\gamma-1)}$ 和 u 便可获得一系列由 w、$S^{(0,h)}$ 和 $\nu^{(h)}$ $(h=1,\dots,\gamma-2,\gamma\geqslant 2)$ 构成的方程组. 这些方程组与 (3.24) 便构成了另一扩展修正链 GD 方程族. 类似于 (3.19), Lax 系统 (3.6) 与 (3.21) 之间存在规范变换.

4　决定方程组的解

由于主函数 $S^{(i,j)}$ 在变换 (2.17) 和 (2.18) 下保持不变, 因此, 我们只需求解标准型方程组 (2.19) (为方便起见, 我们省略下标), 即

$$-\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{r}\,{}^t\boldsymbol{s}, \tag{4.1a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{r}}=(p\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Gamma})\boldsymbol{r},\quad \widehat{\boldsymbol{r}}=(q\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Gamma})\boldsymbol{r}, \tag{4.1b}$$

$$\widetilde{{}^t\boldsymbol{s}}={}^t\boldsymbol{s}(p\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda})^{-1},\quad \widehat{{}^t\boldsymbol{s}}={}^t\boldsymbol{s}(q\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda})^{-1}, \tag{4.1c}$$

其中

$$\boldsymbol{\Gamma}=\mathrm{Diag}(\boldsymbol{\Gamma}_1,\boldsymbol{\Gamma}_2,\dots,\boldsymbol{\Gamma}_\gamma), \tag{4.2a}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{Diag}(\boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\Gamma}_1),\boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\Gamma}_2),\dots,\boldsymbol{\omega}_\gamma(\boldsymbol{\Gamma}_\gamma)) \tag{4.2b}$$

分别为矩阵 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{K}'$ 对应的标准型. 根据决定方程组 (2.5) 中关于矩阵 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{K}'$ 的假设, 可知 $\mathcal{E}(\boldsymbol{\Gamma})\cap\mathcal{E}(\boldsymbol{\Lambda})=\emptyset$ 以及 $s\boldsymbol{I}\pm\boldsymbol{\Gamma}$ 和 $s\boldsymbol{I}\pm\boldsymbol{\Lambda}$ 对 $s=0,p,q$ 均可逆. 由于 $\boldsymbol{\Gamma}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为标准形矩阵, 根据 $\boldsymbol{\Gamma}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的特征值结构, 我们可对 (4.1) 中 $\boldsymbol{r}$、${}^t\boldsymbol{s}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 的解进行完整的讨论.

4.1　一些记号

以下列出一些记号, 其中下标 $_D$ 和 $_J$ 分别对应矩阵为对角线和 Jordan 块的情形.

(1) $N_{i1}\times N_{i1}$ 对角矩阵:

$$\boldsymbol{\Gamma}^{[N_{i1}]}_{i,D}(\{k_{i,j}\}_{j=1}^{N_{i1}})=\mathrm{Diag}(k_{i,1},k_{i,2},\dots,k_{i,N_{i1}}); \tag{4.3}$$

(2) $N_{ij}\times N_{ij}$ Jordan 块矩阵:

$$\boldsymbol{\Gamma}_{i,J}^{[N_{ij}]}(a)=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & a & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix}_{N_{ij}\times N_{ij}}; \tag{4.4}$$

(3) 下三角 Toeplitz 矩阵[29]:

$$\boldsymbol{T}^{[N]}(\{a_i\}_1^N)=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a_2 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_N & a_{N-1} & a_{N-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}_{N\times N}; \tag{4.5}$$

(4) 斜三角 Toeplitz 矩阵:

$$\boldsymbol{H}^{[N]}(\{b_j\}_1^N)=\begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_{N-2} & b_{N-1} & b_N\\ b_2 & \cdots & b_{N-1} & b_N & 0\\ b_3 & \cdots & b_N & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ b_N & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{N\times N}. \tag{4.6}$$

与此同时, 还需考虑如下表达式:

$$\text{离散 } e\text{- 指数函数: } \rho_{i,\iota}=(p-k_{i,\iota})^n(q-k_{i,\iota})^m\rho_{i,\iota}^0,\ \rho_{i,\iota}^0 \text{ 为常数}, \tag{4.7a}$$

$$\text{离散 } e\text{- 指数函数: } \sigma_{j,\kappa}=(p-\omega_j(k_{j,\kappa}))^{-n}(q-\omega_j(k_{j,\kappa}))^{-m}\sigma_{j,\kappa}^0,\ \sigma_{j,\kappa}^0 \text{ 为常数}, \tag{4.7b}$$

$$N_i\times N_j \text{ 矩阵: } \boldsymbol{G}_{DD}^{(i,j)}(\{k_{i,\iota}\}_{\iota=1}^{N_i};\{k_{j,\kappa}\}_{\kappa=1}^{N_j})=\left(\frac{1}{-k_{i,\iota}+\omega_j(k_{j,\kappa})}\right)_{\iota,\kappa}, \tag{4.7c}$$

$$N_i\times N_j \text{ 矩阵: } \boldsymbol{G}_{DJ}^{(i,j)}(\{k_{i,\iota}\}_{\iota=1}^{N_i};b)=\left(\frac{1}{(\kappa-1)!}\partial_b^{\kappa-1}\frac{1}{-k_{i,\iota}+\omega_j(b)}\right)_{\iota,\kappa}, \tag{4.7d}$$

$$N_i\times N_j \text{ 矩阵: } \boldsymbol{G}_{JD}^{(i,j)}(a;\{k_{j,\kappa}\}_{\kappa=1}^{N_j})=\left(\frac{1}{(-a+\omega_j(k_{j,\kappa}))^{\iota}}\right)_{\iota,\kappa}, \tag{4.7e}$$

$$N_i\times N_j \text{ 矩阵: } \boldsymbol{G}_{JJ}^{(i,j)}(a;b)=\left(\frac{1}{(\kappa-1)!}\partial_b^{\kappa-1}\frac{1}{(-a+\omega_j(b))^{\iota}}\right)_{\iota,\kappa}. \tag{4.7f}$$

4.2 一些解

(4.2) 中的标准形矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的一般形式可取为

$$\boldsymbol{\Gamma}_i=\mathrm{Diag}(\boldsymbol{\Gamma}_{i,D}^{[N_{i1}]}(\{k_{i,\iota}\}_{\iota=1}^{N_{i1}}),\boldsymbol{\Gamma}_{i,J}^{[N_{i2}]}(k_{i,N_{i1}+1}),\ldots,\boldsymbol{\Gamma}_{i,J}^{[N_{i\lambda}]}(k_{i,N_{i1}+\lambda-1})), \tag{4.8a}$$

$$\boldsymbol{\omega}_i(\boldsymbol{\Gamma}_i)=\mathrm{Diag}\bigg(\boldsymbol{\Gamma}^{[N_{i1}]}_{i,D}(\{\omega_i(k_{i,\iota})\}^{N_{i1}}_{\iota=1}),\boldsymbol{T}^{[N_{i2}]}\bigg(\frac{1}{j!}\partial^j_{k_{i,N_{i1}+1}}\omega_i(k_{i,N_{i1}+1})\bigg),\\ \ldots,\boldsymbol{T}^{[N_{i\lambda}]}\bigg(\frac{1}{j!}\partial^j_{k_{i,N_{i1}+\lambda-1}}\omega_i(k_{i,N_{i1}+\lambda-1})\bigg)\bigg),\tag{4.8b}$$

其中 $\sum_{j=1}^{\lambda}N_{ij}=N_i$ $(i=1,2,\ldots,\gamma)$. 由 (4.8) 我们可以得到形式一般的混合解 (参见文献 [29]). 下面仅考虑一些特殊情形: $\boldsymbol{\Gamma}_i$ 为对角线矩阵或 Jordan 块矩阵.

情形 1 假设 $N_{i1}=N_i$ 且 $\sum_{j=2}^{\lambda}N_{ij}=0$, 即

$$\boldsymbol{\Gamma}=\mathrm{Diag}(\boldsymbol{\Gamma}^{[N_1]}_{1,D}(\{k_{1,\iota}\}^{N_1}_{\iota=1}),\boldsymbol{\Gamma}^{[N_2]}_{2,D}(\{k_{2,\iota}\}^{N_2}_{\iota=1}),\ldots,\boldsymbol{\Gamma}^{[N_\gamma]}_{\gamma,D}(\{k_{\gamma,\iota}\}^{N_\gamma}_{\iota=1})),\tag{4.9a}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{Diag}(\boldsymbol{\Gamma}^{[N_1]}_{1,D}(\{\omega_1(k_{1,\kappa})\}^{N_1}_{\kappa=1}),\boldsymbol{\Gamma}^{[N_2]}_{2,D}(\{\omega_2(k_{2,\kappa})\}^{N_2}_{\kappa=1}),\ldots,\boldsymbol{\Gamma}^{[N_\gamma]}_{\gamma,D}(\{\omega_\gamma(k_{\gamma,\kappa})\}^{N_\gamma}_{\kappa=1})).\tag{4.9b}$$

此时, 方程 (4.1b) 和 (4.1c) 中的向量 $\boldsymbol{r}$ 和 ${}^t\boldsymbol{s}$ 分别为

$$\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\ldots,\boldsymbol{r}_\gamma)^{\mathrm{T}}\quad 且\quad \boldsymbol{r}_i=(r_{i,1},r_{i,2},\ldots,r_{i,N_i}),\quad r_{i,\iota}=\rho_{i,\iota},\tag{4.10a}$$

$${}^t\boldsymbol{s}=({}^t\boldsymbol{s}_1,{}^t\boldsymbol{s}_2,\ldots,{}^t\boldsymbol{s}_\gamma)\quad 且\quad {}^t\boldsymbol{s}_j=(s_{j,1},s_{j,2},\ldots,s_{j,N_j}),\quad s_{j,\kappa}=\sigma_{j,\kappa},\tag{4.10b}$$

其中 $\rho_{i,\iota}$ 和 $\sigma_{j,\kappa}$ 定义为 (4.7a) 和 (4.7b). 将 (4.9) 和 (4.10) 代入方程 (4.1a) 可知,

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{G}\boldsymbol{H},$$

其中

$$\boldsymbol{F}=\mathrm{Diag}(\boldsymbol{\Gamma}^{[N_1]}_{1,D}(\{r_{1,\iota}\}^{N_1}_{\iota=1}),\boldsymbol{\Gamma}^{[N_2]}_{2,D}(\{r_{2,\iota}\}^{N_2}_{\iota=1}),\ldots,\boldsymbol{\Gamma}^{[N_\gamma]}_{\gamma,D}(\{r_{\gamma,\iota}\}^{N_\gamma}_{\iota=1})),\tag{4.11a}$$

$$\boldsymbol{H}=\mathrm{Diag}(\boldsymbol{\Gamma}^{[N_1]}_{1,D}(\{s_{1,\kappa}\}^{N_1}_{\kappa=1}),\boldsymbol{\Gamma}^{[N_2]}_{2,D}(\{s_{2,\kappa}\}^{N_2}_{\kappa=1}),\ldots,\boldsymbol{\Gamma}^{[N_\gamma]}_{\gamma,D}(\{s_{\gamma,\kappa}\}^{N_\gamma}_{\kappa=1})),\tag{4.11b}$$

$$\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{G}^{(i,j)}_{DD}(\{k_{i,\iota}\}^{N_i}_{\iota=1};\{k_{j,\kappa}\}^{N_j}_{\kappa=1}))_{i,j=1,2,\ldots,\gamma},\tag{4.11c}$$

且 $\boldsymbol{G}^{(i,j)}_{DD}(\{k_{i,\iota}\}^{N_i}_{\iota=1}\{k_{j,\kappa}\}^{N_j}_{\kappa=1})$ 定义为 (4.7c). 此时, 所给出的解 $S^{(i,j)}={}^t\boldsymbol{s}\boldsymbol{K}'^j(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{M})^{-1}(-\boldsymbol{K})^i\boldsymbol{r}$ 为多孤子解. 特别地, 当 $\{N_i=1\}$ 且 $\{k_{i,\iota}=k\}$ 时, $S^{(i,j)}$ 给出单孤子解, 其中

$$\boldsymbol{r}=(\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_\gamma)^{\mathrm{T}}\quad 且\quad \rho_i=(p-k)^n(q-k)^m\rho_i^0,\tag{4.12a}$$

$${}^t\boldsymbol{s}=(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_\gamma)\quad 且\quad \sigma_j=(p-\omega_j(k))^{-n}(q-\omega_j(k))^{-m}\sigma_j^0,\tag{4.12b}$$

$$\boldsymbol{M}=\left(\frac{\rho_i\sigma_j}{-k+\omega_j(k)}\right)_{i,j=1,2,\ldots,\gamma}.\tag{4.12c}$$

情形 2 假定 $N_{i2}=N_i$ 及 $N_{i1}+\sum_{j=3}^{\lambda}N_{ij}=0$, 即

$$\boldsymbol{\Gamma}=\mathrm{Diag}(\boldsymbol{\Gamma}^{[N_1]}_{1,J}(k_{1,N_{11}+1}),\boldsymbol{\Gamma}^{[N_2]}_{2,J}(k_{2,N_{21}+1}),\ldots,\boldsymbol{\Gamma}^{[N_\gamma]}_{\gamma,J}(k_{\gamma,N_{\gamma1}+1})),\tag{4.13a}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{Diag}\bigg(\boldsymbol{T}^{[N_1]}\bigg(\bigg\{\frac{1}{j!}\partial^j_{k_{1,N_{11}+1}}\omega_1(k_{1,N_{11}+1})\bigg\}^{N_1-1}_{j=0}\bigg),\\ \ldots,\boldsymbol{T}^{[N_\gamma]}\bigg(\bigg\{\frac{1}{j!}\partial^j_{k_{\gamma,N_{\gamma1}+1}}\omega_\gamma(k_{\gamma,N_{\gamma1}+1})\bigg\}^{N_\gamma-1}_{j=0}\bigg)\bigg).\tag{4.13b}$$

此时, $\boldsymbol{r}$ 和 ${}^t\boldsymbol{s}$ 为

$$\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\ldots,\boldsymbol{r}_\gamma)^{\mathrm{T}}\quad 且\quad \boldsymbol{r}_i=(r_{i,1},r_{i,2},\ldots,r_{i,N_i}),\tag{4.14a}$$

$$ {}^t\boldsymbol{s} = ({}^t\boldsymbol{s}_1, {}^t\boldsymbol{s}_2, \ldots, {}^t\boldsymbol{s}_\gamma) \quad \text{且} \quad {}^t\boldsymbol{s}_j = (s_{j,1}, s_{j,2}, \ldots, s_{j,N_j}), \tag{4.14b} $$

其中

$$ r_{i,\iota} = \frac{1}{(\iota-1)!}\partial_{k_{i,N_{i1}+1}}^{\iota-1}\rho_{i,N_{i1}+1}, \tag{4.15a} $$

$$ s_{j,\kappa} = \frac{1}{(N_j-\kappa)!}\partial_{k_{j,N_{j1}+1}}^{N_j-\kappa}\sigma_{j,N_{j1}+1}. \tag{4.15b} $$

解 $\boldsymbol{M}$ 表示为

$$ \boldsymbol{M} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}, \tag{4.16} $$

其中

$$ \boldsymbol{F} = \mathrm{Diag}(\boldsymbol{T}_1^{[N_1]}(\{r_{1,\iota}\}_{\iota=1}^{N_1}), \boldsymbol{T}_2^{[N_2]}(\{r_{2,\iota}\}_{\iota=1}^{N_2}), \ldots, \boldsymbol{T}_\gamma^{[N_\gamma]}(\{r_{\gamma,\iota}\}_{\iota=1}^{N_\gamma})), \tag{4.17a} $$

$$ \boldsymbol{H} = \mathrm{Diag}(\boldsymbol{H}_1^{[N_1]}(\{s_{1,\kappa}\}_{\kappa=1}^{N_1}), \boldsymbol{H}_2^{[N_2]}(\{s_{2,\kappa}\}_{\kappa=1}^{N_2}), \ldots, \boldsymbol{H}_\gamma^{[N_\gamma]}(\{s_{\gamma,\kappa}\}_{\kappa=1}^{N_\gamma})), \tag{4.17b} $$

$$ \boldsymbol{G} = (\boldsymbol{G}_{JJ}^{(i,j)}(k_{i,N_{i1}+1};b)\,|_{b=k_{j,N_{j1}+1}})_{i,j=1,2,\ldots,\gamma}, \tag{4.17c} $$

且 $\boldsymbol{G}_{JJ}^{(i,j)}(k_{i,N_{i1}+1};b)$ 由 (4.7f) 给出. 此情形下对应的解为 Jordan 块解或多重极点解. 该解也可视为极限解 (参见文献 [28, 29]).

情形 3 假定 $N_{i1}=N_i$ 且 $\sum_{j=2}^{\lambda}N_{ij}=0$, $i=1,2,\ldots,\alpha-1$; $N_{i2}=N_i$ 且 $N_{i1}+\sum_{j=3}^{\lambda}N_{ij}=0$, $i=\alpha,\ldots,\gamma$, 即

$$ \boldsymbol{\Gamma} = \mathrm{Diag}(\boldsymbol{\Gamma}_{1,D}^{[N_1]}(\{k_{1,\iota}\}_{\iota=1}^{N_1}), \ldots, \boldsymbol{\Gamma}_{\alpha-1,D}^{[N_{\alpha-1}]}(\{k_{\alpha-1,\iota}\}_{\iota=1}^{N_{\alpha-1}}), \boldsymbol{\Gamma}_{\alpha,J}^{[N_\alpha]}(k_{\alpha,N_{\alpha1}+1}), \ldots, \boldsymbol{\Gamma}_{\gamma,J}^{[N_\gamma]}(k_{\gamma,N_{\gamma1}+1})), \tag{4.18a} $$

$$ \begin{aligned} \boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{Diag}\Bigg(&\boldsymbol{\Gamma}_{1,D}^{[N_1]}(\{\omega_1(k_{1,\iota})\}_{\iota=1}^{N_1}), \ldots, \boldsymbol{\Gamma}_{\alpha-1,D}^{[N_{\alpha-1}]}(\{\omega_{\alpha-1}(k_{\alpha-1,\iota})\}_{\iota=1}^{N_{\alpha-1}}), \\ &\boldsymbol{T}^{[N_\alpha]}\left(\left\{\frac{1}{j!}\partial_{k_{\alpha,N_{\alpha1}+1}}^{j}\omega_\alpha(k_{\alpha,N_{\alpha1}+1})\right\}_{j=0}^{N_\alpha-1}\right), \ldots, \boldsymbol{T}^{[N_\gamma]}\left(\left\{\frac{1}{j!}\partial_{k_{\gamma,N_{\gamma1}+1}}^{j}\omega_\gamma(k_{\gamma,N_{\gamma1}+1})\right\}_{j=0}^{N_\gamma-1}\right)\Bigg). \end{aligned} \tag{4.18b} $$

此时, $\boldsymbol{r}$ 和 ${}^t\boldsymbol{s}$ 为

$$ \boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_\gamma)^{\mathrm{T}} \quad \text{且} \quad \boldsymbol{r}_i = (r_{i,1}, r_{i,2}, \ldots, r_{i,N_i}), \tag{4.19a} $$

$$ {}^t\boldsymbol{s} = ({}^t\boldsymbol{s}_1, {}^t\boldsymbol{s}_2, \ldots, {}^t\boldsymbol{s}_\gamma) \quad \text{且} \quad {}^t\boldsymbol{s}_j = (s_{j,1}, s_{j,2}, \ldots, s_{j,N_j}), \tag{4.19b} $$

其中

$$ r_{i,\iota} = \begin{cases} \rho_{i,\iota}, & i=1,2,\ldots,\alpha-1, \\ \dfrac{1}{(\iota-1)!}\partial_{k_{i,N_{i1}+1}}^{\iota-1}\rho_{i,N_{i1}+1}, & i=\alpha,\ldots,\gamma, \end{cases} \tag{4.20a} $$

$$ s_{j,\kappa} = \begin{cases} \sigma_{j,\kappa}, & j=1,2,\ldots,\alpha-1, \\ \dfrac{1}{(N_j-\kappa)!}\partial_{k_{j,N_{j1}+1}}^{N_j-\kappa}\sigma_{j,N_{j1}+1}, & j=\alpha,\ldots,\gamma. \end{cases} \tag{4.20b} $$

求解 (4.1a) 可得

$$ \boldsymbol{M} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}, $$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}=&\operatorname{Diag}(\boldsymbol{\Gamma}_{1,D}^{[N_1]}(\{r_{1,\iota}\}_{\iota=1}^{N_1}),\ldots,\boldsymbol{\Gamma}_{\alpha-1,D}^{[N_{\alpha-1}]}(\{r_{\alpha-1,\iota}\}_{\iota=1}^{N_{\alpha-1}}),\\&\boldsymbol{T}_{\alpha}^{[N_\alpha]}(\{r_{\alpha,\iota}\}_{\iota=1}^{N_\alpha}),\ldots,\boldsymbol{T}_{\gamma}^{[N_\gamma]}(\{r_{\gamma,\iota}\}_{\iota=1}^{N_\gamma})),\end{aligned}\tag{4.21a}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}=&\operatorname{Diag}(\boldsymbol{\Gamma}_{1,D}^{[N_1]}(\{s_{1,\kappa}\}_{\kappa=1}^{N_1}),\ldots,\boldsymbol{\Gamma}_{\alpha-1,D}^{[N_{\alpha-1}]}(\{s_{\alpha-1,\kappa}\}_{\kappa=1}^{N_{\alpha-1}}),\\&\boldsymbol{H}_{\alpha}^{[N_\alpha]}(\{s_{\alpha,\kappa}\}_{\kappa=1}^{N_\alpha}),\ldots,\boldsymbol{H}_{\gamma}^{[N_\gamma]}(\{s_{\gamma,\kappa}\}_{\kappa=1}^{N_\gamma})),\end{aligned}\tag{4.21b}$$

$$\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{G}_1&\boldsymbol{G}_2\\\boldsymbol{G}_3&\boldsymbol{G}_4\end{pmatrix}_{N\times N},\tag{4.21c}$$

且

$$\boldsymbol{G}_1=(\boldsymbol{G}_{DD}^{(i,j)}(\{k_{i,\iota}\}_{\iota=1}^{N_i};\{k_{j,\kappa}\}_{\kappa=1}^{N_j}))_{i,j=1,2,\ldots,\alpha-1},\tag{4.22a}$$

$$\boldsymbol{G}_2=(\boldsymbol{G}_{DJ}^{(i,j)}(\{k_{i,\iota}\}_{\iota=1}^{N_i};k_{j,N_{j1}+1}))_{i=1,2,\ldots,\alpha-1;j=\alpha,\ldots,\gamma},\tag{4.22b}$$

$$\boldsymbol{G}_3=(\boldsymbol{G}_{JD}^{(i,j)}(k_{i,N_{i1}+1};\{k_{j,\kappa}\}_{\kappa=1}^{N_j}))_{i=\alpha,\ldots,\gamma;j=1,2,\ldots,\alpha-1},\tag{4.22c}$$

$$\boldsymbol{G}_4=(\boldsymbol{G}_{JJ}^{(i,j)}(k_{i,N_{i1}+1};b)\,|_{b=k_{j,N_{j1}+1}})_{i,j=\alpha,\ldots,\gamma}.\tag{4.22d}$$

由于 $\boldsymbol{\Gamma}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}$ 均由对角线矩阵和 Jordan 块矩阵组成, 因而对应的解称为混合解. 原则上, 该解应同时具有孤子和多重极点解的特征.

注 1 对于扩展链 GD 方程族 (3.10) 和扩展修正链 GD 方程族 (3.25), 条件 $|\boldsymbol{K}|\neq 0$ 可以省略. 在 (4.13) 中假设 $\{k_{i,N_{i1}+1}=0\}$, 即

$$\boldsymbol{\Gamma}=\operatorname{Diag}(\boldsymbol{\Gamma}_{1,J}^{[N_1]}(0),\boldsymbol{\Gamma}_{2,J}^{[N_2]}(0),\ldots,\boldsymbol{\Gamma}_{\gamma,J}^{[N_\gamma]}(0)),\tag{4.23a}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Lambda}=&\operatorname{Diag}\Bigg(\boldsymbol{T}^{[N_1]}\Bigg(\left\{\frac{1}{j!}\partial^{j}_{k_{1,N_{11}+1}}\omega_1(k_{1,N_{11}+1})\right\}_{j=0}^{N_1-1}\Bigg)\,\Bigg|_{k_{1,N_{11}+1}=0},\ldots,\\&\boldsymbol{T}^{[N_\gamma]}\Bigg(\left\{\frac{1}{j!}\partial^{j}_{k_{\gamma,N_{\gamma1}+1}}\omega_\gamma(k_{\gamma,N_{\gamma1}+1})\right\}_{j=0}^{N_\gamma-1}\Bigg)\,\Bigg|_{k_{\gamma,N_{\gamma1}+1}=0}\Bigg).\end{aligned}\tag{4.23b}$$

此时, 由 (4.14)、(4.16) 以及 (4.17a)、(4.17b) 和

$$r_{i,\iota}=\frac{1}{(\iota-1)!}\partial^{\iota-1}_{k_{i,N_{i1}+1}}\rho_{i,N_{i1}+1}\,|_{k_{i,N_{i1}+1}=0},\tag{4.24a}$$

$$s_{j,\kappa}=\frac{1}{(N_j-\kappa)!}\partial^{N_j-\kappa}_{k_{j,N_{j1}+1}}\sigma_{j,N_{j1}+1}\,|_{k_{j,N_{j1}+1}=0},\tag{4.24b}$$

$$\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{G}_{JJ}^{(i,j)}(k_{i,N_{i1}+1};b)\,|_{b=k_{j,N_{j1}+1}}|_{k_{i,N_{i1}+1}=k_{j,N_{j1}+1}=0})_{i,j=1,2,\ldots,\gamma},\tag{4.24c}$$

我们便可得到族 (3.10) 和族 (3.25) 的有理解.

5 结论

本文运用广义 Cauchy 矩阵方法研究了扩展链 GD 型方程族. 借助代数关系式 (2.1), 我们引入了决定方程组 (2.5) 和目标函数 (2.9). 根据向量函数 $\boldsymbol{v}^{(i)}$ 和 ${}^t\boldsymbol{v}^{(j)}$ 满足的发展关系式, 给出了一些线性问题的显式形式并从中构造了扩展链 GD 型方程族. 为了求解决定方程组 (2.5), 我们利用变

换 (2.17) 和 (2.18) 对其进行简化. 进一步根据 $\mathbf{\Gamma}$ 和 $\mathbf{\Lambda}$ (或 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{K}'$) 的特征值结构, 构造了一系列显式解, 如多孤子解和多重极点解. 本文所给出的解均包含 γ 个平面波因子: $\rho_j=(\frac{p-k}{p-\omega_j(k)})^n(\frac{q-k}{q-\omega_j(k)})^m\rho_j^0$, $j=1,2,\ldots,\gamma$. 在接下来的工作中, 我们将系统地讨论本文中所给的扩展链 GD 方程族和扩展修正链 GD 方程族的多维相容性. 为此我们需要引入点变换, 将这两个族变换为简洁的形式 (对于扩展 BSQ 型方程可参见文献 [24]). 假设 $p\to p(n)$ 且 $q\to q(m)$, 即参数 p 和 q 非常数而分别为自变量 n 和 m 的函数, 则从决定方程组 (2.5) 出发可以构造非自治扩展链 GD 型方程族. 最近, 由于文献 [30,31] 分别研究了链 GD 方程族的 Lagrange 多形式结构和非交换链 Kadomtsev-Petviashvilii 族通过周期约化得到非交换修正链 GD 方程族的过程, 因而接下来我们将重点研究扩展链 GD 型方程族的 Lagrange 多形式结构和非交换形式扩展链 GD 型方程族构的构造过程.

致谢 作者对审稿人的建议表示衷心的感谢.

参考文献

1 Carl B, Schiebold C. Nonlinear equations in soliton physics and operator ideals. Nonlinearity, 1999, 12: 333–364

2 Carl B, Schiebold C. A direct approach to the study of soliton equations. Jahresber Deutsch Math-Verein, 2000, 102: 102–148 (English version is avilable on http://apachepersonal.miun.se/corsch/)

3 Schiebold C. Cauchy-type determinants and integrable systems. Linear Algebra Appl, 2010, 433: 447–475

4 Aktosun T, van der Mee C. Explicit solutions to the Korteweg-de Vries equation on the half line. Inverse Problems, 2006, 22: 2165–2174

5 Aktosun T, Demontis F, van der Mee C. Exact solutions to the focusing nonlinear Schrödinger equation. Inverse Problems, 2007, 23: 2171–2195

6 Aktosun T, Demontis F, van der Mee C. Exact solutions to the sine-Gordon equation. J Math Phys, 2010, 51: 123521

7 Dimakis A, Müller-Hoissen F. Solutions of matrix NLS systems and their discretizations: A unified treatment. Inverse Problems, 2010, 26: 095007

8 Dimakis A, Müller-Hoissen F. Bidifferential calculus approach to AKNS hierarchies and their solutions. SIGMA Symmetry Integrability Geom Methods Appl, 2010, 6: 2010055

9 Sylvester J. Sur l'equation en matrices $px=xq$. C R Math Acad Sci Paris, 1884, 99: 67–71, 115–116

10 Nijhoff F W, Atkinson J, Hietarinta J. Soliton solutions for ABS lattice equations, I: Cauchy matrix approach. J Phys A, 2009, 42: 404005

11 Nijhoff F W. Math5492: Discrete Systems and Integrability. Http://www1.maths.leeds.ac.uk/~frank/math5492/Adv-Lectures.pdf, 2010

12 Nijhoff F W, Atkinson J. Elliptic N-soliton solutions of ABS lattice equations. Int Math Res Not IMRN, 2010, 2010: 3837–3895

13 Yoo-Kong S, Nijhoff F W. Elliptic (N,N')-soliton solutions of the lattice Kadomtsev-Petviashvili equation. J Math Phys, 2013, 54: 043511

14 Adler V E, Bobenko A I, Suris Y B. Classification of integrable equations on quad-graphs, the consistency approach. Comm Math Phys, 2003, 233: 513–543

15 Zhang D J, Zhao S L. Solutions to the ABS lattice equations via generalized Cauchy matrix approach. Stud Appl Math, 2013, 131: 72–103

16 Zhao S L, Zhang D J, Shi Y. Generalized Cauchy matrix approach for lattice Boussinesq-type equations. Chin Ann Math Ser B, 2012, 33: 259–270

17 Feng W, Zhao S L, Zhang D J. Exact solutions to lattice Boussinesq-type equations. J Nonlinear Math Phys, 2012, 19: 1250031

18 Feng W, Zhao S L. Generalized Cauchy matrix approach for lattice KP-type equations. Commun Nonlinear Sci Numer Simul, 2013, 18: 1652–1664

19 Douglas M R. Strings in less than one dimension and the generalized KdV hierarchies. Phys Lett B, 1990, 238: 176–180

20 Gel'fand I M, Dikii L A. Integrable nonlinear equations and the Liouville theorem. Funct Anal Appl, 1979, 13: 6–15

21 Manin Y I. Algebraic aspects of non-linear differential equations. J Sov Math, 1979, 11: 1–122

22 Nijhoff F W, Papageorgiou V G, Capel H W, et al. The lattice Gel'fand-Dikii hierarchy. Inverse Problems, 1992, 8:

597–621
23 Nijhoff F W. A higher-rank version of the Q3 equation. ArXiv:1104.1166, 2011
24 Zhang D J, Zhao S L, Nijhoff F W. Direct linearization of extended lattice BSQ systems. Stud Appl Math, 2012, 129: 220–248
25 Hietarinta J. Boussinesq-like multi-component lattice equations and multi-dimensional consistency. J Phys A, 2011, 44: 165204
26 Bhatia R, Rosenthal P. How and why to solve the operator equation $AX - XB = Y$. Bull Lond Math Soc, 1997, 29: 1–21
27 Zhang D J. The Sylvester equation, Cauchy matrices and matrix discrete integrable systems. Collaborated Nijhoff F W, Zhao S L. Http://www.newton.ac.uk/programmes/DIS/disw05p.html, 2013
28 Xu D D, Zhang D J, Zhao S L. The Sylvester equation and integrable equations, I: The Korteweg-de Vries system and sine-Gordon equation. J Nonlinear Math Phys, 2014, 21: 382–406
29 Zhang D J. Notes on solutions in Wronskian form to soliton equations: KdV-type. ArXiv:nlin.SI/0603008, 2006
30 Lobb S B, Nijhoff F W. Lagrangian multiform structure for the lattice Gel'fand-Dikii hierarchy. J Phys A, 2010, 43: 072003
31 Doliwa A. Non-commutative lattice-modified Gel'fand-Dikii systems. J Phys A, 2013, 46: 205202

附录 A

我们引入记号

$$
\begin{aligned}
&B_0(k) = 1,\\
&B_1(k) = \sum_{j=1}^{\gamma+1} \omega_j(k) = -\alpha_\gamma,\\
&B_2(k) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant \gamma+1} \omega_i(k)\omega_j(k) = \alpha_{\gamma-1},\\
&B_3(k) = \sum_{1\leqslant i<j<l\leqslant \gamma+1} \omega_i(k)\omega_j(k)\omega_l(k) = -\alpha_{\gamma-2},\\
&\vdots\\
&B_\gamma(k) = \sum_{j=1}^{\gamma+1} \frac{B_{\gamma+1}(k)}{\omega_j(k)} = (-1)^\gamma \alpha_1,\\
&B_{\gamma+1}(k) = \prod_{j=1}^{\gamma+1} \omega_j(k) = (-1)^\gamma (k^{\gamma+1} + \alpha_\gamma k^\gamma + \alpha_{\gamma-1}k^{\gamma-1} + \cdots + \alpha_1 k).
\end{aligned}
$$

注意到 (2.3) 中 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{K}'$ 的对角块结构, 为证明等式 (2.4), 我们仅需说明

$$
\prod_{h=1}^{\gamma+1}(\omega_h(c)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}) = \prod_{h=1}^{\gamma+1}(\omega_h(c)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{L})), \quad l = 1, 2, \ldots, \gamma, \tag{A.1}
$$

其中 $\boldsymbol{L}$ 为方块矩阵. 上式左端为

$$
\begin{aligned}
\prod_{h=1}^{\gamma+1}(\omega_h(c)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}) = {}& B_{\gamma+1}(c) + B_\gamma(c)(-\boldsymbol{L}) + B_{\gamma-1}(c)(-\boldsymbol{L})^2 + \cdots\\
&+ B_2(c)(-\boldsymbol{L})^{\gamma-1} + B_1(c)(-\boldsymbol{L})^\gamma + B_0(c)(-\boldsymbol{L})^{\gamma+1},
\end{aligned} \tag{A.2}
$$

右端为

$$\prod_{h=1}^{\gamma+1}(\omega_h(c)\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{L}))=B_{\gamma+1}(c)+B_\gamma(c)(-\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{L}))+B_{\gamma-1}(c)(-\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{L}))^2+\cdots$$
$$+B_2(c)(-\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{L}))^{\gamma-1}+B_1(c)(-\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{L}))^{\gamma}+B_0(c)(-\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{L}))^{\gamma+1}. \tag{A.3}$$

(A.2) 减去 (A.3) 可得

$$\begin{aligned}&\prod_{h=1}^{\gamma+1}(\omega_h(c)\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L})-\prod_{h=1}^{\gamma+1}(\omega_h(c)\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{L}))\\&\quad=B_\gamma(c)(\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{L})-\boldsymbol{L})-B_{\gamma-1}(c)(\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{L})^2-\boldsymbol{L}^2)+\cdots+(-1)^\gamma B_2(c)(\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{L})^{\gamma-1}-\boldsymbol{L}^{\gamma-1})\\&\qquad-(-1)^\gamma B_1(c)(\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{L})^{\gamma}-\boldsymbol{L}^{\gamma})+(-1)^\gamma B_0(c)(\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{L})^{\gamma+1}-\boldsymbol{L}^{\gamma+1})\\&\quad=(-1)^\gamma G_{\gamma+1}(\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{L}),\boldsymbol{L}).\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{L})$ 为矩阵方程 $G_{\gamma+1}(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{L})=0$ 的根, 因而 (A.1) 成立.

附录 B

我们引入记号

$$\begin{aligned}&A_0(k)=1,\\&A_1(k)=\sum_{j=1}^{\gamma}\omega_j(k)=-(k+\alpha_\gamma),\\&A_2(k)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant\gamma}^{\gamma}\omega_i(k)\omega_j(k)=k^2+\alpha_\gamma k+\alpha_{\gamma-1},\\&A_3(k)=\sum_{1\leqslant i<j<l\leqslant\gamma}^{\gamma}\omega_i(k)\omega_j(k)\omega_l(k)=-(k^3+\alpha_\gamma k^2+\alpha_{\gamma-1}k+\alpha_{\gamma-2}),\\&\vdots\\&A_{\gamma-1}(k)=\sum_{j=1}^{\gamma}\frac{A_\gamma(k)}{\omega_j(k)}=(-1)^{\gamma-1}(k^{\gamma-1}+\alpha_\gamma k^{\gamma-2}+\alpha_{\gamma-1}k^{\gamma-3}+\cdots+\alpha_3k+\alpha_2),\\&A_\gamma(k)=\prod_{j=1}^{\gamma}\omega_j(k)=(-1)^\gamma(k^\gamma+\alpha_\gamma k^{\gamma-1}+\alpha_{\gamma-1}k^{\gamma-2}+\cdots+\alpha_2k+\alpha_1).\end{aligned}$$

附录 C

在 (3.2a) 中分别取 $i=0,1,2,\ldots,\gamma-1$ 并结合 (3.5) 可得矩阵 $\mathcal{L}_{\mathrm{GD}}$ 的前 γ 行元素. 令 $i=0$, 通过直接计算可知, (3.2b) 变为

$$(\widetilde{\boldsymbol{v}}^{(\gamma)})_1=-(C_0(\widetilde{\boldsymbol{v}}^{(0)})_1+C_1(\widetilde{\boldsymbol{v}}^{(1)})_1+C_2(\widetilde{\boldsymbol{v}}^{(2)})_1+\cdots+C_{\gamma-2}(\widetilde{\boldsymbol{v}}^{(\gamma-2)})_1+C_{\gamma-1}(\widetilde{\boldsymbol{v}}^{(\gamma-1)})_1)$$

$$+(-1)^{\gamma+1}G(k_1,p)(\boldsymbol{v}^{(0)})_1, \tag{C.1}$$

其中

$$C_i = A_{\gamma-i}(p) + (-1)^{\gamma-i}S^{(0,\gamma-i-1)} + \sum_{j=0}^{\gamma-i-2}(-1)^{j+1}A_{\gamma-i-1-j}(p)S^{(0,j)}, \quad i=0,1,2,\dots,\gamma-2,$$

$$C_{\gamma-1} = A_1(p) - S^{(0,0)}.$$

利用矩阵 $\mathcal{L}_{\mathrm{GD}}$ 的前 γ 行元素替换 $(\widetilde{\boldsymbol{v}}^{(0)})_1, (\widetilde{\boldsymbol{v}}^{(1)})_1, (\widetilde{\boldsymbol{v}}^{(2)})_1, \dots, (\widetilde{\boldsymbol{v}}^{(\gamma-1)})_1$, 易知 (C.1) 变为

$$(\widetilde{\boldsymbol{v}}^{(\gamma)})_1 = D_0(\boldsymbol{v}^{(0)})_1 + D_1(\boldsymbol{v}^{(1)})_1 + D_2(\boldsymbol{v}^{(2)})_1 + \cdots + D_{\gamma-2}(\boldsymbol{v}^{(\gamma-2)})_1 + D_{\gamma-1}(\boldsymbol{v}^{(\gamma-1)})_1 + D_\gamma(\boldsymbol{v}^{(\gamma)})_1, \tag{C.2}$$

其中

$$D_0 = -(p-\widetilde{u})C_0 + \sum_{i=1}^{\gamma-1}C_i\widetilde{S}^{(i,0)} + (-1)^{\gamma+1}G(k_1,p),$$

$$D_j = -pC_j - C_{j-1}, \quad j=1,2,\dots,\gamma-1,$$

$$D_\gamma = -C_{\gamma-1}.$$

将 $\{C_j\}$ 的定义代入 (C.2) 即可得矩阵 $\mathcal{L}_{\mathrm{GD}}$ 的最后一行元素的表达式.

Extended lattice Gel'fand-Dikii type hierarchies and solutions

ZHAO SongLin, FENG Wei, SHEN ShouFeng & SHI Ying

Abstract By generalized Cauchy matrix approach, we present some extended lattice Gel'fand-Dikii (GD) type hierarchies, including extended lattice GD hierarchy and extended modified lattice GD hierarchy. The hierarchies are expressed by scalar function $S^{(i,j)}$ defined on some certain points. By analyzing the eigenvalue structures of matrices $\boldsymbol{K}$ and $\boldsymbol{K}'$, we derive some solutions for the extended lattice GD hierarchies. The obtained solutions, including multi-soliton solutions and Jordan block solutions, contain γ-kinds of plane wave factors.

Keywords extended lattice GD type hierarchies, generalized Cauchy matrix approach, exact solutions

MSC(2010) 39A14, 35Q51

doi: 10.1360/012016-27