

一类循环加权子空间拟合法的绩效分析*

于宏毅 保 铮

(西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室, 西安 710071)

摘要 基于加权子空间拟合 (WSF) 的思想和循环相关矩阵估计量的渐近统计特性, 分析了循环平稳信号波达方向估计的一类加权子空间拟合法的绩效, 导出了这一类算法渐近估计方差的解析表达式, 并讨论了它们的性能.

关键词 循环平稳性 波达方向估计 阵列信号处理 性能分析

通信、雷达、声纳等许多人工信号都具有循环平稳性. 近年来, 针对循环平稳信号的波达方向 (DOA) 估计问题已引起了广泛的关注^[1~3]. 这种方法的特点在于假设所需信号具有循环平稳性, 而干扰信号和噪声不具有循环平稳性, 当快拍数较大时利用循环相关抑制了干扰信号, 因此就实现了有选择性的 DOA 估计. 本文分析了子空间数据矩阵为 $\mathbf{R}_{XX}^a(\tau)$ 一类的具有循环选择性的加权子空间拟合估计的渐近性能, 给出了其渐近分布和渐近方差的解析表达式, 并由此得出了一些有意义的结论.

1 模型

假定阵列位于一个平面内由 m 个阵元组成, 阵列流形已知. $d_s + d_i$ 个窄带信号被阵列接收, 其中有 $d_s (< m)$ 个所需的信号 $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_{d_s}(t)]^T$ 在循环频率 α 上具有循环平稳性. 它们相对于阵列参考系的方向入射角分别为 $\Theta_s = [\theta_1^{(1)}, \dots, \theta_{d_s}^{(d_s)}]$, 而其余的 d_i 个干扰信号和噪声 $\mathbf{n}(t)$ 没有这种循环平稳性, 并且所需信号, 干扰和噪声三者之间两两不相关. 阵列处理所用的模型可以写成

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\Theta_s)\mathbf{s}(t) + \mathbf{B}(\Theta_i)\mathbf{i}(t) + \mathbf{n}(t), \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (1.1)$$

其中, 第 1, 2 项分别是信号与干扰项, $\mathbf{A}(\Theta_s)$ 和 $\mathbf{B}(\Theta_i)$ 分别是它们的导向矢量矩阵. 时域上的循环平稳信号的阵列处理一般都是基于循环相关矩阵进行的. 有限快拍下, 循环频率为 α , 时间间隔为 τ 的循环相关矩阵估计为

$$\mathbf{R}_{XX}^a(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \mathbf{x}(t+\tau) \mathbf{x}^H(t) e^{-j2\pi\alpha\tau}, \quad (1.2)$$

在前面的假设下, 快拍数趋于无穷时, 上式将不含干扰和噪声项即

$$\mathbf{R}_{XX}^a(\tau) = \mathbf{A}(\Theta_s) \mathbf{R}_{ss}^a(\tau) \mathbf{A}^H(\Theta_s). \quad (1.3)$$

这就是具有循环选择性的 DOA 估计的根本所在. 下面在不引起混淆的情况下, 我们有时将

括号及其中的变量一起省去, 例如 $\mathbf{A}(\Theta_s)$ 省略为 $\mathbf{A}$.

2 循环相关矩阵估计的统计特性

为了分析 CWSF 算法的性能, 首先要研究 $\mathbf{R}_{XX}^a(\tau)$ 统计特性. 文献[4, 5]分别讨论了循环相关矩和矩阵估计的统计特性, 但是文献[4]给出了估计量的渐近分布, 因而更适合于此处应用. 在此我们将其推广到循环相关矩阵的估计, 首先介绍 $\mathbf{R}_{XX}^a(\tau)$ 的渐近无偏性^[4, 5]:

性质 2.1 $E[\mathbf{R}_{XX}^a(\tau)] = \mathbf{R}_{XX}^a(\tau) + o(1/N)$.

性质 2.2 当 $\mathbf{x}(t)$ 中的元素满足文献[5]中定理 2.1 的条件时, $\sqrt{N}(\mathbf{R}_{XX}^a(\tau) - \mathbf{R}_{XX}^a(\tau))$ 中的所有元素服从零均值渐近联合 Gauss 分布.

为了较明确的物理概念和讨论方便, 此处只给出 $\mathbf{x}(t)$ 满足零均值 Gauss 假设下的 $\mathbf{R}_{XX}^a(\tau)$ 中任意两列之间的渐近和渐近共轭协方差矩阵表达式:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{uv} = \lim_{N \rightarrow \infty} N \text{COV}\{\hat{\mathbf{r}}_u, \hat{\mathbf{r}}_v\} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2, \\ \mathbf{I}_1 = \sum_{\beta, \xi} \mathbf{R}_{XX}^{\beta}(\xi) r_{uv}^{\beta*}(\xi) e^{-j2\pi(\alpha\xi - \beta\tau)}, \\ \mathbf{I}_2 = \sum_{\beta, \xi} \mathbf{R}_{Xx_v}^{\beta*}(\xi + \tau) \mathbf{R}_{x_u X}^{\beta*}(\xi - \tau) e^{-j2\pi(\alpha\xi - \beta\tau)}, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{uv}^* = \lim_{N \rightarrow \infty} N \text{COV}\{\hat{\mathbf{r}}_u, \hat{\mathbf{r}}_v^*\} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2, \\ \mathbf{J}_1 = \sum_{\beta, \xi} \mathbf{R}_{XX}^{\beta}(\xi) r_{uv}^{(\beta - 2\alpha)*}(\xi) e^{-j2\pi(\alpha\xi - \beta\tau)}, \\ \mathbf{J}_2 = \sum_{\beta, \xi} \mathbf{R}_{Xx_v}^{\beta}(\tau + \xi) \mathbf{R}_{Xx_u}^{(2\alpha - \beta)\top}(\tau - \xi) e^{-j2\pi(\alpha - \beta)\xi}, \end{array} \right. \quad (2.2)$$

式中, $\hat{\mathbf{r}}_u$ 代表 $\mathbf{R}_{XX}^a(\tau)$ 的第 u 列(本文下面对其他矩阵也同样表达); $\text{COV}()$ 表示两个复随机向量的互协方差矩阵, $\mathbf{R}_{Xx_u}^a(t)$ 代表向量 $\mathbf{x}(t)$ 与其第 u 个元素 $x_u(t)$ 的循环相关向量, $r_{uv}^{a(*)}(\tau) = (\mathbf{R}_{XX}^{a(*)}(\tau))_{uv}$. 这个性质从文献[3]中定理 2.1 出发, 利用矩阵和累量的相互关系就可以证明, 此处略去. 由这个性质不难得到循环相关矩阵估计的一致性:

性质 2.3 $\mathbf{R}_{XX}^a(\tau) = \mathbf{R}_{XX}^a(\tau) + o(1/\sqrt{N})$.

3 循环加权子空间拟合法及其性能分析

3.1 循环加权子空间拟合法及与 CLS 的关系

许多 DOA 估计方法都可以统一到加权子空间拟合法的框架中去^[6]. 对于具有循环选择的 DOA 估计也存在同样的框架, 即具有循环选择性的加权子空间拟合法(CWSF):

$$\min_{\Phi_s, T} \|\Phi_s \mathbf{W}^{1/2} - \mathbf{A}(\Theta_s) \mathbf{T}\|_2^2, \quad (3.1)$$

$$\text{Range}(\Phi_s) \subseteq \text{Range}(\mathbf{A}(\Theta_s)). \quad (3.2)$$

(3.1) 式中 Φ_s 式中为对快拍数据 $\mathbf{x}(t)$ 循环滤波处理(包括: 循环相关, 谱相关, 循环累量等)得到的一个 $m \times q$ 维复矩阵; 这个所需信号的子空间估计矩阵的列空间 $\text{Range}(\Phi_s)$ 在快拍数较大时应近似地只由所需信号的导向矢量张成, 当快拍数趋于无穷时应满足(3.2)式要求即 Φ_s 的列空间此时应完全落在具有循环平稳性的所需信号导向矢量矩阵 $\mathbf{A}(\Theta_s)$ 张成的子空间中,

因此在快拍数较大时就具有了循环选择性. 这里约束加权矩阵 $\mathbf{W}$ 为正定 Hermite 阵. 显然, Θ_s 可以有多种选择, 例如 $\mathbf{R}_{XX}^a(\tau)$ 和多频带谱相关矩阵等. 然而, 本文只分析 $\Theta_s = \mathbf{R}_{XX}^a(\tau)$ 的这一类 CWSF 渐近性能, 它的 DOA 估计解为

$$\Theta_s = \arg \max_{\Theta_s} \text{tr}\{\mathbf{P}_A \mathbf{R}_{XX}^a \mathbf{W} \mathbf{R}_{XX}^{aH}\}, \quad (3.3)$$

式中 $\mathbf{P}_A$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的投影矩阵, $\text{tr}\{\}$ 是矩阵求迹运算. 文献[3]中提出的循环最小二乘算法 (CLS) 是具有循环选择性的 DOA 估计的重要方法之一, 对于这种方法有

$$\Theta_s = \mathbf{R}_{XX}^a(\tau), \quad \mathbf{W} = \mathbf{R}_{XX}^{-1}(0), \quad (3.4)$$

显然它是这一类 CWSF 中加权矩阵为 $\mathbf{R}_{XX}^{-1}(0)$ 的一个特例.

3.2 一类 CWSF 的性能分析

设 $\alpha \neq 0$ 并且记 $V(\Theta) \triangleq \text{tr}\{\mathbf{P}_A(\Theta) \mathbf{R}_{XX}^a \mathbf{W} \mathbf{R}_{XX}^a\}$, $\bar{V}(\Theta) \triangleq \text{tr}\{\mathbf{P}_A(\Theta) \mathbf{R}_{XX}^a \mathbf{W} \mathbf{R}_{XX}^a\}$, $V_\eta \triangleq (V(\Theta)_s)_\eta$, $\mathbf{P}_\eta \triangleq \frac{\partial \mathbf{P}_A(\Theta_s)}{\partial \theta_\eta}$; 让 $\mathbf{A}^+$, $\mathbf{A}^T$, $\mathbf{A}^H$, $\mathbf{P}_A^\perp$ 分别表达 $\mathbf{A}$ 矩阵的伪逆、转置、共轭转置和向其正交补空间的投影矩阵, 则有

引理 3.1

$$V_\eta = 2\text{Re}\left\{\sum_{k=1}^m \mathbf{w}_k^H \mathbf{R}_{XX}^{aH} \mathbf{A}^{+H} \mathbf{A}_\eta^H \mathbf{P}_A^\perp \tilde{\mathbf{r}}_k\right\} + O(1/N), \quad (3.5)$$

式中 $\tilde{\mathbf{r}}_k = \hat{\mathbf{r}}_k - \mathbf{r}_k$ (证明略).

从这一引理出发, 可以得到由下面定理描述的这一类 CWSF 估计的渐近分布.

定理 3.1 在性质 2.1, 性质 2.2 成立的条件下, (3.3) 式的估计量服从渐近零均值 Gauss 分布:

$$\sqrt{N}(\Theta_s - \Theta_s) \sim \mathcal{N}(0, C),$$

其中

$$C = \lim_N N \text{COV}\{\Theta_s, \Theta_s\} = \{\bar{\mathbf{V}}'(\Theta_s)\}^{-1} \mathbf{Q} \{\bar{\mathbf{V}}'(\Theta_s)\}^{-1}, \quad (3.6)$$

$$\bar{\mathbf{V}}'(\Theta_s) = -2\text{Re}\left[(\mathbf{D}^H \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{D}) \odot (\mathbf{A}^+ \mathbf{R}_{XX}^a \mathbf{W} \mathbf{R}_{XX}^{aH} \mathbf{A}^{+H})^T\right], \quad (3.7)$$

其中 $\odot$ 代表 Hadamard 积. 而 $\mathbf{Q}$ 矩阵的元素为

$$Q_{\eta\xi} = 2\text{Re}\left[\sum_{l,k} (\mathbf{w}_k^H \Gamma_\eta^H \Delta_{kl} \Gamma_\xi \mathbf{w}_l + \mathbf{w}_k^H \Gamma_\eta^H \Delta_{kl}^* \Gamma_\xi^* \mathbf{w}_l^*)\right], \quad (3.8)$$

其中 $\Gamma_\eta = \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{A}_\eta \mathbf{A}^+ \mathbf{R}_{XX}^a \mathbf{D} = \left[\frac{d\alpha(\theta_1)}{d\theta_1}, \frac{d\alpha(\theta_2)}{d\theta_2}, \dots, \frac{d\alpha(\theta_{d_s})}{d\theta_{d_s}}\right]$. 该定理证明见附录 A.

在 $\mathbf{x}(t)$ 满足零均值 Gauss 假设下, 把(2.1) (2.2) 式代入就可以得到估计方差的最终表达式. 通常加权矩阵 $\mathbf{W}$ 都与数据有关, 需要从数据中估计得到, CLS 就是如此, 针对这种情况与文献[6]中的引理 5 同样有:

引理 3.2 若 $\mathbf{W}$ 是加权矩阵 $\mathbf{W}$ 的一致估计, 则用 $\hat{\mathbf{W}}$ 取代 $\mathbf{W}$ 不改变(3.3) 式 Θ_s 的渐近分布.

3.3 几种情况下的渐近性能讨论

为了更好的理解物理概念, 下面考虑 $\mathbf{x}(t)$ 是零均值 Gauss 过程下几种情况的这一类 CWSF 估计的渐近方差.

情况 1 干扰是平稳过程, 噪声是平稳白噪声.

假设 1 $\mathbf{R}_{ii}^{\alpha*}(\tau) = \mathbf{R}_{ii}(\tau) \delta(\alpha)$, $\mathbf{R}_{ii}^{\alpha*}(\tau) = 0$,

假设 2 $\mathbf{R}_{nn}^{\alpha}(\tau) = \mathbf{R}_{nn}(0) \delta(\tau) \delta(\alpha)$, $\mathbf{R}_{nn}^{\alpha*}(\tau) = 0$.

将干扰和噪声合起来记作: $\mathbf{q}(\Theta_i, t) \triangleq \mathbf{B}(\Theta_i) \mathbf{i}(t) + \mathbf{n}(t)$. 此时这种 CWSF 估计渐近方差为

$$\text{COV}[\Theta_s, \Theta_s] = \frac{1}{N} \mathbf{C} + o\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{N} \{ \mathbf{V}'(\Theta_s) \}^{-1} \mathbf{Q} \{ \mathbf{V}'(\Theta_s) \}^{-1} + o\left(\frac{1}{N}\right), \quad (3.9)$$

此时的 $\mathbf{Q}$ 为:

$$\mathbf{Q} = 2\text{Re} \left[\sum_{\xi=-\infty}^{+\infty} [(\mathbf{D}^H \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{R}_{qq}(\xi) \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{D}) \odot (\mathbf{R}_{ss}^{\alpha}(\tau) \mathbf{A}^H(\Theta_s) \mathbf{W} \mathbf{R}_{XX}^H(\xi) \cdot \mathbf{W} \mathbf{A}(\Theta_s) \mathbf{R}_{ss}^{\alpha H}(\tau))^T] e^{-j2\pi\alpha\xi} \right], \quad (3.10)$$

当干扰是时间白色过程时, $\mathbf{Q}$ 就变成

$$\mathbf{Q} = 2\text{Re} [(\mathbf{D}^H \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{R}_{qq}(0) \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{D}) \odot (\mathbf{R}_{ss}^{\alpha}(\tau) \mathbf{A}^H(\Theta_s) \mathbf{W} \mathbf{R}_{XX}(0) \mathbf{W} \mathbf{A}(\Theta_s) \mathbf{R}_{ss}^{\alpha H}(\tau))^T]. \quad (3.11)$$

情况 2 无干扰, 白噪声 CLS 算法的渐近方差.

假设 3 $\mathbf{R}_{qq}^{\alpha}(\tau) = \sigma_q^2 \mathbf{I} \delta(\tau) \delta(\alpha)$; $\mathbf{R}_{qq}^{\alpha*}(\tau) = 0$.

此时有: $\mathbf{R}_{XX}^{\alpha}(\tau) = \mathbf{A}(\Theta_s) \mathbf{R}_{ss}^{\alpha}(\tau) \mathbf{A}^H(\Theta_s) + \sigma_q^2 \mathbf{I} \delta(\tau) \delta(\alpha)$ 把此式和 CLS 权矩阵代入 (3.9) 式, 得

$$\text{COV}[\Theta_s, \Theta_s] = \frac{1}{2N} \sigma_q^2 \{ \text{Re} [(\mathbf{D}^H \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{D}) \odot (\mathbf{R}_{ss}^{\alpha}(\tau) \mathbf{A}^H(\Theta_s) \mathbf{R}_{XX}^{-1}(0) \mathbf{A}(\Theta_s) \mathbf{R}_{ss}^{\alpha H}(\tau))^T] \}^{-1} + o(1/N), \quad (3.12)$$

如果再假设: 所需信号不相关; 当 m 足够大时, 有 $\frac{1}{m} \mathbf{A}^H(\Theta_s) \mathbf{A}(\Theta_s) \rightarrow \mathbf{I}$, 此时 CLS 的 DOA 估计渐近方差退化为

$$\text{Var}(\Theta_k) \approx \frac{1}{2N h_{kk} |\varrho_{s_k}^{\alpha}(\tau)|^2 \text{SNR}_k} \left| 1 + \frac{1}{m \text{SNR}_k} \right|, \quad (3.13)$$

其中 $k = 1, 2, \dots, d_s$, $h_{kk} = (\mathbf{D}^H \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{D})_{kk}$, SNR_k 为第 k 个信号不取对数的信噪比, $\varrho_{s_k}^{\alpha}(\tau)$ 为第 k 个信号的特征强度^[7]. 此式证明用到了矩阵求逆引理, 此处证明略去. (3.13) 式与文献[3]中 Cyclic MUSIC 同样情况下的表达式是完全一样的. 与一般的 ML 相比同样有

$$\frac{\text{Var}(\Theta_k)_{\text{CLS}}}{\text{Var}(\Theta_k)_{\text{ML}}} = |\varrho_{s_k}^{\alpha}(\tau)|^{-2} \geq 1, \quad (3.14)$$

又一次说明在没有干扰的情况下, 循环选择性 DOA 估计方法一般比常规方法要差^[2]. 循环相关性越弱, 性能越差.

4 渐近方差的数值分析及仿真实验

虽然一类 CWSF 的估计方差表达式已给出, 但在大多数情况下都很繁琐, 要用数值分析的方法来研究性能. 在此, 我们给出一些典型情况下的结果, 得出的结论一般具有普遍性. 研究情况与参数: 算法主要使用 CLS; 阵列选用四元的均匀线阵, 入射角指的是与线阵法线方向

夹角, 阵元间距为半波长, 快拍数定在 2 048; 噪声和干扰都假设是白 Gauss 过程; 因此下面数值分析是基于(3.9)式, 其中的 $\mathbf{Q}$ 用(3.11)式. 模拟实验中, 用 1 000 次独立实验的平均值作为均方根误差(RMSE)的估计.

4.1 CLS 与一般的 ML^[6] 比较

两个不相关的特征强度(图中用 ρ 表示) 相等的循环平稳信号从 $-5^\circ, 5^\circ$ 入射, 无干扰, 结果见图 1. 显见, 在这种比较一般的条件下, 也有: 当信号的特征强度为 1 时, CLS 才与 ML 性能基本相同, 否则 CLS 不如 ML; 而且 CLS 随信号的特征强度越大, 性能越好. 图 2 在上述情况下再加入一个 0° 入射的干扰, 强度等于信号强度, 此时 CLS 比 ML 普遍要好.

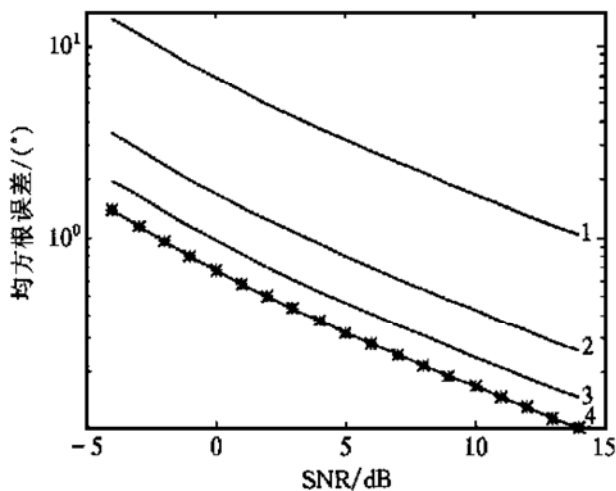


图 1 无干扰时 CLS 和 ML 的比较

实线 1~4 示 CLS, 星号示 ML

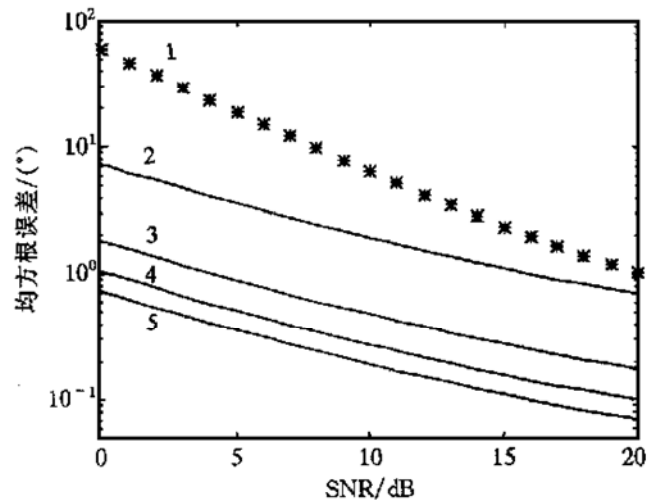


图 2 有干扰时 CLS 和 ML 的比较

实线 2~5 示 CLS, 星号示 ML

4.2 CLS 性能与干扰入射角的关系

与 4.1 节同样的信号, 只是固定信号特征强度 $\rho = 0.5$, 加入一个干扰, 信干比 $SIR = 0$ dB, 让干扰的入射角全空域变化, 结果见图 3. 可以看出当 SNR 低于 SIR 时, 此时噪声占主导地位, 性能几乎与干扰入射角无关; 当 SNR 高于 SIR 时, 此时干扰占主导地位, 性能与干扰从何处到来有关.

4.3 CLS 性能与的 CWSF 比较

文献[1]中指出, 在模拟实验中发现: 如果省去 CLS 的加权矩阵(即: 加权矩阵为单位阵的 CWSF), 性能变化不大. 从(3.9)式出发, 我们可以研究这种不加权的 CWSF 的估计方差, 信号和干扰条件除了信干比为 -10 dB 外与 4.2 节相同, 结果见图 4. 当 SNR 高于 SIR 时, 并且干扰入射角在两个信号邻近时, 两者估计方差很接近, 但在其余空域, 明显不加权的 CWSF 要比 CLS 差很多. 原因在于 CLS 具有空域滤波作用, 而权为单位阵的 WSF 无此作用, 而在信号邻近角度空域滤波不起作用. 这说明 CLS 还是有好处的.

4.4 计算机模拟实验结果与理论推导结果的比较

选择两个不相关的 Gauss PAM 信号为所需的循环平稳信号, 循环频率为码元速率, 信号经 100% 升余弦滚降, 也就决定了信号的特征强度为 $1/6^{[2]}$, 两个信号入射角是 $-5^\circ, 5^\circ$. 图 5 中加入单个干扰($SIR = 0$ dB); 图 6 中, 3 个与信号等强度的干扰从 $-3^\circ, 0^\circ, 3^\circ$ 入射, 注意这时信号与干扰个数的和已超过阵元个数; 由两图可见实验与理论预计相吻合.

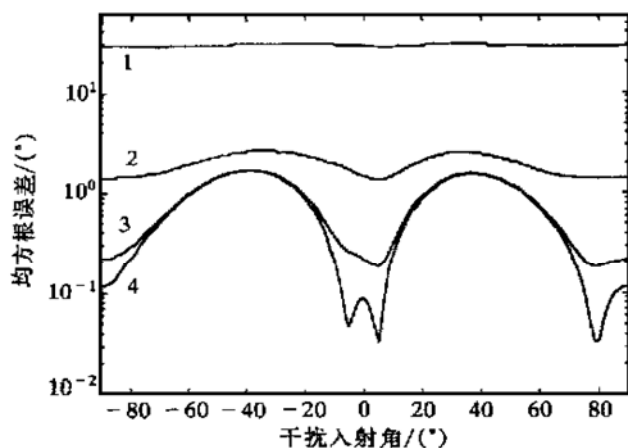


图 3 均方根误差-干扰入射角的关系图

1 为 SNR = -15 dB, 2 为 SNR = 0 dB, 3 为 SNR = 15 dB,
4 为 SNR = 30 dB

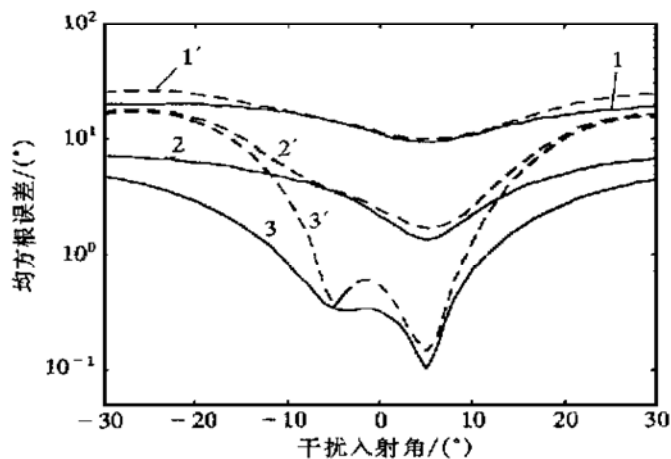


图 4 CLS 与无加权的 CWSF 的比较

1, 1' 为 SNR = -10 dB; 2, 2' 为 SNR = 0 dB; 3, 3' 为 SNR = 20 dB, 实线为 CLS, 虚线为不加权的 CWSF

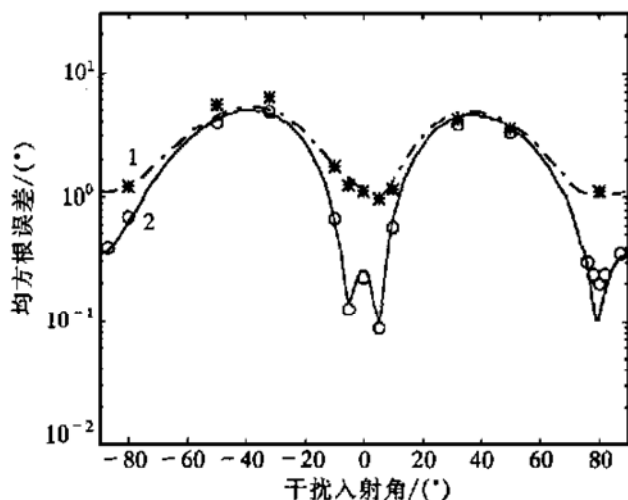


图 5 均方根误差-干扰入射角的模拟实验与理论结果比较

1 为 SNR = 10 dB, 2 为 SNR = 30 dB, *, o 示模拟实验结果, 连线示理论结果

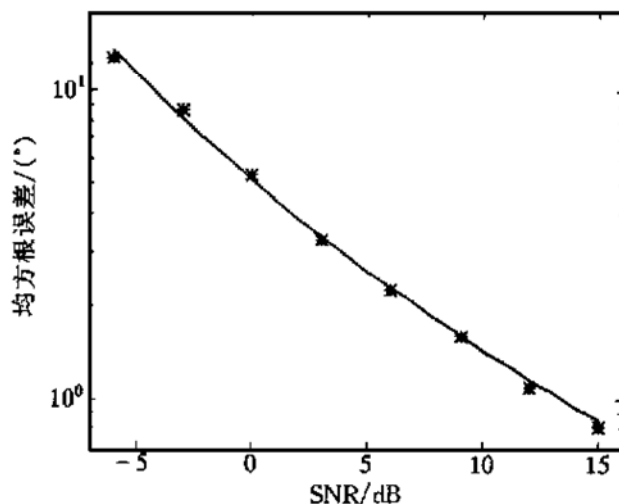


图 6 均方根误差-SNR 的模拟实验与理论结果比较

* 示模拟实验结果, 实线示理论结果

5 结论

本文在给出子空间数据矩阵为 $\mathbf{R}_{XX}^a(\tau)$ 的一类 CWSF 渐近估计方差表达式的基础上得出如下结论: 首先这一类 CWSF 算法与信号特征强度很有关系, 它越接近于 1, 性能越好, 因而提高这一类 CWSF 算法的途径之一是提高信号的特征强度; 其次该算法与干扰入射角有关, 在一定范围内, 干扰越接近所需信号, 性能越优良; 最后 CLS 与不加权这两种 CWSF 方式, 只有当干扰与信号入射角靠近时, 性能才接近, 否则还是有较大的差别。

参 考 文 献

- 1 Schell S V. An overview of sensor array processing for cyclostationary signals. In: Gardner W A, ed. Cyclostationarity in

Communications and Signal Processing. New York: IEEE Press, 1994

- 2 Schell S V. Performance analysis of the cyclic MUSIC method of direction estimation for cyclostationary signals. IEEE Trans on SP, 1994, SP-42(11): 3040~ 3050
- 3 Schell S V, Gardner W A. Signal selective high resolution direction finding in multipath. In: ICASSP'90, 1990. 1 418~ 1 422
- 4 Dandawate A V, Giannakis G B. Asymptotic theory of mixed time averages and k th order cyclic moment and cumulant statistics. IEEE Trans on IT, 1995, IT-41(1): 216~ 232
- 5 Schell S V. Asymptotic moments of estimated cyclic correlation matrices. IEEE Trans SP, 1995, SP-43(1): 173~ 180
- 6 Viberg M, Otterstern B. Sensor array processing based on subspace fitting. IEEE Trans SP, 1991, SP-39(5): 1 110~ 1 121
- 7 Gardner W A. Statistical Spectral Analysis: A Nonprobabilistic Theory. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1987

附录 A

定理 3.1 的证 因为(3.3)式是一个求极值问题, 所以有: $\mathbf{V}'(\Theta_s) = 0$. 再把 $\mathbf{V}'(\Theta)$ 在真实值 Θ_s 点附近 Taylor 级数展开, 只保留一阶项: $\mathbf{V}'(\Theta) \approx \mathbf{V}'(\Theta_s) + \mathbf{V}''(\Theta_s)(\Theta - \Theta_s)$, 进一步考虑到 $\mathbf{V}''(\Theta_s) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathbf{V}''(\Theta_s)$, 那么, $\mathbf{V}'(\Theta_s) + \mathbf{V}''(\Theta_s)(\Theta - \Theta_s) \approx 0$, 即

$$(\Theta - \Theta_s) \approx [\mathbf{V}''(\Theta_s)]^{-1} \mathbf{V}'(\Theta_s). \quad (\text{A1})$$

由引理 3.1, 性质 2.2 和 Gauss 随机变量的线性组合还是高斯分布这一结论得

$$\sqrt{N} \mathbf{V}'(\Theta_s) \sim \mathcal{AN}(0, Q). \quad (\text{A2})$$

其中 $Q = \lim_{N \rightarrow \infty} N E\{\mathbf{V}'(\Theta_s) \mathbf{V}'^T(\Theta_s)\}$. 由(A1)式进一步得

$$\sqrt{N}(\Theta - \Theta_s) \sim \mathcal{AN}(0, C), \quad (\text{A3})$$

由于 $\text{Re}(x)\text{Re}(y) = \frac{1}{2}\text{Re}(xy) + \frac{1}{2}\text{Re}(xy^*)$, 再经一些运算就有

$$Q_{\mathbf{r}\xi} = \lim_{N \rightarrow \infty} N E\{V_{\mathbf{r}}(\Theta_s) V_{\xi}(\Theta_s)\} = 2\text{Re} \left| \sum_{l,k} (\mathbf{w}_k^H \Gamma_{\eta}^H \Delta_{kl} \Gamma_{\xi} \mathbf{w}_l + \mathbf{w}_k^H \Gamma_{\eta}^H \Delta_{kl}^* \Gamma_{\xi}^* \mathbf{w}_l^*) \right|, \quad (\text{A4})$$

这就证明了(3.8)式. 另外, 记 $\mathbf{P}_{\mathbf{r}\xi} = \frac{\partial^2 \mathbf{P}_A(\Theta_s)}{\partial \theta_{\eta} \partial \theta_{\xi}}$, 由于文献[6]的(B.5)式, 并且注意到 $\mathbf{P}_A^{\perp} \mathbf{R}_{XX}^a = 0$, 就得

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{r}\xi}^a &= \text{tr}\{\mathbf{P}_{\mathbf{r}\xi} \mathbf{R}_{XX}^a \mathbf{W} \mathbf{R}_{XX}^{aH}\} = -2\text{Re}[\text{tr}\{\mathbf{A}_{\eta}^H \mathbf{P}_A^{\perp} \mathbf{A}_{\xi}^+ \mathbf{R}_{XX}^a \mathbf{W} \mathbf{R}_{XX}^{aH} \mathbf{A}^{+H}\}] = \\ &= -2\text{Re}[(\mathbf{D}^H \mathbf{P}_A^{\perp} \mathbf{D})_{\mathbf{r}\xi} \times (\mathbf{A}^+ \mathbf{R}_{XX}^a \mathbf{W} \mathbf{R}_{XX}^{aH} \mathbf{A}^{+H})_{\mathbf{r}\xi}^T], \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

写成矩阵形式也就是(3.7)式. 证毕.