中国科学: 数学　2024 年　第 54 卷　第 12 期: 2155～2178
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark
click for updates
综　述

Prandtl 方程在 Gevrey 空间的适定性

献给中山大学建校百年暨中山大学数学学科建设 100 周年

李维喜[1], 杨彤[2*]

1. 武汉大学数学与统计学院, 武汉 430072;
2. 香港理工大学应用数学系, 香港
E-mail: wei-xi.li@whu.edu.cn, t.yang@polyu.edu.hk

收稿日期: 2024-06-25; 接受日期: 2024-08-29; 网络出版日期: 2024-09-13; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 12325108)、中央高校基本科研业务费专项、General Research Fund of Hong Kong (批准号: 11318822) 以及香港理工大学非线性分析研究中心资助项目

摘要　Prandtl 方程属于退化型方程 (组), 其中非局部项有一阶切向导数的损失, 这是 Prandtl 方程典型的退化特征. 证明 Prandtl 方程适定性理论的关键之处在于如何克服导数损失, 目前主要有两个框架. 第一个框架对初始值有结构性假设限制, 在 Oleinik 单调性条件下, 通过 Crocco 坐标变换或者采用速度方程和旋度方程之间的消去机制, 来克服导数损失, 进而在 Sobolev 空间中建立其适定性理论. 第二个框架对初始值有解析正则性要求, 从而可以采用抽象 Cauchy-Kovalevskaya 定理证明 Prandtl 方程在解析空间中的适定性. 本文主要讨论在没有任何结构性假设条件下, 如何降低初始值的解析正则性, 在较弱的 Gevrey 空间证明 Prandtl 方程的适定性, 侧重介绍如何结合抽象 Cauchy-Kovalevskaya 定理以及消去机制, 在 Gevrey 框架下刻画切向导数的损失.

关键词　Prandtl 方程　适定性　Gevrey 空间

MSC (2020) 主题分类　35Q30, 35Q31, 35Q35

1　Prandtl 方程简介

边界层理论描述有界区域中粘性流体在高雷诺数情形下的渐近行为. 早期经典的流体动力学理论主要基于描述理想 (无粘) 流体的 Euler 方程的研究, 但是与理想流体相比, 小粘性流体 (例如水、空气等) 在实际应用中更为广泛. 为了研究这类流体的动力学性质, 一个自然的思想是将其视为无粘的理想 Euler 流附近的小扰动问题, 因而小粘性流体与其高雷诺数极限情形下的理想流体有高度类似的动力学行为. 但是理想流体模型的一个缺陷是: 其无法刻画剪切力 (例如摩擦阻力) 对粘性流体在障碍物附近的运动状态的影响, 而实验物理的结果显示摩擦阻力对流体的影响并不可以忽略不计.

英文引用格式: Li W-X, Yang T. Gevrey well-posedness for the Prandtl equation (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 2155–2178, doi: 10.1360/SSM-2024-0214

缺少剪切力的作用, 理想流体在惯性力的作用下在障碍物边界附近的切向速度一般不为 0, 但另一方面, 由于摩擦阻力的存在, 实际的粘性流体会依附在障碍物表面, 此时其法向和切向速度均为 0 (非滑移边界条件). 因为边界条件的不一致性, 所以在边界附近用理想流体来近似刻画小粘性流体的运动状态是不合理的. 1904 年, Prandtl (普朗特) 提出著名的边界层理论来刻画粘性对流体在边界附近运动的影响. Prandtl 将高雷诺数流动区域划分为两部分, 在边界附近用 Prandtl 边界层方程来刻画, 此时小粘性在流体的运动演化中具有重要的作用; 而在远离边界处可以用无粘理想 Eular 流来近似描述, 此时粘性的影响可以忽略不计. Prandtl 边界层这一理论在力学、工程科学领域得到广泛应用. Prandtl 的边界层理论是 100 多年来流体力学发展的重要基石, 不仅在物理和工程中具有广泛应用, 而且在非线性退化偏微分方程领域具有重要意义.

如何从数学理论上严格验证 Prandtl 边界层理论是一个极其困难的问题, 这其中涉及到 Prandtl 方程的适定性问题以及相关的高雷诺数的极限. 本综述侧重介绍近期关于 Prandtl 方程的适定性理论的工作. Prandtl 方程的数学研究有着悠久的历史, 目前已有比较完善的理论. 在这些工作中, 主要有两个框架: 一个是 Sobolev 空间的适定性, 这部分的结果主要依赖于 Oleinik 单调性假设以及空间维数为 2 的限制, 三维空间中的 Sobolev 框架下适定性理论结果甚少; 另一个框架是解析空间或者更弱的 Gevrey 空间, 此时对初始值没有任何结构性的限制, 而且适定性结果对二维或者三维空间均适用.

1.1 Gevrey 类函数空间

给定一个区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, 区域 Ω 中指标为 $\sigma\geqslant 1$ 的 Gevrey 类空间 $G^\sigma(\Omega)$ 是由所有满足如下条件的光滑函数 $x\mapsto f(x)$ 构成的集合: 对于 Ω 中任意的紧子集 K, 存在仅依赖于 K 的常数 $C_K>0$, 使得

$$\forall\,\alpha\in\mathbb{Z}_+^n,\quad \sup_{x\in K}|\partial^\alpha f(x)|\leqslant C_K^{|\alpha|+1}(|\alpha|!)^\sigma.$$

根据定义, 如果 $f\in G^\sigma(\Omega)$, 则对任意 $x_0\in\Omega$, 存在 x_0 的一个开邻域 B_{x_0}, 使得对任意的 $x\in B_{x_0}$ 有

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}\frac{\partial^\alpha f(x_0)}{(\alpha!)^\sigma}(x-x_0)^\alpha<+\infty.$$

特别地, 当 $\sigma=1$ 时 $G^\sigma(\Omega)$ 即为 Ω 中的实解析函数的集合. 关于 Gevrey 类函数的详细性质, 可参见 Rodino 的专著 [39]. 在接下来的讨论中, 我们首先介绍如下两个等价的关于 Gevrey 类函数的判定方法.

- 如果 Ω 为全空间或者周期区域, 则

$$\mathrm{e}^{c(-\Delta_x)^{1/2\sigma}}f\in L^2(\Omega)\Rightarrow f\in G^\sigma(\Omega),$$

其中 $c>0$, 而 $\mathrm{e}^{c(-\Delta_x)^{1/2\sigma}}$ 为象征为 $\mathrm{e}^{c|\xi|^{1/\sigma}}$ 的 Fourier 乘子.

- 如果存在 $\rho>0$, 使得

$$\sup_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}\frac{\rho^{|\alpha|+1}}{(\alpha!)^\sigma}\|\partial_x^\alpha f\|_{L^2(\Omega)}<+\infty,$$

则 $f\in G^\sigma(\Omega)$.

本文将主要采用后一个判别方法. 为了处理非线性问题, 我们需将上面的 Gevrey 因子

$$\frac{\rho^{|\alpha|+1}}{(\alpha!)^\sigma}$$

替换成

$$\frac{\rho^{|\alpha|+1}(|\alpha|+1)^r}{(\alpha!)^\sigma},$$

其中 r 为固定的足够大的整数, 这一替换对 Gevrey 指标没有影响, 仅仅改变了 Gevrey 类函数的收敛半径.

1.2 Prandtl 边界层方程的推导

当粘性 Newton 流体在带物理边界区域中运动时, 由于流体与边界的黏性力, 在边界附近会形成一层很薄的流体层. 在边界层内部区域, 流体的运动状态由 Prandtl 方程所刻画, 而在远离边界的区域, 流体的运动则满足无粘 Euler 方程. 通过省略非本质项的 Prandtl 拟设 (Prandtl's ansatz) 来简化 Navier-Stokes 方程, Prandtl 在 1904 年得到了著名的以其名字命名的边界层方程. 简单起见, 我们仅考虑二维上半平面 $\mathbb{R}^2_+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}\times\,]0, +\infty[\}$ 的平板边界层, 此时粘性不可压 Newton 流体的运动状态由经典的 Navier-Stokes 方程所描述:

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + u^\varepsilon \partial_{x_1} u^\varepsilon + v^\varepsilon \partial_{x_2} u^\varepsilon - \varepsilon^2(\partial^2_{x_1} + \partial^2_{x_2})u^\varepsilon + \partial_{x_1} p^\varepsilon = 0, \\ \partial_t v^\varepsilon + u^\varepsilon \partial_{x_1} v^\varepsilon + v^\varepsilon \partial_{x_2} v^\varepsilon - \varepsilon^2(\partial^2_{x_1} + \partial^2_{x_2})v^\varepsilon + \partial_{x_2} p^\varepsilon = 0, \\ \partial_{x_1} u^\varepsilon + \partial_{x_2} v^\varepsilon = 0, \\ (u^\varepsilon, v^\varepsilon)|_{t=0} = (u^\varepsilon_0, v^\varepsilon_0). \end{cases} \tag{1.1}$$

这里我们考虑非滑移边界条件:

$$u^\varepsilon|_{x_2=0} = v^\varepsilon|_{x_2=0} = 0. \tag{1.2}$$

形式上, 令 $\varepsilon \to 0$, 我们期望上述 Navier-Stokes 方程的解收敛到经典的无粘 Euler 方程的解; 另一方面, 对于 Euler 方程而言, 虽然其法向速度在边界处为 0, 但其切向速度在边界处一般不为 0. 故在边界附近, Navier-Stokes 方程初边值问题 (1.1)–(1.2) 关于 Euler 方程的渐近展开是不合理的. 为了克服 Navier-Stokes 方程与其极限 Euler 方程的切向速度在边界上的不匹配问题, Prandtl 引入如下的关于 ε 的拟设展开:

$$\begin{cases} u^\varepsilon(t, x_1, x_2) = u^E(t, x_1, x_2) + u^b(t, x, y) + O(\varepsilon), \\ v^\varepsilon(t, x_1, x_2) = v^E(t, x_1, x_2) + \varepsilon v^b(t, x, y) + O(\varepsilon^2), \\ p^\varepsilon(t, x_1, x_2) = p^E(t, x_1, x_2) + p^b(t, x, y) + O(\varepsilon), \end{cases} \tag{1.3}$$

其中我们采用记号 $(x, y) = (x_1, x_2/\varepsilon)$, 并假设 u^b, v^b, p^b 当 $y \to +\infty$ 时以多项式衰减速率趋于 0. 同样地, 对初始值做类似的拟设展开.

边界条件与不可压条件 将 (1.3) 的第一个与第二个方程代入 (1.2), 则

$$u^E(t, x_1, 0) + u^b(t, x, 0) + O(\varepsilon) = v^E(t, x_1, 0) + \varepsilon v^b(t, x, 0) + O(\varepsilon^2) = 0,$$

即

$$u^E(t,x_1,0)+u^b(t,x,0)=v^E|_{y=0}=v^b(t,x,0)=0. \tag{1.4}$$

类似地, 将 (1.3) 代入到 (1.1) 中的第三个方程, 可得

$$\partial_{x_1}u^E+\partial_{x_2}v^E=0,\quad \partial_x u^b+\partial_y v^b=0.$$

边界附近区域以及远离边界区域的方程　将 (1.3) 代入到 Navier-Stokes 方程 (1.1) 中, 并比较 ε 的各幂次的系数.

ε 的负次幂: ε^{-1}. 此时我们有

$$\partial_y p^b\equiv 0.$$

进一步地, 联立上述方程以及先验假设条件: $\lim_{y\to+\infty}p^b(t,x,y)=0$, 我们可推导出

$$p^b\equiv 0.$$

ε 的零次幂: ε^0. 此时对应的方程为

$$\begin{cases}\partial_t u^E(t,x_1,x_2)+\partial_t u^b(t,x,y)\\ \quad +(u^E(t,x_1,x_2)+u^b(t,x,y))\partial_{x_1}(u^E(t,x_1,x_2)+u^b(t,x,y))\\ \quad +v^E(t,x_1,x_2)\partial_{x_2}u^E(t,x_1,x_2)+\varepsilon^{-1}(v^E(t,x_1,x_2)+\varepsilon v^b(t,x,y))\partial_y u^b(t,x,y)\\ \quad -\partial_y^2 u^b(t,x,y)+\partial_{x_1}p^E(t,x_1,x_2)=0,\\ \partial_t v^E(t,x_1,x_2)+(u^E(t,x_1,x_2)+u^b(t,x,y))\partial_{x_1}v^E(t,x_1,x_2)\\ \quad +v^E(t,x_1,x_2)\partial_{x_2}v^E(t,x_1,x_2)+v^E(t,x_1,x_2)\partial_y v^b(t,x,y)+\partial_{x_2}p^E(t,x_1,x_2)=0.\end{cases} \tag{1.5}$$

在上述方程中, 令 $y\to+\infty$, 然后利用假设条件: $u^b(t,x,y)$ 与 $v^b(t,x,y)$ 当 $y\to+\infty$ 时以多项式衰减速率趋于 0, 则有

$$\begin{cases}\partial_t u^E+u^E\partial_{x_1}u^E+v^E\partial_{x_2}u^E+\partial_{x_1}p^E=0,\\ \partial_t v^E+u^E\partial_{x_1}v^E+v^E\partial_{x_2}v^E+\partial_{x_2}p^E=0.\end{cases}$$

接下来我们推导边界附近区域的方程. 为此利用 Taylor 展开式将 u^E 写为

$$u^E(t,x_1,x_2)=u^E(t,x_1,0)+x_2\partial_{x_2}u^E(t,x,0)+\frac{x_2^2}{2}\partial_{x_2}^2u^E(t,x,0)+\cdots=\overline{u^E}+\varepsilon y\overline{\partial_{x_2}u^E}+O(\varepsilon^2),$$

其中 $\overline{h}:=h|_{x_2=0}$. 类似地, 利用 Taylor 展式以及条件 (1.4) 可得

$$v^E(t,x_1,x_2)=\varepsilon y\overline{\partial_{x_2}v^E}+O(\varepsilon^2),\quad p^E(t,x_1,x_2)=\overline{p^E}+\varepsilon y\overline{\partial_{x_2}p^E}+O(\varepsilon^2).$$

将上述展开式代入到 (1.5) 中, 则 ε 的零次幂对应的方程为

$$\partial_t(\overline{u^E}+u^b)+(\overline{u^E}+u^b)\partial_x(\overline{u^E}+u^b)+(y\overline{\partial_{x_2}v^E}+v^b)\partial_y u^b-\partial_y^2u^b+\partial_x\overline{p^E}=0.$$

这即为 Prandtl 边界层方程.

综上讨论, 如果拟设 (1.3) 中的 $(u^\varepsilon, v^\varepsilon, p^\varepsilon)$ 满足 Navier-Stokes 方程 (1.1) 以及非滑移边界条件 (1.2), 则 (u^E, v^E, p^E) 满足 Euler 方程

$$\begin{cases} \partial_t u^E + u^E\partial_{x_1}u^E + v^E\partial_{x_2}u^E + \partial_{x_1}p^E = 0, \\ \partial_t v^E + u^E\partial_{x_1}v^E + v^E\partial_{x_2}v^E + \partial_{x_2}p^E = 0, \\ v^E|_{x_2=0} = 0, \\ (u^E, v^E)|_{t=0} = (u_0^E, v_0^E), \end{cases}$$

而

$$u(t,x,y) = \overline{u^E} + u^b(t,x,y), \quad v(t,x,y) = y\overline{\partial_{x_2}v^E} + v^b(t,x,y),$$

则满足 Prandtl 方程:

$$\begin{cases} \partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u - \partial_y^2 u + \partial_x p^E(t,x,0) = 0, \\ \partial_x u + \partial_y v = 0, \\ u|_{y=0} = v|_{y=0} = 0, \ \lim\limits_{y\to+\infty} u = u^E(t,x,0), \\ u|_{t=0} = u_0(x,y), \end{cases} \tag{1.6}$$

其中 $u^E(t,x,0)$ $p^E(t,x,0)$ 满足如下 Bernoulli 定律:

$$\partial_t u^E(t,x,0) + u^E(t,x,0)\partial_x u^E(t,x,0) + \partial_x p^E(t,x,0) = 0. \tag{1.7}$$

Prandtl 方程 (1.6) 可视为退化的 Navier-Stokes 方程: 缺少切向的耗散性以及关于法向速度 v 的时间演化方程, 速度 v 可以通过 (1.6) 中的不可压条件以及边界条件确定, 即

$$v(t,x,y) = -\int_0^y \partial_x u(t,x,\tilde{y})d\tilde{y}.$$

因而非局部项 v 损失了一阶切向导数, 这是 Prandtl 方程的数学研究中最主要的困难. 类似于二维 Prandtl 方程 (1.6), 三维 Prandtl 方程为

$$\begin{cases} \partial_t u + (u\cdot\partial_x)u + v\partial_y u - \partial_y^2 u + \partial_x p^E(t,x,0) = 0, \\ \partial_x\cdot u + \partial_y v = 0, \\ u|_{y=0} = (0,0), \ v|_{y=0} = 0, \ \lim\limits_{y\to+\infty} u = u^E(t,x,0), \\ u|_{t=0} = u_0(x,y), \end{cases}$$

其中 u 是切向量速度场, x 为二维切向量. 与二维 Prandtl 方程相比, 三维情况下关于切向速度的两个方程都具有导数损失, 这导致三维 Prandtl 方程的处理比二维要复杂很多. 二维 Prandtl 方程 (1.6) 本质上是一个退化标量方程, 而三维则是退化抛物方程组. 关于 Prandtl 方程的数学理论在 Oleinik 的专著 [36] 中有详细的讨论.

到目前为止, 关于 Prandtl 方程的研究已有大量的工作. Prandtl 方程的适定性理论主要建立在 Sobolev 空间和解析空间 (或更一般的 Gevrey 空间) 这两个不同的框架下, 前者依赖于 Oleinik 单调

性假设, 而后者一般对初始值的正则性有很高的要求. 在二维情形, 如果初始值满足单调性条件, 则 Sobolev 空间的适定性理论由 Oleinik[36] 证明. Alexandre 等[1] 与 Masmoudi 和 Wong[34] 基于能量方法, 给出了 Oleinik 经典结果的重新证明. 需要指出的是, 目前关于三维 Prandtl 方程的 Sobolev 适定性的结果甚少, 仅有部分进展 (可参见文献 [30]). 另一方面, 如果 Oleinik 单调性条件不再成立, 则 Prandtl 方程在 Sobolev 框架下不再适定, 关于其严格的数学验证可参见文献 [5, 6, 8, 9, 16–18, 29] 以及所列文献. Sammartino 和 Caflisch 的经典工作 [40] 证明了在没有任何结构性假设条件下, 二维和三维 Prandtl 方程在解析空间中是适定的, 最近 Dietert 和 Gérard-Varet[7] 与本文作者[22] 在临界 Gevrey 空间中分别在二维和三维中证明了 Prandtl 方程的适定性. 关于 Prandtl 方程的研究, 详细的讨论可以参见文献 [1, 4, 7–9, 13, 19–21, 23–25, 29, 30, 33, 44–47] 以及这些工作中所列文献.

建立了 Prandtl 方程的适定性理论, 一个自然的问题是如何从数学上严格验证 Prandtl 拟设展开式 (1.3) 成立, 这即为流体高雷诺极限问题. 相较于 Prandtl 方程的适定性, 这一高雷诺数极限问题更为复杂, 因为在边界层中的旋度当粘性趋于零时将逼近无穷大, 如何控制旋度是解决问题的关键, 这本质上涉及到导数损失的问题. 事实上, 基于抽象 Cauchy-Kovalevskaya 定理, Sammartino 和 Caflisch 的经典工作 [41] 证明展式 (1.3) 在解析框架下成立 (基于能量方法的重新证明可参见文献 [43]); 最近, Gérard-Varet 等[11,12] 证明了 (1.3) 在指标 3/2 的临界 Gevrey 框架下仍然成立, 但是这里需要结构性假设条件.

1.3　消去机制与 Sobolev 适定性

二维 Prandtl 方程在 Sobolev 空间中的适定性理论目前已有较完善的理论 (参见文献 [1, 34, 36]), 其中数学严格证明最困难的地方在于如何克服切向导数的损失, 此时, Oleinik 单调性条件起到关键的作用. 事实上, 在单调性条件下, Oleinik[36] 利用 Crocco 变换, 证明了 Prandtl 方程经典解的局部存在性. 最近 Alexandre 等[1] 与 Masmoudi 和 Wong[34] 基于能量方法重新证明了 Prandtl 方程在 Sobolev 空间中的适定性, 这里最主要的思想是: 利用 Oleinik 单调性而观察到速度方程和旋度方程之间的消去机制, 进而引入一个新的未知函数, 而关于这个新的未知函数的演化方程中没有切向导数的损失. 接下来的部分我们简要介绍文献 [1, 34] 中引入的消去机制, 后续很多关于 Prandtl 方程的研究工作均受到该消去机制的启发. 令 u 满足二维方程 (1.6), 定义 ω 如下:

$$\omega = \partial_y u.$$

通过在 (1.6) 的第一个方程两端求法向导数, 则可得 ω 满足

$$\partial_t \omega + u\partial_x \omega + v\partial_y \omega - \partial_y^2 \omega = 0.$$

和速度的演化方程一样, 上述方程也是退化的抛物方程. 当在上述方程中求 m 阶切向导数时, 则在 $(\partial_x^m v)\partial_y \omega$ 这一项中损失一阶切向导数:

$$[\partial_t + u\partial_x + v\partial_y - \partial_y^2]\partial_x^m \omega = -(\partial_x^m v)\partial_y \omega + \text{l.o.t.}, \tag{1.8}$$

其中 l.o.t. 代表低阶导数项, 这些低阶项不会为能量估计带来任何本质困难. 另一方面, 注意到速度方程关于速度 m 阶切向导数也有 $\partial_x^m v$ 这一导数损失项:

$$[\partial_t + u\partial_x + v\partial_y - \partial_y^2]\partial_x^m u = -(\partial_x^m v)\omega + \text{l.o.t.} \tag{1.9}$$

在 Oleinik 单调性 (即 $\omega>0$) 的假设下, Alexandre 等[1] 与 Masmoudi 和 Wong[34] 观察到可以通过上述两个方程消去有导数损失的项 $\partial_x^m v$. 具体而言, 在速度方程 (1.9) 的两端乘以 $\frac{\partial_y\omega}{\omega}$, 然后与另一个方程 (1.8) 相减, 则得到关于新的未知函数

$$f_m=\partial_x^m\omega-\frac{\partial_y\omega}{\omega}\partial_x^m u=\omega\partial_y\left(\frac{\partial_x^m u}{\omega}\right),\quad m\geqslant 1$$

的演化方程, 计算可知 f_m 满足

$$[\partial_t+u\partial_x+v\partial_y-\partial_y^2]f_m=F_m, \tag{1.10}$$

其中

$$\begin{aligned}F_m=&-\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(\partial_x^k u)\partial_x^{m-k+1}\omega-\sum_{k=1}^{m-1}\binom{m}{k}(\partial_x^k v)\partial_x^{m-k}\partial_y\omega\\&+\frac{\partial_y\omega}{\omega}\left[\partial_x^{m+1}p^E+\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(\partial_x^k u)\partial_x^{m-k+1}u+\sum_{k=1}^{m-1}\binom{m}{k}(\partial_x^k v)\partial_x^{m-k}\omega\right]\\&+\left[\partial_x\omega-(\partial_x u)\frac{\partial_y\omega}{\omega}-2\frac{\partial_y\omega}{\omega}\partial_y\frac{\partial_y\omega}{\omega}\right]\partial_x^m u+2\left(\partial_y\frac{\partial_y\omega}{\omega}\right)\partial_x^m\omega.\end{aligned}$$

注意到 F_m 仅涉及到 u,ω 的至多 m 阶切向导数, 并且由 Hardy 型不等式可知

$$\|\langle y\rangle^{\ell}\partial_x^m\omega\|_{L^2}+\|\langle y\rangle^{\ell-1}\partial_x^m u\|_{L^2}\leqslant C\|\langle y\rangle^{\ell}f_m\|_{L^2},$$

从而 F_m 可被 f_m 在加权 Sobolev 空间控制. 这说明在 f_m 的演化方程 (1.10) 中, 我们没有导数的损失, 从而可在加权的 Sobolev 空间中建立关于 f_m 的能量估计.

另一方面, 如果初始值不满足 Oleinik 单调性条件, Gérard-Varet 和 Dormy[9] 证明了 Prandtl 方程在 Sobolev 框架下不再适定. 事实上, Gérard-Varet 和 Dormy 的结果蕴涵着 Prandtl 方程在指标大于 2 的 Gevrey 空间中是不适定性的. 一个自然的问题是: *如果指标 $\sigma\leqslant 2$, 那么 Prandtl 方程在 Gevrey 空间 G^σ 中是否适定?* 接下来的两节将详细介绍如何利用 Prandtl 方程内在的消去机制, 结合抽象 Cauchy-Kovalevskaya 定理, 在 Gevrey 框架下准确刻画导数的损失, 从而给出这个问题一个肯定的答案.

2　抽象 Cauchy-Kovalevskaya 定理

经典的 Cauchy-Kovalevskaya 定理主要是关于非线性偏微分方程 Cauchy 问题在解析框架下解的局部存在性以及唯一性. 更一般地, Ovsjannikov[37] 与 Nirenberg[35] 等人在一簇 Banach 空间中寻找抽象的 Cauchy 问题

$$\partial_t h=F(t,h),\quad h|_{t=0}=h_0 \tag{2.1}$$

的解, 建立了抽象的 Cauchy-Kovalevskaya 定理. 本文作者关于 Prandtl 方程在 Gevrey 空间中的适定性的工作 [22] 正是基于抽象的 Cauchy-Kovalevskaya 定理.

2.1 抽象的 Cauchy-Kovalevskaya 定理以及 Prandtl 方程的解析适定性

本小节首先简要介绍抽象的 Cauchy-Kovalevskaya 定理, 详细的讨论可以参见文献 [35]. 在如下讨论中, 令 $\{X_\rho,\ \|\cdot\|_{X_\rho}\}_{\rho>0}$ 为一簇 Banach 空间, 其中范数满足如下条件:

$$\forall\, 0<\rho<\tilde{\rho}, \quad \|\cdot\|_{X_\rho} \leqslant \|\cdot\|_{X_{\tilde{\rho}}}.$$

定理 2.1 对于抽象的 Cauchy 问题 (2.1), 假设 $F:[0,T_0]\times X_{\tilde{\rho}}\to X_\rho$ 是连续映照, 并且满足条件: 存在常数 $C>0$, 使得

$$\forall\, t\leqslant T_0,\ \forall\, 0<\rho<\tilde{\rho}, \quad \|F(t,g)-F(t,h)\|_{X_\rho} \leqslant C\frac{\|g(t)-h(t)\|_{X_{\tilde{\rho}}}}{\tilde{\rho}-\rho}. \tag{2.2}$$

进一步地, 假设初始值 $h_0\in X_{\rho_0}$, 其中 $\rho_0>0$ 是给定常数, 则 Cauchy 问题 (2.1) 存在唯一局部解 $h\in L^\infty([0,T];X_\rho)$, 其中 $0<\rho<\rho_0$, $T<T_0$.

定理 2.1 的证明概要 证明主要依赖于下述不动点问题. 事实上, 对于给定的 ρ_0, 我们定义

$$X=\bigcup_{0<\rho\leqslant\rho_0} X_\rho$$

以及映照 $P:X\to X$ 如下:

$$Ph(t)=h_0+\int_0^t F(s,h(s))ds. \tag{2.3}$$

则求解 Cauchy 问题 (2.1) 等价于寻找上述算子 P 的不动点. 为此对应给定的 $\rho_0, T_0>0$, 定义

$$|\!|\!| h |\!|\!|_a \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\rho,t}\left(\frac{\rho_0-\rho-at}{\rho_0-\rho}\right)\|h\|_{X_\rho}, \tag{2.4}$$

其中待定常数 a 充分大, 右端的上确界是关于所有满足限制条件 $\rho+at<\rho_0$ 的 $(\rho,t)\in]0,\rho_0[\,\times[0,T_0]$.

对于上述三个范数, 我们拟验证存在足够大的常数 $a>0$ 使得

$$|\!|\!| Ph-Pg |\!|\!|_a \leqslant 2^{-1} |\!|\!| h-g |\!|\!|_a. \tag{2.5}$$

为此, 我们选取任意的 $\rho>0$ 以及 $t\in[0,T_0]$, 并且满足限制条件 $\rho+at<\rho_0$. 对于上述给定 ρ, 定义特殊的 $\tilde{\rho}(s)$ 如下:

$$\tilde{\rho}(s)=\frac{\rho_0+\rho-as}{2}.$$

则可以验证对于任意的 $s\in[0,t]$ 均有

$$\rho<\tilde{\rho}(s), \quad \tilde{\rho}(s)+as<\rho_0$$

以及

$$\tilde{\rho}(s)-\rho=\frac{\rho_0-\rho-as}{2}=\rho_0-\tilde{\rho}(s)-as, \quad \rho_0-\tilde{\rho}(s)\leqslant\rho_0-\rho. \tag{2.6}$$

进一步地, 由 (2.4), 则对于任意的 $s\in[0,t]$,

$$\|h(s)\|_{X_{\tilde{\rho}(s)}} \leqslant |\!|\!| h |\!|\!|_a \left(\frac{\rho_0-\tilde{\rho}(s)-as}{\rho_0-\tilde{\rho}(s)}\right)^{-1}. \tag{2.7}$$

联立上面的估计式以及条件 (2.2), 对于任意的 $t \in [0,T]$, 我们可以验证由 (2.3) 所定义的算子 P 满足

$$\begin{aligned}
\|Ph(t)-Pg(t)\|_{X_\rho} &\leqslant \int_0^t \|F(s,h(s))-F(s,g(s))\|_{X_\rho} ds \\
&\leqslant C\int_0^t \frac{\|h(s)-g(s)\|_{X_{\tilde\rho(s)}}}{\tilde\rho(s)-\rho} ds \\
&\leqslant C|\!|\!|h-g|\!|\!|_a \int_0^t \frac{1}{\tilde\rho(s)-\rho}\frac{\rho_0-\tilde\rho(s)}{\rho_0-\tilde\rho(s)-as} ds \qquad (\Longleftarrow (2.7)) \\
&\leqslant C|\!|\!|h-g|\!|\!|_a \int_0^t \frac{\rho_0-\tilde\rho(s)}{(\rho_0-\tilde\rho(s)-as)^2} ds \qquad (\Longleftarrow (2.6)) \\
&\leqslant C|\!|\!|h-g|\!|\!|_a \int_0^t \frac{\rho_0-\rho}{(\rho_0-\rho-as)^2} ds \qquad (\Longleftarrow (2.6)) \\
&\leqslant C\frac{|\!|\!|h-g|\!|\!|_a}{a}\left(\frac{\rho_0-\rho-at}{\rho_0-\rho}\right)^{-1},
\end{aligned}$$

在上式两边同乘以 $\frac{\rho_0-\rho-at}{\rho_0-\rho}$, 然后关于 ρ, t 取上确界, 可得

$$|\!|\!|Ph-Pg|\!|\!|_a \leqslant Ca^{-1}|\!|\!|h-g|\!|\!|_a.$$

故当 a 足够大时, 估计 (2.5) 成立, 这说明 $P: X \to X$ 为压缩映照, 从而存在不动点, 该不动点即为 Cauchy 问题 (2.1) 的解. □

基于抽象的 Cauchy-Kovalevskaya 定理, Sammartino 和 Caflisch[40,41] 在解析框架下证明了 2 维以及 3 维 Prandtl 方程的局部适定性以及相关的高雷诺数极限. 这里主要的思想是将 Prandtl 方程重新写为半平面的热方程:

$$(\partial_t - \partial_y^2)u = F(t,u,\partial_x u).$$

对于实解析函数 u, 通过复延拓得到全纯函数, 然后利用全纯函数的 Cauchy 公式推导出类似于 (2.2) 的关键估计:

$$\|F(t,u,\partial_x u)\|_{X_\rho} \leqslant C\frac{\|u\|_{X_{\tilde\rho}}}{\tilde\rho-\rho}, \quad \forall\, \rho<\tilde\rho.$$

进而利用抽象的 Cauchy-Kovalevskaya 定理, 得到 Prandtl 方程的解析适定性.

2.2　抽象 Cauchy-Kovalevskaya 定理: 能量方法

为了应用抽象 Cauchy-Kovalevskaya 定理, 关键是验证条件 (2.2). 本节利用能量方法来验证条件 (2.2), 这将有助于我们应用抽象 Cauchy-Kovalevskaya 定理来证明 Prandtl 方程的适定性.

模型 I: 一阶 Cauchy 问题. 首先考虑一阶 Cauchy 问题

$$\partial_t h = F(t,\partial_x h), \quad h|_{t=0}=h_0. \tag{2.8}$$

由抽象 Cauchy-Kovalevskaya 定理可知, 上述 Cauchy 问题在解析框架下存在唯一的局部解. 为了给出能量方法证明, 定义一簇 Banach 空间 $\{X_\rho,\ \|\cdot\|_{X_\rho}\}_{\rho>0}$ 如下:

$$X_\rho = \left\{ h\in C^\infty:\ \|h\|_{X_\rho} := \sup_{k\geqslant 0}\frac{\rho^k}{k!}\|\partial_x^k h\|_{L^2} < +\infty \right\}. \tag{2.9}$$

定理 2.2 令 X_ρ 由 (2.9) 所定义. 假设 Cauchy 问题 (2.8) 的初始值 $h_0 \in X_{\rho_0}$, 其中 $\rho_0 > 0$ 为常数. 进一步地, 如果存在常数 $C > 0$ 使得 F 满足条件

$$\forall\, t \leqslant T_0, \quad \|\partial_x^m F(t, \partial_x h)\|_{L^2} \leqslant C\|\partial_x^{m+1} h\|_{L^2}, \tag{2.10}$$

其中 $T_0 > 0$ 为给定常数, 则 Cauchy 问题 (2.8) 存在一个唯一的局部解 $h \in L^\infty([0,T];\ X_\rho)$, 其中 $0 < \rho < \rho_0$ 以及 $0 < T < T_0$.

证明 我们仅需证明

$$\forall\, 0 < \rho < \tilde\rho \leqslant \rho_0, \quad \|h(t)\|_{X_\rho}^2 \leqslant |h_0|_{\rho_0}^2 + C\int_0^t \frac{\|h\|_{X_{\tilde\rho}}^2}{\tilde\rho - \rho} ds, \tag{2.11}$$

则解的存在性可由标准的紧性论证得到. 为证明上述估计, 我们利用能量方法, 由方程 (2.8) 可得

$$\left(\frac{\rho^k}{k!}\right)^2 \|\partial_x^k h(t)\|_{L^2}^2 = \left(\frac{\rho^k}{k!}\right)^2 \|\partial_x^k h_0\|_{L^2}^2 + \left(\frac{\rho^k}{k!}\right)^2 \int_0^t (\partial_x^k F(s, \partial_x h),\ \partial_x^k h)_{L^2} ds. \tag{2.12}$$

另一方面, 利用 (2.10) 以及估计式

$$\forall\, 0 < r < 1,\ \forall\, k \in \mathbb{Z}_+, \quad kr^k \leqslant \frac{1}{1-r},$$

我们可以推导出 (2.12) 右端最后一项关于 k 的一致上界:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\rho^k}{k!}\right)^2 \int_0^t |(\partial_x^k F(s, \partial_x h),\ \partial_x^k h)_{L^2}| ds \\
&\quad \leqslant C\left(\frac{\rho^k}{k!}\right)^2 \int_0^t \|\partial_x^{k+1} h\|_{L^2} \|\partial_x^k h\|_{L^2} \\
&\quad \leqslant C\left(\frac{\rho^k}{k!}\right)^2 \int_0^t \frac{k!}{\tilde\rho^k} \frac{(k+1)!}{\tilde\rho^{k+1}} \|h\|_{X_{\tilde\rho}}^2 ds \\
&\quad \leqslant C\int_0^t \frac{k}{\tilde\rho}\left(\frac{\rho}{\tilde\rho}\right)^{2k} \|h\|_{X_{\tilde\rho}}^2 ds \leqslant C\int_0^t \frac{\|h\|_{X_{\tilde\rho}}^2}{\tilde\rho - \rho} ds.
\end{aligned}$$

将上式代入到 (2.12) 中则有

$$\left(\frac{\rho^k}{k!}\right)^2 \|\partial_x^k h(t)\|_{L^2}^2 \leqslant \left(\frac{\rho^k}{k!}\right)^2 \|\partial_x^k h_0\|_{L^2}^2 + C\int_0^t \frac{\|h\|_{X_{\tilde\rho}}^2}{\tilde\rho - \rho} ds.$$

两边同时对 k 取上确界, 我们得到所需估计式 (2.11). □

模型 II: 二阶 Cauchy 问题. 对于 Cauchy 问题

$$\partial_t^2 h = F(t, \partial_x h), \quad h|_{t=0} = h_0, \quad \partial_t h|_{t=0} = h_1, \tag{2.13}$$

如果 F 满足 (2.10), 则我们可去掉初始值 h_0, h_1 的解析正则性限制, 在指标为 2 的 Gevrey 类空间中证明其适定性. 事实上, 我们将上述二阶方程重新写为如下方程组:

$$\begin{cases} \partial_t h = g, \\ \partial_t g = F(t, \partial_x h), \\ h|_{t=0} = h_0, \quad g|_{t=0} = h_1. \end{cases} \tag{2.14}$$

粗略地讲, 如果视 $g \approx \Lambda_x^{1/2} h$ (其中 Λ_x 为象征为 $(1+\xi^2)^{1/2}$ 的 Fourier 乘子), 则方程组 (2.14) 中的第一个和第二个方程均损失 1/2 阶导数, 从而我们可以将初始值的正则性由解析性降为指标为 2 的 Gevrey 类正则性. 具体而言, 如果 g 属于指标为 2 的 Gevrey 空间, 则

$$\sup_{k\geqslant 0} \frac{\rho^{k+1}}{k!^2} \|\partial_x^k g\|_{L^2} < +\infty.$$

利用 $\Lambda_x^{-1/2} g \approx h$ 以及 Sobolev 插值公式可得

$$\|\partial_x^k h\|_{L^2} \approx \|\Lambda_x^{-1/2}\partial_x^k g\|_{L^2} \lesssim \|\partial_x^k g\|_{L^2}^{1/2} \|\partial_x^{k-1} g\|_{L^2}^{1/2} \lesssim [k!^2/\rho^{k+1}]^{1/2}[(k-1)!^2/\rho^k]^{1/2} \lesssim \frac{k!^2}{\rho^{k+1}}\frac{1}{k},$$

即

$$\sup_{k\geqslant 0} \frac{\rho^{k+1}}{k!^2} k\|\partial_x^k h\|_{L^2} < +\infty.$$

受此启发, 针对方程组 (2.14), 我们定义指标为 2 的 Gevrey 空间 Y_ρ 如下:

$$Y_\rho := \left\{(h,g):\ \|(h,g)\|_{Y_\rho} = \sup_{k\geqslant 0}\left[\frac{\rho^{k+1}}{k!^2}(k+1)\|\partial_x^k h\|_{L^2} + \frac{\rho^{k+1}}{k!^2}\|\partial_x^k g\|_{L^2}\right] < +\infty\right\}. \tag{2.15}$$

为了证明方程组在 Y_ρ 空间中的适定性, 我们将采用能量方法推导如下类似于 (2.11) 的估计:

$$\forall\, 0<\rho<\tilde\rho\leqslant\rho_0,\quad \|(h(t),g(t)\|_{Y_\rho}^2 \leqslant \|(h_0,h_1)\|_{Y_{\rho_0}}^2 + C\int_0^t \frac{\|(h,g)\|_{Y_{\tilde\rho}}^2}{\tilde\rho-\rho} ds. \tag{2.16}$$

为此, 我们首先对方程组 (2.14) 中的第二个方程利用标准的能量方法, 则有

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\rho^{k+1}}{k!^2}\right)^2 \|\partial_x^k g(t)\|_{L^2}^2 &= \left(\frac{\rho^{k+1}}{k!^2}\right)^2\left[\|\partial_x^k h_1\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t (\partial_x^k F(s,\partial_x h), \partial_x^k g)_{L^2} ds\right]\\
&\leqslant \left(\frac{\rho^{k+1}}{k!^2}\right)^2 \|\partial_x^k h_1\|_{L^2}^2 + C\left(\frac{\rho^{k+1}}{k!^2}\right)^2 \int_0^t \|\partial_x^{k+1} h\|_{L^2}\|\partial_x^k g\|_{L^2} ds\\
&\leqslant \left(\frac{\rho^{k+1}}{k!^2}\right)^2 \|\partial_x^k h_1\|_{L^2}^2 + C\left(\frac{\rho^{k+1}}{k!^2}\right)^2 \int_0^t \frac{(k+1)!^2}{\tilde\rho^{k+2}}\frac{k!^2}{\tilde\rho^{k+1}}\frac{\|(h,g)\|_{Y_{\tilde\rho}}^2}{k+1} ds\\
&\leqslant \left(\frac{\rho^{k+1}}{k!^2}\right)^2 \|\partial_x^k h_1\|_{L^2}^2 + C\int_0^t \frac{k+1}{\tilde\rho}\left(\frac{\rho}{\tilde\rho}\right)^{2(k+1)} \|(h,g)\|_{Y_{\tilde\rho}}^2 ds\\
&\leqslant \left(\frac{\rho^{k+1}}{k!^2}\right)^2 \|\partial_x^k h_1\|_{L^2}^2 + C\int_0^t \frac{\|(h(s),g(s))\|_{Y_{\tilde\rho}}^2}{\tilde\rho-\rho} ds.
\end{aligned}$$

另一方面, 由方程组 (2.14) 中的第一个方程可得

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\rho^{k+1}}{k!^2}\right)^2 k^2\|\partial_x^k h(t)\|_{L^2}^2 &\leqslant \left(\frac{\rho^{k+1}}{k!^2}\right)^2 k^2\left[\|\partial_x^k h_0\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \|\partial_x^k g\|_{L^2}\|\partial_x^k h\|_{L^2} dt\right]\\
&\leqslant \left(\frac{\rho^{k+1}}{k!^2}\right)^2 k^2\|\partial_x^k h_0\|_{L^2}^2 + 2\left(\frac{\rho^{k+1}}{k!^2}\right)^2 k^2\int_0^t \left(\frac{k!^2}{\tilde\rho^{k+1}}\right)^2 \frac{\|(h,g)\|_{Y_{\tilde\rho}}^2}{k} ds + \cdots\\
&\leqslant \left(\frac{\rho^{k+1}}{k!^2}\right)^2 k^2\|\partial_x^k h_0\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t k\left(\frac{\rho}{\tilde\rho}\right)^{2(k+1)} \|(h,g)\|_{Y_{\tilde\rho}}^2 ds
\end{aligned}$$

$$\leqslant \left(\frac{\rho^{k+1}}{k!^2}\right)^2 k^2 \|\partial_x^k h_0\|_{L^2}^2 + C\int_0^t \frac{\|(h,g)\|_{Y_{\tilde{\rho}}}^2}{\tilde{\rho}-\rho} ds.$$

联立上述两个估计, 则有 (2.16), 从而得到关于方程组 (2.14) 在指标为 2 的 Gevrey 空间 Y_ρ 中的适定性.

定理 2.3 令 Y_ρ 由 (2.15) 所定义. 假设 Cauchy 问题 (2.14) 的初始值 $(h_0, h_1) \in Y_{\rho_0}$, 其中 $\rho_0 > 0$ 为常数. 如果 F 满足条件 (2.10), 则 Cauchy 问题 (2.14) 存在一个唯一的局部解 $(h,g) \in L^\infty([0,T];\ Y_\rho)$, 其中 $0<T<T_0,\ 0<\rho<\rho_0$.

注 2.1 如果将 (2.14) 中的时间导数 ∂_t 替换成半空间中的线性 Prandtl 算子

$$\partial_t + u\partial_x + v\partial_y - \partial_y^2$$

并赋予合适的边界条件, 则相应的初边值问题

$$\begin{cases} (\partial_t + u\partial_x + v\partial_y - \partial_y^2)h = g, \\ (\partial_t + u\partial_x + v\partial_y - \partial_y^2)g = F(t, \partial_x h) \end{cases}$$

有类似于定理 2.3 中的 Gevrey 类适定性结果, 但是对于法方向 y 仅需要 Sobolev 正则性.

模型 III: 高阶 Cauchy 问题. 更一般地, 对于 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \partial_t^m h = F(t, \partial_x^k h), \quad k \leqslant m, \\ \partial_t^j h|_{t=0} = h_j, \quad j = 0,1,\dots,m-1, \end{cases} \tag{2.17}$$

如果 F 满足 (2.10), 则类似于前面两个模型问题, 上述 Cauchy 问题 (2.17) 在指标为 m/k 的 Gevrey 类空间中是局部适定的.

3 Prandtl 方程在 Gevrey 空间中的适定性

如果初始值不满足 Oleinik 单调性条件, Gérard-Varet 和 Dormy[9] 证明了 Prandtl 方程在 Sobolev 框架下不再适定. 事实上, Gérard-Varet 和 Dormy 的结果蕴涵着 Prandtl 方程在指标为 2 的 Gevrey 空间中是不适定的. 一个自然的问题是: 如果指标 $\sigma \leqslant 2$, 那么 Prandtl 方程在 Gevrey 空间 G^σ 中是否适定? 当 $\sigma = 1$ (即解析函数空间) 时, Sammartino 和 Caflisch 的经典工作 [40] 在 G^1 框架下建立了二维和三维 Prandtl 方程的适定性; 第一个非解析框架、非单调条件下适定性理论由 Gérard-Varet 和 Masmoudi[13] 所建立, 他们对于一类含有非退化临界点的初始值, 证明了二维 Prandtl 方程在 Gevrey 空间 $G^{7/4}$ 中的适定性; 最近, Chen 等[4] 与本文作者[25] 分别利用不同的方法改进了 Gérard-Varet 和 Masmoudi[13] 的结果, 得到了 Gevrey 适定性的临界指标 2. 上述关于 Gevrey 的工作强烈依赖于非退化临界点这一结构性假设. 最近, Dietert-G é rard 和 Varet[7] 通过发现了 Prandtl 方程内在蕴涵的消去机制, 对于没有任何结构性假设的初始值, 建立了二维 Prandtl 方程在临界 Gevrey 空间 G^2 的适定性; 对应三维的结果由本文作者[22] 所证明.

定义 3.1　令 $\ell > 1/2$ 为给定常数. 对于给定的 $\rho > 0$, 我们定义指标为 2、收敛半径为 ρ 的 Gevrey 空间 X_ρ 如下: X_ρ 为所有满足 $\|f\|_\rho < +\infty$ 的 (标量值或向量值) 函数 f 的集合, 其中

$$\|f\|_\rho := \sup_{\substack{0\leqslant j\leqslant 5\\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^{n-1}}} L_{\rho,|\alpha|+j}\left\|\langle y\rangle^{\ell+j}\partial_x^\alpha\partial_y^j f\right\|_{L^2},\quad L_{\rho,m} := \frac{\rho^{m+1}(m+1)^7}{m!^2},$$

这里 $n=2$ 或者 $n=3$.

注 3.1　上述函数空间 X_ρ 关于切向方向 x 是指标为 2 的 Gevrey 类空间, 而关于法向方向 y 是 Sobolev 正则性的.

对于一般的 (即没有任何结构性条件限制的) 初始值, Prandtl 方程在临界 Gevrey 空间中的适定性可以表述如下.

定理 3.1 (参见文献 [7,22])　令 X_ρ 由定义 3.1 所定义. 假设 Prandtl 方程 (组)

$$\begin{cases}\partial_t u + (u\cdot\partial_x)u + v\partial_y u - \partial_y^2 u + \partial_x p^E(t,x,0) = 0,\\ \partial_x\cdot u + \partial_y v = 0,\\ u|_{y=0} = 0,\ v|_{y=0} = 0,\ \lim\limits_{y\to+\infty} u = u^E(t,x,0),\\ u|_{t=0} = u_0(x,y)\end{cases}\tag{3.1}$$

中的初始值 u_0 满足恰当的相容性条件以及 $u_0 \in X_{2\rho_0}$, 其中 $\rho_0 > 0$. 则上述 Prandtl 方程 (组) 存在唯一的局部解 $u \in L^\infty([0,T];\ X_\rho)$, 这里 $T > 0,\ 0 < \rho < 2\rho_0$.

本节将结合消去机制与抽象 Cauchy-Kovalevskaya 定理证明定理 3.1, 这一方法通用于二维与三维情形.

3.1　二维 Prandtl 方程的局部适定性

简单起见, 我们首先考虑二维 Prandtl 情形. 进一步地, 不失一般性, 我们不妨假设 (3.1) 中的外流 $u^E(t,x,0)\equiv 0$, 从而由 Bernoulli 定律 (1.7) 可知 $p^E(t,x,0)\equiv 0$. 此时 (3.1) 可简化为

$$\begin{cases}\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u - \partial_y^2 u = 0,\\ \partial_x u + \partial_y v = 0,\\ u|_{y=0} = v|_{y=0} = 0,\ \lim\limits_{y\to+\infty} u = 0,\\ u|_{t=0} = u_0(x,y).\end{cases}\tag{3.2}$$

为了对上述二维 Prandtl 方程证明定理 3.1, 其中最关键的步骤是推导初边值问题 (3.2) 的先验估计, 从而初边值问题 (3.2) 的存在唯一性可以由标准的正则化过程以及紧性论证所得到. 我们将仅给出先验估计 (详见下文定理 3.2) 的证明思路, 省略正则化过程.

首先简单介绍主要的证明思想, 然后叙述初边值问题 (3.2) 的先验估计, 并给出证明概要.

3.1.1 证明思想

受 Dietert 和 Gérard-Varet 的工作 [7] 启发, 我们引入如下辅助函数:

$$\begin{cases}(\partial_t+u\partial_x+v\partial_y-\partial_y^2)\displaystyle\int_0^y \mathcal{U}(t,x,\tilde{y})d\tilde{y}=-\partial_x v(t,x,y),\\ \mathcal{U}|_{t=0}=0,\quad \partial_y\mathcal{U}|_{y=0}=\mathcal{U}|_{y\to+\infty}=0.\end{cases}\tag{3.3}$$

辅助函数 $\mathcal{U}$ 的存在性可由经典的抛物方程理论得到. 事实上, 令 f 为如下抛物方程

$$\begin{cases}(\partial_t+u\partial_x+v\partial_y-\partial_y^2)f=-\partial_x v,\\ f|_{t=0}=0,\quad f|_{y=0}=\partial_y f|_{y\to+\infty}=0\end{cases}$$

的解. 然后定义 $\mathcal{U}=\partial_y f$, 则 $\mathcal{U}$ 满足方程 (3.3).

借助辅助函数 $\mathcal{U}$, 我们可以利用消去机制克服非局部项 v 导致的切向导数损失. 具体而言, 在方程 $(\partial_t+u\partial_x+v\partial_y-\partial_y^2)u=0$ 两边作用 ∂_x, 可知 $\partial_x u$ 满足方程

$$(\partial_t+u\partial_x+v\partial_y-\partial_y^2)\partial_x u=-(\partial_y u)\partial_x v-(\partial_x u)^2.$$

在方程 (3.3) 两边同时乘以 $\partial_y u$, 然后与上述方程相减, 则有

$$(\partial_t+u\partial_x+v\partial_y-\partial_y^2)\underbrace{\left[\partial_x u-(\partial_y u)\int_0^y \mathcal{U}d\tilde{y}\right]}_{:=\lambda}=-(\partial_x u)^2+2(\partial_y^2 u)\mathcal{U}.\tag{3.4}$$

如果视 $\mathcal{U}$ 与 $\partial_x u$ 同阶, 则在方程 (3.4) 中我们没有切向导数的损失, 从而可以得到 $\partial_x u-(\partial_y u)\int_0^y \mathcal{U}d\tilde{y}$ 这一项的估计; 进一步地, 如果我们有 $\int_0^y \mathcal{U}d\tilde{y}$ 这一项的估计, 则 $\partial_x u$ 的估计也可得到. 故关键的问题是如何得到 $\int_0^y \mathcal{U}d\tilde{y}$ 这一项的估计. 由于 $\mathcal{U}$ 与 $\partial_x u$ 同阶, 故方程 (3.3) 右端项 $-\partial_x v$ 损失了一阶切向导数, 这导致我们无法通过 (3.3) 得到 $\int_0^y \mathcal{U}d\tilde{y}$ 的估计. 我们主要的观察是: $\mathcal{U}$ 的时间演化方程中蕴涵着消去机制, 可以通过 $\mathcal{U}$ 的估计来得到 $\int_0^y \mathcal{U}d\tilde{y}$ 的估计. 事实上, 在方程 (3.3) 两端同时作用 ∂_y, 则有

$$(\partial_t+u\partial_x+v\partial_y-\partial_y^2)\mathcal{U}=\partial_x\underbrace{\left[\partial_x u-(\partial_y u)\int_0^y \mathcal{U}d\tilde{y}\right]}_{=\lambda}+(\partial_x\partial_y u)\int_0^y \mathcal{U}d\tilde{y}+(\partial_x u)\mathcal{U}.\tag{3.5}$$

如果联立上述方程与 (3.4), 可发现 $(\lambda,\mathcal{U})$ 满足的方程组与 (h,g) 所满足的方程组 (2.14) 有着类似的退化结构. 注意在上节中, 为了求解方程组 (2.14), 在 (2.15) 中引入了一族 Banach 空间 $\{Y_\rho\}_{\rho>0}$, 并在 $\{Y_\rho\}_{\rho>0}$ 中求解方程组 (2.14). 受 (2.15) 所启发, 自然地, 我们可定义

$$|(\lambda,\mathcal{U}))|_\rho=\sup_{m\geqslant 0}\left[\frac{\rho^{m+2}}{(m+1)!^2}(m+2)\|\partial_x^m\lambda\|_{L^2}+\frac{\rho^{m+2}}{(m+1)!^2}\|\partial_x^m\mathcal{U}\|_{L^2}\right].$$

严格地, 为了求解非线性 Prandtl 方程, 我们引入如下范数:

定义 3.2 令 $\mathcal{U}$ 与 λ 由 (3.3) 及 (3.4) 所分别给定, 记

$$\vec{a}=(u,\mathcal{U},\lambda),$$

并定义 $|\vec{a}|_\rho$ 为

$$|\vec{a}|_\rho=\|u\|_\rho+\sup_{m\geqslant 0}(L_{\rho,m+1}\|\partial_x^m\mathcal{U}\|_{L^2}+L_{\rho,m+1}(m+2)\|\partial_x^m\lambda\|_{L^2}),$$

其中

$$L_{\rho,m}:=\frac{\rho^{m+1}(m+1)^7}{m!^2}. \tag{3.6}$$

注 3.2　定义 (3.6) 中的因子 $(m+1)^7$ 主要是为了处理非线性项, 其仅会影响收敛半径, 而不会影响 Gevrey 空间的指标.

3.1.2　先验估计

令 X_ρ 由定义 3.1 所给出. 假设 $u\in L^\infty([0,T];\ X_\rho)$ 为 Prandtl 方程 (3.2) 的一个光滑解, 并且满足

$$\sup_{\substack{0\leqslant j\leqslant 5\\ m+j\leqslant 10}}\|\langle y\rangle^{\ell+j}\partial_x^m\partial_y^j u(t)\|_{L^2}\leqslant C_*, \tag{3.7}$$

其中常数 $C_*\geqslant 1$ 仅依赖于 ρ_0, $\|u_0\|_{2\rho_0}$ 以及 Sobolev 嵌入常数. 接下来我们将推导关于上述 u 的先验估计.

定理 3.2 (先验估计)　令 $\|u\|_\rho$ 以及 $|\vec{a}|_\rho$ 分别由定义 3.1 以及 3.2 所给定. 假设 Prandtl 方程 (3.2) 的初始值 u_0 满足恰当的相容性条件以及 $u_0\in X_{2\rho_0}$, 其中 $\rho_0>0$. 假设 $u\in L^\infty([0,T];\ X_\rho)$ 为 Prandtl 方程 (3.2) 的一个光滑解, 并且满足条件 (3.7). 则我们可以找到两个常数 $C_1,C_2\geqslant 1$, 使得下述估计式

$$|\vec{a}(t)|_\rho^2\leqslant C_1\|u_0\|_{2\rho_0}^2+\mathrm{e}^{C_2C_*^2}\int_0^t(|\vec{a}(s)|_\rho^2+|\vec{a}(s)|_\rho^4)\,ds+\mathrm{e}^{C_2C_*^2}\int_0^t\frac{|\vec{a}(s)|_{\tilde\rho}^2}{\tilde\rho-\rho}\,ds$$

对所有的 $t\in[0,T]$ 以及所有满足条件 $0<\rho<\tilde\rho<\rho_0$ 的 $\rho,\tilde\rho$ 均成立. 这里 $\vec{a}=(u,\mathcal{U},\lambda)$, 其中 $\mathcal{U}$ 以及 λ 分别由 (3.3) 以及 (3.4) 所给出.

注 3.3　定理 3.2 中的常数 C_1 有显式的数值, 而常数 C_2 仅依赖于 ρ_0 以及 Sobolev 嵌入常数. 这两个常数 C_1,C_2 均不依赖于 (3.7) 中的常数 C_*.

定理 3.2 的证明概要　我们将主要处理有导数损失的项, 其他项由于没有导数损失而不会为问题带来本质的困难, 为此仅考虑切向导数的估计. 主要的思路与模型方程 (2.14) 的讨论非常类似, 只是这里的计算比 (2.14) 复杂.

(i) 辅助函数 $\mathcal{U}$ 的估计. 辅助函数 $\mathcal{U}$ 这一项的处理与模型方程 (2.14) 中的 g 非常类似. 在方程 (3.5) 两边同时作用 ∂_x^m 则有

$$\begin{aligned}(\partial_t+u\partial_x+v\partial_y-\partial_y^2)\partial_x^m\mathcal{U}=\partial_x^{m+1}\lambda+\partial_x^m\left[(\partial_x\partial_y u)\int_0^y\mathcal{U}(t,x,\tilde y)d\tilde y+(\partial_x u)\mathcal{U}\right]\\ -\sum_{k=1}^m\binom{m}{k}[(\partial_x^k u)\partial_x^{m-k+1}\mathcal{U}+(\partial_x^k v)\partial_x^{m-k}\partial_y\mathcal{U}].\end{aligned}$$

利用 (3.3) 中的初边值条件, 可推导出关于上述方程的能量估计:

$$\frac{1}{2}L_{\rho,m+1}^2\|\partial_x^m\mathcal{U}\|_{L^2}^2+\int_0^t L_{\rho,m+1}^2\|\partial_y\partial_x^m\mathcal{U}\|_{L^2}^2ds$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \int_0^t L_{\rho,m+1}^2 \|\partial_x^{m+1}\lambda\|_{L^2}\|\partial_x^m \mathcal{U}\|_{L^2} ds \\
&\quad + \int_0^t L_{\rho,m+1}^2 \left\| \partial_x^m \left[(\partial_x \partial_y u) \int_0^y \mathcal{U}(t,x,\tilde{y}) d\tilde{y} + (\partial_x u)\mathcal{U} \right] \right\|_{L^2} \|\partial_x^m \mathcal{U}\|_{L^2} ds \\
&\quad + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \int_0^t L_{\rho,m+1}^2 \|(\partial_x^k u)\partial_x^{m-k+1}\mathcal{U} + (\partial_x^k v)\partial_x^{m-k}\partial_y \mathcal{U}\|_{L^2}\|\partial_x^m \mathcal{U}\|_{L^2} ds.
\end{aligned}
$$

注意到上述估计中的第二项和最后一项没有切向导数的损失, 故可直接验证

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t L_{\rho,m+1}^2 \left\| \partial_x^m \left[(\partial_x \partial_y u) \int_0^y \mathcal{U}(t,x,\tilde{y}) d\tilde{y} + (\partial_x u)\mathcal{U} \right] \right\|_{L^2} \|\partial_x^m \mathcal{U}\|_{L^2} ds \\
&\quad \leqslant \varepsilon \int_0^t L_{\rho,m+1}^2 \|\partial_y \partial_x^m \mathcal{U}\|_{L^2}^2 ds + C_\varepsilon \int_0^t (|\vec{a}|_\rho^3 + |\vec{a}|_\rho^4) ds,
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \int_0^t L_{\rho,m+1}^2 \|(\partial_x^k u)\partial_x^{m-k+1}\mathcal{U} + (\partial_x^k v)\partial_x^{m-k}\partial_y \mathcal{U}\|_{L^2}\|\partial_x^m \mathcal{U}\|_{L^2} ds \\
&\quad \leqslant \varepsilon \int_0^t L_{\rho,m+1}^2 \|\partial_y \partial_x^m \mathcal{U}\|_{L^2}^2 ds + C_\varepsilon \int_0^t (|\vec{a}|_\rho^3 + |\vec{a}|_\rho^4) ds,
\end{aligned}
$$

其中 $\varepsilon > 0$ 为任意小的常数. 另一方面, 利用定义 3.2, 可知对任意的 $\rho < \tilde{\rho}$ 均有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t L_{\rho,m+1}^2 \|\partial_x^{m+1}\lambda\|_{L^2}\|\partial_x^m \mathcal{U}\|_{L^2} ds \\
&\leqslant \int_0^t \frac{L_{\rho,m+1}^2}{(m+2)L_{\tilde{\rho},m+2}L_{\tilde{\rho},m+1}} L_{\tilde{\rho},m+2}(m+2)\|\partial_x^{m+1}\lambda\|_{L^2} \times L_{\tilde{\rho},m+1}\|\partial_x^m \mathcal{U}\|_{L^2} ds \\
&\leqslant C \int_0^t \frac{m+2}{\tilde{\rho}} \left(\frac{\rho}{\tilde{\rho}}\right)^{m+2} |\vec{a}|_{\tilde{\rho}}^2 ds \leqslant C \int_0^t \frac{|\vec{a}|_{\tilde{\rho}}^2}{\tilde{\rho} - \rho} ds.
\end{aligned}
$$

联立上述估计式可得

$$
\begin{aligned}
&\sup_{m\geqslant 0} L_{\rho,m+1}^2 \|\partial_x^m \mathcal{U}\|_{L^2}^2 + \sup_{m\geqslant 0} \int_0^t L_{\rho,m+1}^2 \|\partial_y \partial_x^m \mathcal{U}\|_{L^2}^2 ds \\
&\quad \leqslant C \int_0^t (|\vec{a}|_\rho^3 + |\vec{a}|_\rho^4) ds + C \int_0^t \frac{|\vec{a}|_{\tilde{\rho}}^2}{\tilde{\rho} - \rho} ds. \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

(ii) 辅助函数 λ 的估计. 辅助函数 λ 这一项的处理与模型方程 (2.14) 中的 h 非常类似. 在方程 (3.4) 两边同时对 x 求 m 阶导数:

$$
\begin{aligned}
(\partial_t + u\partial_x + v\partial_y - \partial_y^2)\partial_x^m \lambda &= \partial_x^m(-(\partial_x u)^2 + 2(\partial_y^2 u)\mathcal{U}) \\
&\quad - \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} [(\partial_x^k u)\partial_x^{m-k+1}\lambda + (\partial_x^k v)\partial_x^{m-k}\partial_y \lambda].
\end{aligned}
$$

进一步地, 注意到 $\partial_x^m \lambda|_{y=0} = 0$ 以及 $\partial_x^m \lambda|_{t=0} = \partial_x^{m+1} u_0$, 从而

$$
\frac{1}{2} L_{\rho,m+1}^2 (m+1)^2 \|\partial_x^m \lambda\|_{L^2}^2 + \int_0^t L_{\rho,m+1}^2 (m+1)^2 \|\partial_y \partial_x^m \lambda\|_{L^2}^2 ds
$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \frac{1}{2}L_{\rho,m+1}^2(m+1)^2\|\partial_x^m u_0\|_{L^2}^2\\
&\quad+\int_0^t L_{\rho,m+1}^2(m+1)^2|(\partial_x^m(-(\partial_x u)^2+2(\partial_y^2 u)\mathcal{U}),\ \partial_x^m\lambda)_{L^2}|ds\\
&\quad+\sum_{k=1}^m\binom{m}{k}\int_0^t L_{\rho,m+1}^2(m+1)^2|((\partial_x^k u)\partial_x^{m-k+1}\lambda+(\partial_x^k v)\partial_x^{m-k}\partial_y\lambda,\ \partial_x^m\lambda)_{L^2}|ds.
\end{aligned}$$

虽然不等式右边没有切向导数的损失, 但是为了得到关于因子 $m+1$ 的一致上界, 我们需要用 $|\vec{a}|_{\tilde{\rho}}$ 而不是 $|\vec{a}|_{\rho}$ 来控制右端项. 借助于 Leibniz 公式可以验证

$$\begin{aligned}
&\int_0^t L_{\rho,m+1}^2(m+1)^2|(\partial_x^m((\partial_x u)^2),\ \partial_x^m\lambda)_{L^2}|ds\\
&\quad\leqslant C\int_0^t(m+1)\frac{L_{\rho,m+1}^2}{L_{\tilde{\rho},m+1}^2}L_{\tilde{\rho},m+1}\|\partial_x^m(\partial_x u)^2\|_{L^2}\times L_{\tilde{\rho},m+1}(m+1)\|\partial_x^m\lambda\|_{L^2}ds\\
&\quad\leqslant C\int_0^t(m+1)\left(\frac{\rho}{\tilde{\rho}}\right)^{m+2}|\vec{a}|_{\tilde{\rho}}^2\,ds\leqslant C\int_0^t\frac{|\vec{a}|_{\tilde{\rho}}^2}{\tilde{\rho}-\rho}ds.
\end{aligned}$$

剩余的项

$$\int_0^t L_{\rho,m+1}^2(m+1)^2|(\partial_x^m((\partial_y^2 u)\mathcal{U}),\ \partial_x^m\lambda)_{L^2}|ds$$

的处理虽然会复杂很多, 但是想法和上一项类似, 此时需要利用关于法方向的耗散性. 同样地, 对于项

$$\sum_{k=1}^m\binom{m}{k}\int_0^t L_{\rho,m+1}^2(m+1)^2|((\partial_x^k u)\partial_x^{m-k+1}\lambda+(\partial_x^k v)\partial_x^{m-k}\partial_y\lambda,\ \partial_x^m\lambda)_{L^2}|ds$$

可做类似估计, 具体的讨论可以参见文献 [22, 第 5 节]. 从而结合上述估计式可得

$$\begin{aligned}
&\sup_{m\geqslant 0}L_{\rho,m+1}^2(m+1)^2\|\partial_x^m\lambda\|_{L^2}^2+\sup_{m\geqslant 0}\int_0^t L_{\rho,m+1}^2(m+1)^2\|\partial_y\partial_x^m\lambda\|_{L^2}^2ds\\
&\quad\leqslant C\int_0^t(|\vec{a}|_\rho^2+|\vec{a}|_\rho^4)ds+C\int_0^t\frac{|\vec{a}|_{\tilde{\rho}}^2}{\tilde{\rho}-\rho}ds.
\end{aligned}$$

(iii) 速度 u 的估计. 为了估计 $\partial_x^m u$, 我们将利用 (3.2) 与 (3.3), 通过将 $\partial_x^m u$ 与 $\partial_x^{m-1}\int_0^y\mathcal{U}d\tilde{y}$ 所满足的两个方程相减, 消去有导数损失的项 $\partial_x^m v$, 从而对于

$$\partial_x^m u-(\partial_y u)\int_0^y\partial_x^{m-1}\mathcal{U}d\tilde{y}$$

所满足的时间演化方程中没有导数损失项. 由此可推导出

$$\sup_{m\geqslant 0}L_{\rho,m}^2\left\|\langle y\rangle^l\partial_x^m u-\langle y\rangle^l(\partial_y u)\int_0^y\partial_x^{m-1}\mathcal{U}d\tilde{y}\right\|_{L^2}^2\leqslant C\int_0^t(|\vec{a}|_\rho^2+|\vec{a}|_\rho^4)ds.$$

联立上式与 (3.8), 可得

$$\sup_{m\geqslant 0}L_{\rho,m}^2\|\langle y\rangle^l\partial_x^m u\|_{L^2}^2\leqslant C\int_0^t(|\vec{a}|_\rho^2+|\vec{a}|_\rho^4)ds+C\int_0^t\frac{|\vec{a}|_{\tilde{\rho}}^2}{\tilde{\rho}-\rho}ds.$$

从而完成了切向导数的估计, 剩下只需估计 u 的法向导数. 这一部分并不困难, 因为我们可以借助法向的耗散性质得到, 故此次省去法向的处理, 详细的讨论见文献 [22, 引理4.3]. 这样我们就可以得到定理 3.2 中所需的估计.

3.2 三维 Prandtl 方程的局部适定性

三维情形下, 定理 3.1 的证明与二维类似, 仅需将 (3.3) 与 (3.4) 中的标量辅助函数 $\mathcal{U}$ 与 λ 替换成向量值函数 $\boldsymbol{\mathcal{U}}=(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2)$ 与 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2)$, 其中 $\mathcal{U}_j, j=1,2$, 满足方程

$$\begin{cases}(\partial_t+u\cdot\partial_x+v\partial_y-\partial_y^2)\displaystyle\int_0^y\mathcal{U}_j(t,x,\tilde{y})d\tilde{y}=-\partial_{x_j}v(t,x,y),\\ \mathcal{U}_j|_{t=0}=0,\quad \partial_y\mathcal{U}_j|_{y=0}=\mathcal{U}_j|_{y\to+\infty}=0,\end{cases}$$

而

$$\begin{cases}\lambda_1=\partial_{x_1}u_1-(\partial_yu_1)\displaystyle\int_0^y\mathcal{U}_1d\tilde{y},\quad \lambda_2=\partial_{x_2}u_1-(\partial_yu_1)\displaystyle\int_0^y\mathcal{U}_2d\tilde{y},\\ \tilde{\lambda}_1=\partial_{x_1}u_2-(\partial_yu_2)\displaystyle\int_0^y\mathcal{U}_1d\tilde{y},\quad \tilde{\lambda}_2=\partial_{x_2}u_2-(\partial_yu_2)\displaystyle\int_0^y\mathcal{U}_2d\tilde{y}.\end{cases}$$

进一步地, 对应于定义 3.2, 我们可以定义 $\vec{a}=(u,\boldsymbol{\mathcal{U}},\boldsymbol{\lambda})$ 以及

$$|\vec{a}|_\rho=\|u\|_\rho+\sup_{m\geqslant0}\sum_{1\leqslant j\leqslant2}[L_{\rho,m+1}\|\partial_{x_j}^m\boldsymbol{\mathcal{U}}\|_{L^2}+L_{\rho,m+1}(m+2)\|\partial_{x_j}^m\lambda\|_{L^2}].$$

从而利用估计式

$$\|\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^3)}\leqslant\|\partial_{x_1}^{\alpha_1+\alpha_2}f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^3)}+\|\partial_{x_2}^{\alpha_1+\alpha_2}f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^3)},$$

其中 $(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{Z}_+^2$, 可知定理 3.2 中的先验估计此时仍成立. 详细的讨论可参见文献 [22].

4 Prandtl 型方程的 Gevrey 适定性问题

本节主要考虑具有与 Prandtl 方程类似退化结构的两类流体力学方程, 一类是带有背景磁场的 Prandtl 方程, 另一类是静力学 Prandtl 方程. 我们侧重介绍如何采用第 2 节中的抽象 Cauchy-Kovalevskaya 定理, 在 Gevrey 类框架下讨论这两类方程的适定性. 由于这两类方程的退化结构比经典的 Prandtl 方程复杂, 所以目前还没有完善的结果, 此处我们仅列举部分进展.

4.1 磁流体边界层方程的适定性

磁流体 (magnetohydrodynamics, MHD) 方程主要是描述导电流体在磁场影响下的运动. 与 Prandtl 方程类似, 当我们考虑有界区域中磁流体方程的高雷诺数极限时, 由于磁流体的边界条件

与理想磁流体的边界条件不匹配, 从而也会有边界层出现. 事实上, 采用 Prandtl 拟设 (Prandtl's ansatz), Liu 等[31] 以及 Gérard-Varet 和 Prestipino[15] 推导出如下的半空间中磁流体边界层方程:

$$\begin{cases}(\partial_t+\vec{u}\cdot\nabla-\partial_z^2)u_h-(\vec{f}\cdot\nabla)f_h+\nabla_h p=0,\\ \partial_t\vec{f}-\nabla\times(\vec{u}\times\vec{f})-\partial_z^2\vec{f}=0,\\ \operatorname{div}\,\vec{u}=\operatorname{div}\,\vec{f}=0,\\ \vec{u}|_{z=0}=(\partial_z f_h,f_z)|_{z=0}=\mathbf{0},\quad (u_h,f_h)|_{z\to+\infty}=(\boldsymbol{U},\boldsymbol{F}),\\ u_h|_{t=0}=u_{h,0},\quad f_h|_{t=0}=f_{h,0},\end{cases}\tag{4.1}$$

其中 $x_h\in\mathbb{R}^{n-1}$ 为切向变元, $z\in\mathbb{R}_+$ 为法向变量, 上面我们采用了记号 $\nabla_h=\partial_{x_h}=(\partial_{x_1},\ldots,\partial_{x_{d-1}})$ 以及 $\nabla=(\nabla_h,\partial_z)$, 未知函数 $\vec{u}=(u_h,u_z)$ 以及 $\vec{f}=(f_h,f_z)$ 分别代表速度场与背景磁场. 与 Prandtl 方程类似, 方程 (4.1) 中的 p, $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 均为给定的关于 (t,x_h) 变量的函数, 并且满足 Bernoulli 法则:

$$\begin{cases}\partial_t\boldsymbol{U}+(\boldsymbol{U}\cdot\nabla_h)\boldsymbol{U}-(\boldsymbol{F}\cdot\nabla_h)\boldsymbol{F}+\nabla_h p=0,\\ \partial_t\boldsymbol{F}+(\boldsymbol{U}\cdot\nabla_h)\boldsymbol{F}-(\boldsymbol{F}\cdot\nabla_h)\boldsymbol{U}=0.\end{cases}$$

利用不可压条件以及边界条件, 我们有法向速度与法向磁场的表达式:

$$u_z(t,x_h,z)=-\int_0^z\nabla_h\cdot u_h(t,x_h,\tilde{z})d\tilde{z},\quad f_z(t,x_h,z)=-\int_0^z\nabla_h\cdot f_h(t,x_h,\tilde{z})d\tilde{z}.$$

与 Prandtl 方程相比, 磁流体边界层方程不仅法向速度出现导数损失, 而且法向磁场也有导数损失, 这也是磁流体边界层方程研究的主要困难, 也导致磁流体边界层的研究可能比 Prandtl 方程要复杂. 一方面, 磁场可对流体有稳定性效应, 事实上, 如果切向磁场不为零, 则即使 Oleinik 单调性条件不成立, Liu 等[31, 32] 证明了二维磁流体边界层方程的 Sobolev 适定性以及相关高雷诺数极限. 另一方面, 受 Prandtl 方程 Gevery 类适定性理论启发, 一个自然的问题是: *如果初始值没有任何结构性假设条件, 则磁流体边界层方程组 (4.1) 是否在指标为 2 的 Gevrey 类空间中适定?* 目前这个问题仍然是未知的. 根据 Liu 等[28] 的工作可知, 磁流体方程组 (4.1) 在指标大于 2 的 Gevrey 空间中是不适定的; 另一方面, 本文作者[26] 证明了其在指标 $\leqslant 3/2$ 的 Gevrey 空间中是适定的. 但是在指标介于 3/2 与 2 之间的 Gevrey 空间中是否适定仍然是未知的.

接下来简要介绍本文作者[26] 关于磁流体方程组 (4.1) 在 Gevrey 空间中的结果. 简单起见, 我们仅考虑二维情形, 三维的讨论非常类似. 二维磁流体方程组可写为

$$\begin{cases}(\partial_t+u\partial_x+v\partial_y-\partial_y^2)u-(f\partial_x+g\partial_y)f=0,\\ \partial_t f+\partial_y(vf-ug)-\partial_y^2 f=0,\\ \partial_t g-\partial_x(vf-ug)-\partial_y^2 g=0,\\ \partial_x u+\partial_y v=\partial_x f+\partial_y g=0,\end{cases}$$

其中 (u,v) 为速度场, 而 (f,g) 为磁场. 借助不可压条件, 我们将上述方程重新写为

$$\begin{cases}(\partial_t+u\partial_x+v\partial_y-\partial_y^2)u=\xi,\\ (\partial_t+u\partial_x+v\partial_y-\partial_y^2)f=\eta,\\ (\partial_t+u\partial_x+v\partial_y-\partial_y^2)g=f\partial_x v-g\partial_x u,\end{cases}\tag{4.2}$$

其中

$$\xi=(f\partial_x+g\partial_y)f,\quad \eta=(f\partial_x+g\partial_y)u.$$

类似于 Prandtl 方程情形, 我们可以通过 (3.3) 与 (3.4) 同样地定义 $\tilde{\mathcal{U}}$ 与 $\tilde{\lambda}$. 则类似于关系式 (3.5), 此时的 $\tilde{\mathcal{U}}$ 与 $\tilde{\lambda}$ 仍满足

$$(\partial_t+u\partial_x+v\partial_y-\partial_y^2)\tilde{\mathcal{U}}=\partial_x\tilde{\lambda}+(\partial_x\partial_y u)\int_0^y\tilde{\mathcal{U}}d\tilde{y}+(\partial_x u)\tilde{\mathcal{U}}. \tag{4.3}$$

但是与 (3.4) 不同, 此时 $\tilde{\lambda}$ 满足方程

$$(\partial_t+u\partial_x+v\partial_y-\partial_y^2)\tilde{\lambda}=\partial_x\xi-(\partial_x u)^2+2(\partial_y^2u)\tilde{\mathcal{U}}-(\partial_y\xi)\int_0^y\tilde{\mathcal{U}}d\tilde{y}. \tag{4.4}$$

注意到 $\partial_x\xi=\partial_x(f\partial_x f+g\partial_y f)$, 故在上述关于 $\tilde{\lambda}$ 方程中, 关于 $\partial_x\xi$ 这一项有一阶切向导数的损失. 粗略看来, $(\tilde{\mathcal{U}},\tilde{\lambda})$ 类似于模型方程

$$\partial_t^2h=F(t,\partial_x^2h),$$

而不是对应于 Prandtl 方程情形的模型 (2.13). 在文献 [26] 中, 作者观察到 ξ,η 满足方程组

$$\begin{cases}(\partial_t+u\partial_x+v\partial_y-\partial_y^2)\xi-(f\partial_x+g\partial_y)\eta=2[(\partial_x f)\partial_y^2f-(\partial_y f)\partial_x\partial_y f],\\ (\partial_t+u\partial_x+v\partial_y-\partial_y^2)\eta-(f\partial_x+h\partial_y)\xi=2[(\partial_x f)\partial_y^2u-(\partial_y f)\partial_x\partial_y u].\end{cases}$$

上述方程中右端项没有切向导数的损失, 而能量估计中, 左边项也不会有导数损失, 从而联立上述方程与 (4.3)–(4.4), 可知 $(\tilde{\mathcal{U}},\tilde{\lambda},\xi)$ 类似于模型方程

$$\partial_t^3h=F(t,\partial_x^2h).$$

从而根据模型 (2.17), 我们可在指标为 3/2 的 Gevery 空间中估计 $(\tilde{\mathcal{U}},\tilde{\lambda},\xi)$, 进而磁流体边界层方程 (4.2) 在指标为 3/2 的 Gevrey 空间中是局部适定的; 同样的结论也适用于三维磁流体方程 (4.1). 关于磁流体方程的 Gevrey 适定性工作, 详细的讨论可参见本文作者的论文 [26].

4.2 静力学 Prandtl 方程

静力学 Navier-Stokes 方程组在大气和海洋科学中起着重要作用, 主要用于描述大气海洋学中的大尺度运动现象, 这类流动的典型特征是尺度是各向异性的. 通过尺度变换, 这类流体可以通过带状区域的各向异性 Navier-Stokes 方程所刻画:

$$\begin{cases}(\partial_t+u^\varepsilon\cdot\partial_x+v^\varepsilon\partial_y-\varepsilon^2\Delta_x-\partial_y^2)u^\varepsilon+\partial_x p^\varepsilon=0, & (x,y)\in\mathbb{R}^{n-1}\times]0,1[,\\ \varepsilon^2(\partial_t+u^\varepsilon\cdot\partial_x+v^\varepsilon\partial_y-\varepsilon^2\Delta_x-\partial_y^2)v^\varepsilon+\partial_y p^\varepsilon=0, & (x,y)\in\mathbb{R}^{n-1}\times]0,1[,\\ \partial_x\cdot u^\varepsilon+\partial_y v^\varepsilon=0, & (x,y)\in\mathbb{R}^{n-1}\times]0,1[,\end{cases} \tag{4.5}$$

其中 $(u^\varepsilon,v^\varepsilon)$ 和 p^ε 为未知速度场和压力. 由于经典的 Navier-Stokes 方程是抛物型, 具有无穷传播速度的性质, 故从物理角度来看并不是合理的. 为此, 在 20 世纪 40 年代, Cattaneo [2,3] 利用

所谓的 Cattaneo 定律代替 Fourier 定律, 则对应于上述抛物方程组 (4.5), 此时我们得到带状区域 $\mathbb{R}^{n-1}\times]0,1[$ 中的双曲型 Navier-Stokes 方程:

$$\begin{cases} \eta\partial_t^2u^\varepsilon+\eta\partial_t(u^\varepsilon\cdot\partial_xu^\varepsilon+v^\varepsilon\partial_yu^\varepsilon) \\ \quad+(\partial_t+u^\varepsilon\cdot\partial_x+v^\varepsilon\partial_y-\varepsilon^2\Delta_x-\partial_y^2)u^\varepsilon+\partial_xp^\varepsilon=0, \\ \varepsilon^2(\eta\partial_t^2v^\varepsilon+\eta\partial_t(u^\varepsilon\cdot\partial_xv^\varepsilon+v^\varepsilon\partial_yv^\varepsilon)) \\ \qquad+\varepsilon^2(\partial_t+u^\varepsilon\cdot\partial_x+v^\varepsilon\partial_y-\varepsilon^2\Delta_x-\partial_y^2)v^\varepsilon+\partial_yp^\varepsilon=0, \\ \partial_x\cdot u^\varepsilon+\partial_yv^\varepsilon=0, \end{cases} \tag{4.6}$$

其中 η 是非常小的时滞参数. 这里我们考虑非滑移边界条件:

$$u^\varepsilon|_{y=0,1}=0,\quad v^\varepsilon|_{y=0,1}=0.$$

形式上, 在方程组 (4.5) 中令 $\varepsilon,\eta\to0$, 则我们得到带状区域 $\mathbb{R}^{n-1}\times]0,1[$ 中静力学 Navier-Stokes 方程 (或称静力学 Prandtl 方程):

$$\begin{cases} (\partial_t+u\cdot\partial_x+v\partial_y-\partial_y^2)u+\partial_xp=0, \\ \partial_yp=0, \\ \partial_x\cdot u+\partial_yv=0, \\ u|_{y=0,1}=0,\quad v|_{y=0,1}=0, \\ u|_{t=0}=u_0. \end{cases} \tag{4.7}$$

相应地, 在方程组 (4.6) 中令 $\varepsilon\to0$, 则我们得到带状区域 $\mathbb{R}^{n-1}\times]0,1[$ 中的双曲型静力学 Navier-Stokes 方程:

$$\begin{cases} \eta\partial_t^2u+\eta\partial_t(u\cdot\partial_xu+v\partial_yu)+(\partial_t+u\cdot\partial_x+v\partial_y-\partial_y^2)u+\partial_xp=0, \\ \partial_yp=0, \\ \partial_x\cdot u+\partial_yv=0, \\ u|_{y=0,1}=0,\quad v|_{y=0,1}=0, \\ u|_{t=0}=u_0.\quad \partial_tu|_{t=0}=u_1. \end{cases} \tag{4.8}$$

与经典的 Prandtl 方程相比, 方程组 (4.8) 与 (4.7) 中的压强是未知函数, 由于压强也会发生切向导数损失, 这为研究这两类方程带来极大的困难. 事实上, 关于上述方程组 (4.8) 与 (4.7) 的 Sobolev 适定性目前还没有任何的结果. 一般而言, 如果初始值没有结构性假设条件, 则静力学方程 (4.7) 一般仅在解析框架下是适定的. 对于正则性较解析性弱的初始值, 静力学方程 (4.7) 的适定性依赖于凸性这一结构性假设条件: 最近对于凸性的 Gevrey 初始值, Gérard-Varet 等[10] 与 Wang 和 Wang[42] 证明了二维静力学方程 (4.7) 在临界指标为 3/2 的 Gevrey 空间中的适定性, 这一结果改进了 Gérard-Varet 等[14] 的指标为 9/8 的工作. 但是三维静力学方程 (4.7) 目前没有任何 Gevrey 类适定性结果.

相较于半线性方程 (4.7), 由于拟线性项

$$\eta\partial_t((u\cdot\partial_x)u+v\partial_yu)$$

导致的额外导数损失, 拟线性双曲型静力学 Navier-Stokes 方程 (4.8) 的处理更为困难. 事实上, 如果对方程组 (4.8) 推导能量估计, 则除了切向变元的导数损失, 拟线性项

$$\eta(\partial_x^m(v\partial_t\partial_y u),\ \partial_t\partial_x^m u)_{L^2}=\eta\sum_{0\leqslant j\leqslant m}\binom{m}{j}((\partial_x^j v)\partial_t\partial_y\partial_x^{m-j}u,\ \partial_t\partial_x^m u)_{L^2}$$

也将出现关于法向变元 y 的导数损失. 即使考虑二维情形, 目前关于拟线性双曲型静力学 Navier-Stokes 方程 (4.8) 还没有任何的 Gevery 适定性工作. 最近 Paicu 和 Zhang [38] 对于带状区域 $\mathbb{R}^{n-1}\times\,]0,1[$ 中, 考虑了方程组 (4.8) 简化后的半线性模型方程:

$$\begin{cases}(\partial_t^2+\partial_t+u\cdot\partial_x+v\partial_y-\partial_y^2)u+\partial_x p=0,\\ \partial_y p=0,\\ \partial_x\cdot u+\partial_y v=0,\\ u|_{y=0,1}=0,\quad v|_{y=0,1}=0,\\ u|_{t=0}=u_0,\quad \partial_t u|_{t=0}=u_1.\end{cases}\tag{4.9}$$

在二维情形下, Paicu 和 Zhang[38] 对于没有任何结构假设条件的初始值, 在指标为 2 的 Gevey 空间中证明了 (4.9) 的全局适定性. 三维相应的结果由本文作者 [27] 所证明. 这其中主要的思想是利用双曲扰动项 ∂_t^2 的稳定机制, 将方程写成模型 (2.13) 的形式, 然后在指标为 2 的 Gevrey 空间中建立方程组 (4.9) 的适定性; 详细的讨论参见文献 [27].

致谢 作者感谢审稿人宝贵的修改意见.

参考文献

1 Alexandre R, Wang Y-G, Xu C-J, et al. Well-posedness of the Prandtl equation in Sobolev spaces. J Amer Math Soc, 2015, 28: 745–784

2 Cattaneo C. Sulla conduzione del calore. Atti Sem Mat Fis Univ Modena, 1949, 3: 83–101

3 Cattaneo C. Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanée. C R Acad Sci Paris, 1958, 247: 431–433

4 Chen D, Wang Y, Zhang Z. Well-posedness of the linearized Prandtl equation around a non-monotonic shear flow. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 2018, 35: 1119–1142

5 Collot C, Ghoul T-E, Masmoudi N. Singularities and unsteady separation for the inviscid two-dimensional Prandtl system. Arch Ration Mech Anal, 2021, 240: 1349–1430

6 Dalibard A-L, Masmoudi N. Separation for the stationary Prandtl equation. Publ Math Inst Hautes Études Sci, 2019, 130: 187–297

7 Dietert H, Gérard-Varet D. Well-posedness of the Prandtl equations without any structural assumption. Ann PDE, 2019, 5: 8

8 E W, Engquist B. Blowup of solutions of the unsteady Prandtl's equation. Comm Pure Appl Math, 1997, 50: 1287–1293

9 Gérard-Varet D, Dormy E. On the ill-posedness of the Prandtl equation. J Amer Math Soc, 2010, 23: 591–609

10 Gérard-Varet D, Iyer S, Maekawa Y. Improved well-posedness for the triple-deck and related models via concavity. J Math Fluid Mech, 2023, 25: 69

11 Gérard-Varet D, Maekawa Y, Masmoudi N. Gevrey stability of Prandtl expansions for 2-dimensional Navier-Stokes flows. Duke Math J, 2018, 167: 2531–2631

12 Gérard-Varet D, Maekawa Y, Masmoudi N. Optimal prandtl expansion around concave boundary layer. arXiv:2005.05022, 2020

13 Gérard-Varet D, Masmoudi N. Well-posedness for the Prandtl system without analyticity or monotonicity. Ann Sci Éc Norm Supér (4), 2015, 48: 1273–1325

14 Gérard-Varet D, Masmoudi N, Vicol V. Well-posedness of the hydrostatic Navier-Stokes equations. Anal PDE, 2020, 13: 1417–1455

15 Gérard-Varet D, Prestipino M. Formal derivation and stability analysis of boundary layer models in MHD. Z Angew Math Phys, 2017, 68, Paper No. 76
16 Grenier E. On the nonlinear instability of Euler and Prandtl equations. Comm Pure Appl Math, 2000, 53: 1067–1091
17 Grenier E, Guo Y, Nguyen T T. Spectral instability of general symmetric shear flows in a two-dimensional channel. Adv Math, 2016, 292: 52–110
18 Grenier E, Guo Y, Nguyen T T. Spectral instability of characteristic boundary layer flows. Duke Math J, 2016, 165: 3085–3146
19 Guo Y, Nguyen T. A note on Prandtl boundary layers. Comm Pure Appl Math, 2011, 64: 1416–1438
20 Ignatova M, Vicol V. Almost global existence for the Prandtl boundary layer equations. Arch Ration Mech Anal, 2016, 220: 809–848
21 Kukavica I, Masmoudi N, Vicol V, et al. On the local well-posedness of the Prandtl and hydrostatic Euler equations with multiple monotonicity regions. SIAM J Math Anal, 2014, 46: 3865–3890
22 Li W-X, Masmoudi N, Yang T. Well-posedness in Gevrey function space for 3D Prandtl equations without structural assumption. Comm Pure Appl Math, 2022, 75: 1755–1797
23 Li W-X, Ngo V-S, Xu C-J. Boundary layer analysis for the fast horizontal rotating fluids. Commun Math Sci, 2019, 17: 299–338
24 Li W-X, Wu D, Xu C-J. Gevrey class smoothing effect for the Prandtl equation. SIAM J Math Anal, 2016, 48: 1672–1726
25 Li W-X, Yang T. Well-posedness in Gevrey function spaces for the Prandtl equations with non-degenerate critical points. J Eur Math Soc (JEMS), 2020, 22: 717–775
26 Li W-X, Yang T. Well-posedness of the MHD boundary layer system in Gevrey function space without structural assumption. SIAM J Math Anal, 2021, 53: 3236–3264
27 Li W-X, Yang T. 3D hyperbolic Navier-Stokes equations in a thin strip: Global well-posedness and hydrostatic limit in Gevrey space. Commun Math Anal Appl, 2022, 1: 471–502
28 Liu C-J, Wang D, Xie F, et al. Magnetic effects on the solvability of 2D MHD boundary layer equations without resistivity in Sobolev spaces. J Funct Anal, 2020, 279: 108637
29 Liu C-J, Wang Y-G, Yang T. On the ill-posedness of the Prandtl equations in three-dimensional space. Arch Ration Mech Anal, 2016, 220: 83–108
30 Liu C-J, Wang Y-G, Yang T. A well-posedness theory for the Prandtl equations in three space variables. Adv Math, 2017, 308: 1074–1126
31 Liu C-J, Xie F, Yang T. MHD boundary layers theory in Sobolev spaces without monotonicity, I: Well-posedness theory. Comm Pure Appl Math, 2019, 72: 63–121
32 Liu C-J, Xie F, Yang T. Justification of Prandtl ansatz for MHD boundary layer. SIAM J Math Anal, 2019, 51: 2748–2791
33 Liu C-J, Yang T. Ill-posedness of the Prandtl equations in Sobolev spaces around a shear flow with general decay. J Math Pures Appl, 2017, 108: 150–162
34 Masmoudi N, Wong T K. Local-in-time existence and uniqueness of solutions to the Prandtl equations by energy methods. Comm Pure Appl Math, 2015, 68: 1683–1741
35 Nirenberg L. An abstract form of the nonlinear Cauchy-Kowalewski theorem. J Differential Geom, 1972, 6: 561–576
36 Oleinik O A, Samokhin V N. Mathematical Models in Boundary Layer Theory. Applied Mathematics and Mathematical Computation, vol. 15. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 1999
37 Ovsjannikov L V. A nonlinear Cauchy problem in a scale of Banach spaces. Dokl Akad Nauk SSSR, 1971, 200: 789–792
38 Paicu M, Zhang P. Global hydrostatic approximation of the hyperbolic Navier-Stokes system with small Gevrey class 2 data. Sci China Math, 2022, 65: 1109–1146
39 Rodino L. Linear Partial Differential Operators in Gevrey Spaces. River Edge: World Sci Publ, 1993
40 Sammartino M, Caflisch R E. Zero viscosity limit for analytic solutions, of the Navier-Stokes equation on a half-space. I. Existence for Euler and Prandtl equations. Comm Math Phys, 1998, 192: 433–461
41 Sammartino M, Caflisch R E. Zero viscosity limit for analytic solutions of the Navier-Stokes equation on a half-space. II. Construction of the Navier-Stokes solution. Comm Math Phys, 1998, 192: 463–491
42 Wang C, Wang Y. Optimal Gevrey stability of hydrostatic approximation for the Navier-Stokes equations in a thin domain. J Inst Math Jussieu, in press, 2024
43 Wang C, Wang Y, Zhang Z. Zero-viscosity limit of the Navier-Stokes equations in the analytic setting. Arch Ration Mech Anal, 2017, 224: 555–595
44 Xin Z, Zhang L. On the global existence of solutions to the Prandtl's system. Adv Math, 2004, 181: 88–133
45 Xu C-J, Zhang X. Long time well-posedness of Prandtl equations in Sobolev space. J Differential Equations, 2017, 263: 8749–8803
46 Yang T. Vector fields of Cancellation for the Prandtl Operators. arXiv:2201.10139, 2022

47 Zhang P, Zhang Z. Long time well-posedness of Prandtl system with small and analytic initial data. J Funct Anal, 2016, 270: 2591–2615

Gevrey well-posedness for the Prandtl equation

Wei-Xi Li & Tong Yang

Abstract The Prandtl equation is a degenerate type equation (or system), and the typical feature is that the loss of derivatives occurs in a non-local term. The main difficulty to investigate the well-posedness property is to overcome the loss of derivatives. There are two main settings for the well-posedness theory. The first one refers to the Sobolev space, which needs Oleinik monotonicity assumption, so that the loss of derivative is overcome by using Crocco transformation or cancellation mechanism. The second framework imposes the analytic regularity on the initial data so that the abstract Cauchy-Kovalevskaya may apply. In this survey, we reduce the analytic regularity of the initial data and prove the well-posedness in Gevrey setting without any structural assumptions. The main tool is the combination of the abstract Cauchy-Kovalevskaya theory and cancellation mechanism.

Keywords Prandtl equation, well-posedness, Gevrey spaces

MSC(2020) 35Q30, 35Q31, 35Q35

doi: 10.1360/SSM-2024-0214