一种针对多峰随机分布的不确定性传播分析方法

谢博群^{1,2}, 张哲^{1,2*}, 姜潮^{1,2}

1. 湖南大学汽车车身先进设计制造国家重点实验室, 长沙 410082;

2. 湖南大学机械与运载工程学院, 长沙 410082

*E-mail: zhangzhe0828@hnu.edu.cn

收稿日期: 2021-07-09; 接受日期: 2021-10-08; 网络版发表日期: 2021-12-20

国家自然科学基金创新研究群体(批准号: 51621004)、国家杰出青年科学基金(批准号: 51725502)、国家自然科学基金(批准号: 51805157)和国防基础科研项目(编号: JCKY2020110C105)资助

摘要 在实际工程应用中随机变量可能会服从多峰随机分布, 如火车减振器在长期使用后的阻尼特性和安全切割试件修复后的疲劳寿命等. 传统的不确定性传播方法主要用于处理单峰随机分布问题, 而在处理多峰随机分布问题时容易产生较大误差. 本研究提出了一种针对多峰随机分布的不确定性传播分析方法. 首先, 使用高斯混合模型建立多峰随机变量的概率密度函数; 其次, 发展了一种高效三元降维法计算响应函数的高阶统计矩, 该方法可以有效提高不确定传播的计算效率; 再次, 使用最大熵方法来计算响应的概率密度函数并且通过基于熵值的自适应方法来确定统计矩的最优阶数; 最后, 使用四个算例验证了提出方法在多峰不确定性传播中的计算精度和效率.

关键词 不确定性传播, 多峰随机分布, 高效三元降维法, 高阶统计矩

1 引言

不确定性广泛存在于工程问题中, 如非均匀材料^[1]、制造误差^[2]和随机载荷^[3]. 结构或系统输入参数的不确定性经过传播会导致性能响应发生较大波动, 影响结构或系统服役的可靠性和安全性^[4-8], 因此不确定性量化及传播成为工程结构和系统设计的重要组成部分.

不确定性传播是基于随机变量 $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$ 的分布信息得到响应函数 $Y = g(\mathbf{X})$ 的统计矩或概率密度函数. 目前, 不确定性传播方法的研究已经取得了许多重要的成果, 大体上可以分为四类: 抽样法、最可能

失效点法、数值积分法和代理模型法. 抽样法包括直接蒙特卡洛法^[9]和重要抽样法^[10]等, 这类方法虽然容易实施, 但计算精度取决于样本的数量, 需要大量的样本以保证较高的精度, 因此往往难以适用于复杂工程问题. 例如, Fan等人^[11]提出了一种改进的冷负荷预测可靠性方法, 将输入变量输入预测模型之前, 通过蒙特卡洛法和随机处理法离线标定输入变量, 得到了较好的效果. 最大可能失效点法包括一阶可靠度法^[12]和二阶可靠度法^[13], 这类方法在最可能失效点处使用一阶或二阶泰勒展开来获取解, 因此首先需要将非正态变量转变成标准正态变量来定位最大可能失效点. 例如, 袁修开等人^[14]提出了一种融合Kriging与改进一次

引用格式: 谢博群, 张哲, 姜潮. 一种针对多峰随机分布的不确定性传播分析方法. 中国科学: 技术科学, 2022, 52: 1259–1273

Xie B Q, Zhang Z, Jiang C. An uncertainty propagation analysis method considering multimodal random distribution (in Chinese). Sci Sin Tech, 2022, 52: 1259–1273, doi: 10.1360/SST-2021-0279

二阶矩方法的分析方法, 通过解决隐式极限状态函数的求导来提高结构可靠性分析的效率. 数值积分法使用降维积分^[15]和稀疏网格^[16]等方法计算响应函数的统计矩, 并基于统计矩获得响应函数的概率密度函数. 例如, Ding和Xu^[17]提出了一种改进的向量自适应二元降维方法, 有效地提高了统计矩以及可靠性的计算效率. 代理模型法包括混沌多项式展开法^[18]和Kriging法^[19]等, 其目标是基于随机变量分布类型来构建响应函数的高精度代理模型, 从而在保证精度的前提下大大提高不确定性传播分析的效率. 例如, Lin等人^[20]提出了一种基于数据驱动的混沌多项式展开法, 可以有效地处理相关随机变量的不确定性传播问题.

上述不确定性传播方法主要考虑随机变量服从单峰分布的情况, 如正态分布、均匀分布等. 然而, 在实际工程问题中存在着大量服从于多峰分布的随机变量. 例如, 火车减振器在长期使用后会发生退化并且其阻尼特性服从双峰随机分布^[21], 在对于钢制桥长期应力监测中可以看出应力分布函数为多峰概率密度函数^[22]. 传统的不确定性传播分析方法直接用于处理多峰随机分布问题时存在诸多技术问题. 例如, 常用的一次二阶矩方法和二次二阶矩方法需要将随机变量转换到标准正态空间求解最大可能失效点(most probable point, MPP), 对于常见的多峰随机变量上述标准化过程通常会引入较大的计算误差^[23], 传统的基于矩的不确定性传播方法通常仅计算响应函数的前四阶矩便可以很好地拟合单峰响应的概率密度函数. 然而, 如果响应概率密度函数是多峰分布则需要高阶矩才能较好地拟合, 而高阶矩的计算效率和精度存在较大挑战^[24]. 为此, 国内外学者针对多峰随机分布中的上述问题进行研究并取得了一定的成果. Hu和Du^[23]提出了一种针对双峰分布的均值鞍点逼近法并且较为精确地估计了结构的失效概率. Zhang等人^[24]提出了一种针对多峰分布的单变降维法并通过最大熵方法拟合出了响应的概率密度函数. Meng等人^[25]提出了一种新型混合模型并使用混沌多项式方法建立代理模型. 尽管上述方法在一定程度上可以有效地处理基于多峰随机分布的不确定性传播分析问题, 但仍然存在下列问题. 首先, 当响应函数高非线性时, 单变降维法和均值鞍点逼近法的计算精度相对较差. 其次, 使用混沌多项式展开法直接建立代理模型则变得非常困难, 因此可以将多峰随机分布转换为多个单峰随机分布进行处理, 但是

对于随机变量以及多峰的个数有一定的限制.

为此, 本文提出了针对多峰随机分布的不确定性传播分析方法. 该方法发展了一种高效三元降维法有效提高了非线性问题中高阶统计矩的计算精度和计算效率并使用一种判定方法确定了统计矩的最优阶数. 本文安排如下: 使用高斯混合模型构建多峰随机变量的概率密度函数; 发展高效三元降维法对高维积分进行处理并得到响应的统计矩; 使用最大熵方法建立响应的概率密度函数以及确定统计矩的最优阶数.

2 多峰概率密度函数建模

本文使用高斯混合模型构建多峰随机变量的概率密度函数. 高斯混合模型是一种广泛应用于图像识别、计算机视觉、机器学习等领域的聚类算法, 该模型通过多个高斯分量的线性组合来描述多峰随机变量 X , 因此 X 的概率密度函数可以表示为^[26]

$$f_X(x|\theta) = \sum_{k=1}^n \omega_k \varphi(x|\theta_k), \quad (1)$$

式中, ω_k 表示第 k 个高斯分量的系数, 该系数满足条件 $\omega_k \geq 0$ 和 $\sum_{k=1}^n \omega_k = 1$; $\varphi(x|\theta_k)$ 表示高斯概率密度函数的第 k 个高斯分量; $\theta_k = (\mu_k, \sigma_k^2)$ 表示第 k 个高斯分量的均值和方差; $\theta = (\omega_1, \theta_1, \omega_2, \theta_2, \dots, \omega_n, \theta_n)$ 表示高斯混合模型的参数集.

通过估计高斯混合模型的参数集 θ 可以确定多峰随机变量 X 的概率密度函数, 最大似然估计法是常用的参数估计方法. 首先获取一个样本集 $\mathbf{s} = \{s_1, s_2, \dots, s_h\}$, 该样本集中的样本 s_{k_1} 的概率可以表示为

$$p(s_{k_1}) = \sum_{k=1}^n p(\gamma_k) p(s_{k_1}|\gamma_k) = \sum_{k=1}^n \omega_k \varphi(s_{k_1}|\theta_k), \quad (2)$$

式中, γ_k 为隐变量. 然后通过样本集联合概率密度函数的对数形式得到对数似然函数:

$$\begin{aligned} \log L(\theta) &= \log \left[\prod_{k_1=1}^h \sum_{k=1}^n \omega_k \varphi(s_{k_1}|\theta_k) \right] \\ &= \sum_{k_1=1}^h \log \sum_{k=1}^n \omega_k \varphi(s_{k_1}|\theta_k). \end{aligned} \quad (3)$$

最后令式(3)的导数为0, 并计算参数集 θ :

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} \{\log L(\theta)\}. \quad (4)$$

但是, 在实际应用中使用求导的方法计算参数集 θ 比较困难, 因此常用最大期望法^[27]来搜索 $\log L(\theta)$ 的局部极大值.

3 高效三元降维法计算响应的统计矩

由上文可知, 高斯混合模型可以较为精确地表示多峰随机变量的概率密度函数, 接下来就需要计算响应的统计矩. 本章提出了一种高效三元降维法用于计算响应的统计矩, 具体内容包括三元降维法降维、积分点和权重的计算、二元积分和三元积分进行拆解.

3.1 三元降维法降维

响应函数 $Y = g(\mathbf{X})$ 的第 l 阶统计矩 m_l 为原点矩, 因此在建立多峰随机变量 X 的概率密度函数后可以通过原点矩公式计算:

$$m_l = E[g^l(\mathbf{X})] = \int_{\Omega_1} \cdots \int_{\Omega_N} \{g(x_1, \dots, x_N)\}^l f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (5)$$

式中, $E[\cdot]$ 表示期望算子; $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_N]$ 表示 N 个独立的多峰随机变量; $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^N f_{X_j}(x_j)$ 表示 $\mathbf{X}$ 的联合概率密度函数.

随着积分维度的提高, 直接积分方式处理式(5)所示积分问题的效率越来越低, 降维积分法是一种处理高维积分问题较为常用的方法. 在单峰随机分布中, 高维非线性问题一般使用二元降维法进行处理, 但是在计算高阶统计矩时二元降维法的计算精度难以满足要求, 而在多峰随机分布问题中需要考虑高阶统计矩的计算, 因此使用三元降维法就可以获取较好的计算精度.

三元降维法中响应函数 $Y = g(\mathbf{X})$ 的第 l 阶统计矩计算公式:

$$\begin{aligned} m_l \approx & \sum_{j_1 < j_2 < j_3} E[g^l(X_{j_1}, X_{j_2}, X_{j_3}, \mu_{-j_1 j_2 j_3})] \\ & - (N-3) \sum_{j_1 < j_2} E[g^l(X_{j_1}, X_{j_2}, \mu_{-j_1 j_2})] \\ & + \frac{(N-3)(N-2)}{2} \sum_{j_1=1}^n E[g^l(X_{j_1}, \mu_{-j_1})] \\ & - \frac{(N-3)(N-2)(N-1)}{2} E[g^l(\mu)], \end{aligned} \quad (6)$$

式中, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$ 为均值点, $E[g^l(X_{j_1}, X_{j_2}, X_{j_3}, \mu_{-j_1 j_2 j_3})]$ 表示除随机变量 X_{j_1} , X_{j_2} 和 X_{j_3} 外其他变量取均值的三元积分; $E[g^l(X_{j_1}, X_{j_2}, \mu_{-j_1 j_2})]$ 表示除随机变量 X_{j_1} 和 X_{j_2} 外其他变量取均值的二元积分; $E[g^l(X_{j_1}, \mu_{-j_1})]$ 表示除随机变量 X_{j_1} 外其他变量取均值的一元积分. 因此通过式(6)就可以将式(5)所示的 N 元积分求解问题转变为多个三元积分、二元积分和一元积分的求解问题.

3.2 计算积分点和权重

接下来需要精确地计算多峰随机变量的积分点和权重. 首先, 通过以下标准化线性方程组的矩阵表达式^[28]计算参数 $r'_{j,i}$:

$$\begin{bmatrix} \mu'_{j,M-1} & -\mu'_{j,M-2} & \mu'_{j,M-3} & \cdots & (-1)^{M-1} \mu'_{j,0} \\ \mu'_{j,M} & -\mu'_{j,M-1} & \mu'_{j,M-2} & \cdots & (-1)^{M-1} \mu'_{j,1} \\ \mu'_{j,M+1} & -\mu'_{j,M} & \mu'_{j,M-1} & \cdots & (-1)^{M-1} \mu'_{j,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu'_{j,2M-2} & -\mu'_{j,2M-3} & \mu'_{j,2M-4} & \cdots & (-1)^{M-1} \mu'_{j,M-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r'_{j,1} \\ r'_{j,2} \\ r'_{j,3} \\ \vdots \\ r'_{j,M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu'_{j,M} \\ \mu'_{j,M+1} \\ \mu'_{j,M+2} \\ \vdots \\ \mu'_{j,2M-1} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

式中, M 表示积分点数量; $\mu'_{j,i}$ 表示随机变量 X_j 的标准化统计矩:

$$\mu'_{j,i} = E\left\{\left[(x_j - \mu_j) / \sigma_j\right]^i\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} u_j^i f_{X_j}(x_j) dx_j. \quad (8)$$

然后利用参数 $r'_{j,i}$ 计算归一化随机变量 u_j 的积分点 $u_{j,i}$, $i = 1, 2, \dots, M$:

$$u_j^M - r_{j,1} u_j^{M-1} + r_{j,2} u_j^{M-2} - \cdots + (-1)^M r_{j,M} = 0. \quad (9)$$

最后, 随机变量 X_j 的积分点和对应权重可以由以下公式计算得到:

$$x_{j,i} = \sigma_j \mu_{j,i} + \mu_j, \quad (10)$$

$$w_{j,i} = \frac{\sum_{p=0}^{M-1} (-1)^k \mu_{j,M-p-1} Q_{j,i_p}}{\prod_{p=1, p \neq i}^M (u_{j,i} - u_{j,p})}, \quad (11)$$

式中, $Q_{j,i_0} = 1$, $Q_{j,i_p} = r_{j,p} - u_{j,i} Q_{j,i_{p-1}}$. 需要注意的是, 为了较为精确地得到多峰随机分布下的统计矩结果, 积分点的数量 M 一般取 8~10 个. 在得到各多峰随机变量中的积分点和权重后, 一元积分、二元积分和三元积分就可以较为容易通过计算得到:

$$\begin{aligned} E[g^l(X_{j_1}, \boldsymbol{\mu}_{-j_1})] &\approx \sum_{i_1=1}^M w_{j_1, i_1} g^l(x_{j_1, i_1}, \boldsymbol{\mu}_{-j_1}), \\ E[g^l(X_{j_1}, X_{j_2}, \boldsymbol{\mu}_{-j_1, j_2})] &\approx \sum_{i_1=1}^M \sum_{i_2=1}^M w_{j_1, i_1} w_{j_2, i_2} g^l(x_{j_1, i_1}, x_{j_2, i_2}, \boldsymbol{\mu}_{-j_1, j_2}), \\ E[g^l(X_{j_1}, X_{j_2}, X_{j_3}, \boldsymbol{\mu}_{-j_1, j_2, j_3})] &\approx \sum_{i_1=1}^M \sum_{i_2=1}^M \sum_{i_3=1}^M w_{j_1, i_1} w_{j_2, i_2} w_{j_3, i_3} g^l(x_{j_1, i_1}, x_{j_2, i_2}, x_{j_3, i_3}, \boldsymbol{\mu}_{-j_1, j_2, j_3}). \end{aligned} \quad (12)$$

3.3 积分拆解

由式(12)可以看出, 一元积分、二元积分和三元积分需要调用的响应函数次数呈指数增加. 但是并不是所有的二元积分和三元积分都会对计算精度产生很大的影响, 因此这类积分如果可以拆解则有助于提升三元降维法的计算效率. 因此需要将符合条件的二元积分和三元积分进行拆解. 具体实施过程如下.

(1) 选择一个参考点 x_c 并计算其响应 $y(x_c)$. 确定两个点集, 第一个点集为 $[x_{j_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(1)}, x_{j_1 j_2}^{(1)}]$, 第二个点集为 $[x_{j_1}^{(2)}, x_{j_2}^{(2)}, x_{j_1 j_2}^{(2)}]$. 使用两个点集分别进行判定^[29]:

$$\begin{aligned} \Delta y_{j_1 j_2}^{(1)} &= \frac{\left| y(\mathbf{x}_{j_1}^{(1)}) - y(\mathbf{x}_c) - [y(\mathbf{x}_{j_1 j_2}^{(1)}) - y(\mathbf{x}_{j_2}^{(1)})] \right|}{\min \left\{ \left| y(\mathbf{x}_{j_1}^{(1)}) - y(\mathbf{x}_c) \right|, \left| y(\mathbf{x}_{j_1 j_2}^{(1)}) - y(\mathbf{x}_{j_2}^{(1)}) \right| \right\}}, \\ \Delta y_{j_1 j_2}^{(2)} &= \frac{\left| y(\mathbf{x}_{j_1}^{(2)}) - y(\mathbf{x}_c) - [y(\mathbf{x}_{j_1 j_2}^{(2)}) - y(\mathbf{x}_{j_2}^{(2)})] \right|}{\min \left\{ \left| y(\mathbf{x}_{j_1}^{(2)}) - y(\mathbf{x}_c) \right|, \left| y(\mathbf{x}_{j_1 j_2}^{(2)}) - y(\mathbf{x}_{j_2}^{(2)}) \right| \right\}}. \end{aligned} \quad (13)$$

如果任意一个判定值 $\Delta y_{j_1 j_2}^{(1)}$ 和 $\Delta y_{j_1 j_2}^{(2)}$ 小于等于收敛精度 ε ,

则二元积分不存在.

(2) 定义二元指示函数 $I_g(X_{j_1}, X_{j_2})$ 和三元指示函数

$I_g(X_{j_1}, X_{j_2}, X_{j_3})$ 用于指示二元积分和三元积分是否存在, 其中三元指示函数由二元指示函数表达:

$$\begin{aligned} I_g(X_{j_1}, X_{j_2}, X_{j_3}) &= I_g(X_{j_1}, X_{j_2}) \cdot I_g(X_{j_1}, X_{j_3}) \cdot I_g(X_{j_2}, X_{j_3}). \end{aligned} \quad (14)$$

指示函数取值为 0 和 1, 当取值为 0 时表示对应积分可以被拆解, 而取值为 1 时表示对应积分需要保留. 由此就可以将所有满足条件的二元积分和三元积分进行拆解, 而剩余的积分直接进行积分计算. 二元积分拆解后变成两个一元积分:

$$\begin{aligned} E[g^l(X_{j_1}, X_{j_2}, \boldsymbol{\mu}_{-j_1, j_2})] &= E \left[\left(g(X_{j_1}, \boldsymbol{\mu}_{-j_1}) + g(X_{j_2}, \boldsymbol{\mu}_{-j_2}) - g(\boldsymbol{\mu}) \right)^l \right] \\ &= \sum_{q_1+q_2+q_3} \frac{l!}{q_1! q_2! q_3!} E[g^{q_1}(X_{j_1}, \boldsymbol{\mu}_{-j_1})] \\ &\quad \cdot E[g^{q_2}(X_{j_2}, \boldsymbol{\mu}_{-j_2})] \cdot E[g^{q_3}(\boldsymbol{\mu})]. \end{aligned} \quad (15)$$

而三元积分的拆解分为两种情况: 二元指示函数全为 0 和二元指示函数不全为 0. 第一种情况下三元积分可以直接拆解成三个一元积分:

$$\begin{aligned} E[g^l(X_{j_1}, X_{j_2}, X_{j_3}, \boldsymbol{\mu}_{-j_1, j_2, j_3})] &= E \left[\left(g(X_{j_1}, \boldsymbol{\mu}_{-j_1}) + g(X_{j_2}, \boldsymbol{\mu}_{-j_2}) + g(X_{j_3}, \boldsymbol{\mu}_{-j_3}) - g(\boldsymbol{\mu}) \right)^l \right] \\ &= \sum_{q_1+q_2+q_3+q_4} \frac{l!}{q_1! q_2! q_3! q_4!} E[g^{q_1}(X_{j_1}, \boldsymbol{\mu}_{-j_1})] \\ &\quad \cdot E[g^{q_2}(X_{j_2}, \boldsymbol{\mu}_{-j_2})] \cdot E[g^{q_3}(X_{j_3}, \boldsymbol{\mu}_{-j_3})] \cdot E[g^{q_4}(\boldsymbol{\mu})]. \end{aligned} \quad (16)$$

第二种情况下首先拆解成二元积分和一元积分, 然后再通过式(15)对满足拆解条件的二元积分进行拆解:

$$\begin{aligned} E[g^l(X_{j_1}, X_{j_2}, X_{j_3}, \boldsymbol{\mu}_{-j_1, j_2, j_3})] &\approx E[g^l(X_{j_1}, X_{j_2}, \boldsymbol{\mu}_{-j_1, j_2})] + E[g^l(X_{j_1}, X_{j_3}, \boldsymbol{\mu}_{-j_1, j_3})] \\ &\quad + E[g^l(X_{j_2}, X_{j_3}, \boldsymbol{\mu}_{-j_2, j_3})] - \sum_{i=1}^3 E[g^l(X_{j_i}, \boldsymbol{\mu}_{-j_i})] + E[g^l(\boldsymbol{\mu})]. \end{aligned} \quad (17)$$

这样满足条件的二元积分和三元积分就可以被拆解掉.

4 求解结构响应的概率密度函数

在得到响应的统计矩之后, 利用这些统计矩就可以计算响应的概率密度函数, 但是提供不同的统计矩数量对于多峰概率密度函数的计算结果会产生较大的影响. 因此本章基于最大熵方法计算响应的概率密度函数并且自适应确定统计矩的最优阶数.

4.1 最大熵方法

最大熵方法^[30]是在给定前 l 阶统计矩的情况下得到响应函数的概率密度函数, 在最大熵方法中响应函数最优概率密度函数对应的熵值最大. 为了更精确地计算响应 Y 的多峰概率密度函数, 将响应函数 Y 进行转换 $Y' = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}$ 得到以下优化问题:

$$\begin{cases} \max_{\rho} S(\rho), \\ s.t. \int_{\Omega} \left(\frac{y - \mu_Y}{\sigma_Y} \right)^q \rho(y) dy = m'_q, \quad q = 0, 1, \dots, l, \end{cases} \quad (18)$$

式中, μ_Y 和 σ_Y 表示响应函数的均值和方差; $\rho(y)$ 表示响应函数的估计概率密度函数; $S(\rho)$ 表示 $\rho(y)$ 的熵值:

$$S(\rho) = - \int_{\Omega} \rho(y) \ln \rho(y) dy. \quad (19)$$

m'_q 表示非标准中心矩, 该中心矩可以通过原统计矩 m_q 计算得到:

$$m'_q = \frac{1}{c^q} \left[\sum_{k_2=1}^{q+1} (-1)^{k_2+1} B_q^{k_2} (m_1)^{k_2-1} m_{q-k_2+1} \right], \quad (20)$$

$q = 0, 1, \dots, l$,

式中, $B_q^{k_2} = \binom{q}{k_2-1}$ 是二项式系数; $m_0 = 1$; c 是 m'_q 的比例因子.

4.2 确定统计矩的最优阶数

在多峰随机分布的不确定性传播分析中, 不同的统计矩阶数对于响应的概率密度函数的计算会产生不同的影响. 随着峰的数量越来越多, 需要用于拟合响应

概率密度函数的统计矩阶数就越高, 但是过多地提供统计矩的阶数对于概率密度函数计算精度的提升几乎起不到作用, 甚至还可能会导致精度的降低. 提供过多的统计矩阶数还会增加计算所需要的时间和复杂度. 因此如何选择合适的统计矩阶数就非常重要.

随着拟合响应概率密度函数所需的统计矩阶数逐渐增加, 最大熵方法得到的响应概率密度函数会逐渐逼近真实情况. 而熵值会逐渐减小, 最终趋于稳定或者达到最小值. 因此使用一种基于熵值的自适应方法来确定合适的统计矩阶数. 流程图见图1, 具体描述如下.

步骤1: 初始化统计矩阶数 $l = 0$ 以及熵值 E_0 . 定义收敛精度 ε .

步骤2: 令 $l = l + 2$.

步骤3: 使用式(6)计算响应函数的前 l 阶统计矩 m_q , $q = 1, 2, \dots, l$.

步骤4: 使用式(20)将统计矩 m_q 转变为非标准中心矩 m'_q .

步骤5: 使用式(18)和(19)得到响应函数的概率密度函数 $\rho(y)$ 和对应的熵值 E_l .

步骤6: 进行收敛分析, 如果 $|E_l - E_{l-2}| / |E_l| \leq \varepsilon$, 则进入步骤7. 否则返回步骤2.

步骤7: 输出统计矩 m_q 和概率密度函数 $\rho(y)$.

图1 统计矩最优阶数确定的流程

Figure 1 The process of determining the optimal order of statistical moment.

5 数值算例

为了验证本文所提方法的计算精度和效率, 本节将对四个算例进行分析. 第一个算例和第二个算例为数值算例, 第三个算例为环形截面柱受压问题, 第四个算例为智能手表芯片温度的不确定性分析.

5.1 数学算例1

考虑以下响应函数:

$$Y = 3X_1^2 + X_3^3 - X_2X_3, \quad (21)$$

式中, X_1 , X_2 和 X_3 是三个独立的多峰随机变量, 其中 X_1 设定了三种多峰分布情况: 两个峰、三个峰和四个峰. 随机变量概率密度函数的分布类型和分布参数见表1.

基于随机变量 X_1 , X_2 和 X_3 的概率密度函数, 使用蒙特卡洛仿真法(Monte Carlo simulation, MCS), 单变降维法(univariate dimension reduction method, UDRM)^[23], 三元降维法(trivariate dimension reduction method, TDRM)和高效三元降维法(efficient trivariate dimension reduction method, ETDRM)来进行响应 Y 的不确定性传播. 三种多峰分布情况下增加统计矩阶数对应的熵值变化见图2, 可知三种分布情况下熵值随着统计矩阶数的增加不断减小并最终保持稳定, 因此在本算例中对于两个峰的情况取 $l = 8$, 三个峰的情况取 $l = 10$, 四个峰的情况取 $l = 12$ 时响应的概率密度函数拥有较好的计算结果. 可以看出, 随着峰个数的增多, 需要更多的统计矩来表征其分布特性. MCS通过随机变量 X_1 , X_2 和 X_3 的概率密度函数产生大量的样本点(1×10^6)保证了不确定性传播的精度, 因此MCS的结果用于评估计算精度.

图3为三种多峰分布情况下UDRM, TDRM和ETDRM得到的统计矩与MCS的相对误差, 可以看出

图2 (网络版彩图)统计矩不同阶数对应的熵值. (a) 两个峰; (b) 三个峰; (c) 四个峰

Figure 2 (Color online) Entropy values corresponding to different orders of statistical moments. (a) Two peaks; (b) three peaks; (c) four peaks.

表1 随机变量的分布类型和分布参数

Table 1 Distribution types and parameters of random variables

随机变量	分布类型	权重	均值	标准差
X_1	多峰	(0.3,0.7)	(10.09,10.37)	(0.06,0.17)
		(0.3,0.4,0.3)	(10.09,10.37,10.92)	(0.06,0.17,0.34)
		(0.3,0.2,0.3,0.2)	(10.09,10.37,10.92,11.93)	(0.06,0.17,0.34,0.62)
X_2	多峰	(0.3,0.7)	(4,7)	(0.5,0.5)
X_3	多峰	(0.4,0.6)	(7,12)	(1.2,0.8)

图3 响应Y的统计矩相对误差. (a) 两个峰; (b) 三个峰; (c) 四个峰

Figure 3 Relative error of statistical moment of response Y . (a) Two peaks; (b) three peaks; (c) four peaks.

在三种多峰分布情况下, 三种方法相比UDRM计算精度相对较差; 而TDRM和ETDRM的计算结果相近而且精度相对较高. ETDRM, UDRM, TDRM和MCS得到的响应Y的概率密度函数展示在图4中, 可以看出随着多峰随机变量峰个数的增多, 不确定性传播得到的响应的概率密度函数则越复杂. 在三种多峰分布情况下, ETDRM和TDRM与MCS计算的响应的概率密度函数重合度较高, 而UDRM的重合度较低,

图4 ETDRM和不同方法的响应概率密度函数比较. (a) 两个峰; (b) 三个峰; (c) 四个峰

Figure 4 Comparison of response probability density functions between ETDRM and different methods. (a) Two peaks; (b) three peaks; (c) four peaks.

因此ETDRM和TDRM的计算精度相对较高. 表2为三种多峰分布下三种方法求统计矩所调用的函数调用次数, 可以看出三种方法中UDRM调用次数均为25次, 计算效率相对较高; 其次是ETDRM, 调用次数均为89次; TDRM调用次数均为512次, 计算效率相对较低, 因此ETDRM的计算效率高于TDRM. 综合考虑计算精度和效率不难得出ETDRM具有较好的计算效果.

表 2 不同方法的函数调用次数

Table 2 Number of function evaluations of different methods

方法	两个峰	三个峰	四个峰
MCS	1×10^6	1×10^6	1×10^6
UDRM	25	25	25
TDRM	512	512	512
ETDRM	89	89	89

5.2 数学算例2

考虑以下响应函数:

$$Y = 3X_1^2 - X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3 + X_3^3 + X_4^3, \quad (22)$$

式中, X_1, X_2, X_3 和 X_4 是四个独立的随机变量, 其概率密度函数的分布类型和分布参数见表3.

基于随机变量 X_1, X_2, X_3 和 X_4 的概率密度函数, 使用MCS, UDRM^[23], TDRM和ETDRM来进行响应 Y 的不确定性传播. 增加统计矩阶数对应的熵值变化见图5, 可知熵值随着统计矩阶数的增加不断减小并最终趋于稳定, 因此在本算例中取 $l = 10$ 时对于响应的概率密度函数拥有较好的计算结果. MCS的结果用于评估ETDRM的计算精度.

表4为UDRM, TDRM和ETDRM得到的统计矩与MCS的相对误差, 三种方法相比, UDRM计算精度相对较差, 最小相对误差和最大相对误差分别为6.2098%和41.5328%; 而TDRM和ETDRM的计算结果相近而

且精度相对较高, 最小相对误差分别为0.1545%和0.0469%, 最大相对误差分别为0.4260%和0.2589%. ETDRM, UDRM, TDRM和MCS的不确定性传播结果展示在图6中, 包括响应 Y 的概率密度函数和累积分布

表 3 随机变量的分布类型和分布参数

Table 3 Distribution types and parameters of random variables

随机变量	分布类型	权重	均值	标准差
X_1	多峰	(0.3,0.7)	(2,5)	(0.5,0.5)
X_2	多峰	(0.3,0.7)	(4,7)	(0.5,0.5)
X_3	多峰	(0.4,0.6)	(5,10)	(1.2,0.8)
X_4	多峰	(0.4,0.6)	(7,12)	(1.2,0.8)

图 5 (网络版彩图)统计矩不同阶数对应的熵值

Figure 5 (Color online) Entropy values corresponding to different orders of statistical moments.

表 4 响应 Y 的统计矩和相对误差

Table 4 Statistical moments and relative error of response Y

方法	m_1 (相对误差, %)	m_2 (相对误差, %)	m_3 (相对误差, %)	m_4 (相对误差, %)	m_5 (相对误差, %)
UDRM	8.3397×10^2 (6.2098)	9.2117×10^5 (11.6001)	1.1482×10^9 (16.5248)	1.5253×10^{12} (21.0498)	2.1215×10^{15} (25.2021)
TDRM	8.9056×10^2 (0.1545)	1.0444×10^6 (0.2249)	1.3790×10^9 (0.2541)	1.9373×10^{12} (0.2760)	2.8449×10^{15} (0.3028)
ETDRM	8.9056×10^2 (0.1545)	1.0444×10^6 (0.2249)	1.3789×10^9 (0.2509)	1.9370×10^{12} (0.2589)	2.8436×10^{15} (0.2565)
方法	m_6 (相对误差, %)	m_7 (相对误差, %)	m_8 (相对误差, %)	m_9 (相对误差, %)	m_{10} (相对误差, %)
UDRM	3.0709×10^{18} (29.0131)	4.6140×10^{21} (32.5176)	7.1843×10^{24} (35.7507)	1.1579×10^{28} (38.7457)	1.9297×10^{31} (41.5328)
TDRM	4.3406×10^{18} (0.3365)	6.8629×10^{21} (0.3735)	1.1227×10^{24} (0.4068)	1.8984×10^{28} (0.4260)	3.3144×10^{31} (0.4189)
ETDRM	4.3367×10^{18} (0.2459)	6.8528×10^{21} (0.2260)	1.1203×10^{24} (0.1922)	1.8929×10^{28} (0.1361)	3.3021×10^{31} (0.0469)

图 6 ETDRM和不同方法的不确定传播结果比较. (a) 概率密度函数; (b) 累积分布函数

Figure 6 Comparison of uncertainty propagation results between ETDRM and different methods. (a) Probability density function; (b) cumulative distribution function.

函数. 可以看出ETDRM和TDRM与MCS的概率密度函数和累积分布函数重合度较高, 而UDRM的重合度较低, 因此ETDRM和TDRM的计算精度相对较高. 三种方法中UDRM调用次数为41次, 计算效率相对较高; 其次是ETDRM, 调用次数为2541次; TDRM调用次数为4641次, 计算效率相对较低, 因此ETDRM的计算效率高于TDRM. 综合考虑计算精度和效率不难得出ETDRM具有较好的计算效果.

5.3 环形截面柱受压问题

如图7所示的一个环形截面柱承受轴向压缩荷载 F . 因为在压力作用下会弯曲, 因此发生弯曲时的可靠性就非常重要. 定义屈曲破坏 Z 的响应函数:

$$Z = g(E, D, T, L, F) = \frac{\pi^2 E}{L^2} \left\{ \frac{\pi}{64} [(D+T)^4 - D^4] \right\} - F, \quad (23)$$

式中, E , F , L , D 和 T 分别为材料的弹性模量、轴向荷载、柱高、内径和厚度.

每一个随机变量包含大量观测数据, 通过观测数据的分布可以看出轴向荷载 F , 柱的高度 L 和内径 D 有两个峰, 因此使用含两个高斯分量的高斯混合模型来构建由图8所示的概率密度函数. 随机变量的分布类型以及估计的分布参数见表5.

图9为熵值和概率密度函数随统计矩阶数变化的情况, 可以看出熵值随着统计矩阶数的增加不断减小并最终在前六阶统计矩趋于稳定, 而此时屈曲破坏 Z

的概率密度函数比较接近真实情况, 因此选择屈曲破坏 Z 的前六阶统计矩来计算概率密度函数.

表6为三种方法求得的屈曲破坏 Z 的统计矩和相对误差, 图10为基于三种方法得到的统计矩结果计算的概率密度函数和累积分布函数. 首先对比三种方法的计算精度, 由表6和图10可以看出, 第一阶和第二阶统计矩的计算结果相近而且精度较好. 对于更高阶的统计矩, UDRM的计算精度相对较差, 最大相对误差达到了27.5481%; TDRM和ETDRM的计算结果相近而且都具有较高的计算精度, 最大误差只有1.7739%和1.0747%. ETDRM和TDRM与MCS的概率密度函数

图 7 环形截面柱模型^[31]

Figure 7 The model of an annular section column [31].

图8 (网络版彩图)多峰随机变量分布. (a) 轴向荷载 F ; (b) 柱高 L ; (c) 内径 D
Figure 8 (Color online) Distribution of multimodal random variables. (a) Axial load F ; (b) height of column L ; (c) internal diameter D .

和累积分布函数重合度较高, 而UDRM重合度相对较低, 因此ETDRM和TDRM的计算精度较高. 三种方法求屈曲破坏 Z 的函数调用次数中, UDRM调用次数为51次, 在三种方法中计算效率相对较高; 其次是ETDRM, 调用次数为4201次; TDRM计算效率相对较低, 调用次数为5801次, 因此ETDRM的计算效率高于TDRM. 综合考虑计算精度和效率可以看出, ETDRM在三种方法中具有较好的计算效果.

表5 随机变量的分布类型和分布参数

Table 5 Distribution types and parameters of random variables

随机变量	分布类型	权重	均值	标准差
E (MPa)	正态	—	203000	30450
F (N)	多峰	(0.6,0.4)	(23.5,24.5)	(0.2,0.3)
L (mm)	多峰	(0.5,0.5)	(4.4,5)	(0.1,0.2)
D (mm)	多峰	(0.4,0.6)	(2500,2700)	(50,60)
T (mm)	正态	—	3000	300

图9 (网络版彩图)统计矩不同阶数对应的熵值
Figure 9 (Color online) Entropy values corresponding to different orders of statistical moments.

5.4 智能手表芯片温度的不确定性分析

可穿戴电子设备拥有很高的集成度, 因此采用了特殊的设计使智能手表能够满足机械、热和电气方面的一些要求. 智能手表需要保证在撞击工况和高温环境中可以可靠地进行工作, 而在高温环境下主要考虑芯片的工作可靠性. 智能手表共有两块芯片, 其中芯片1在工作的可靠性对于智能手表运行起着至关重要的作用. 芯片1的工作温度一般不能超过50度. 某型智能手表结构如图11所示, 该智能手表包括显示器、玻璃、支架、主板和外壳等重要部件.

外壳厚度 X_1 、电路板厚度 X_2 、支架厚度 X_3 、芯片1的功耗 P_4 和芯片2的功耗 P_5 对芯片1温度 T 会产生很大的影响, 因此必然存在一个函数关系:

$$T = g(X_1, X_2, X_3, P_4, P_5). \quad (24)$$

构建如图12所示的智能手表有限元模型, 使用65个有限元样本建立芯片1温度 T 的响应面, 从而进行智

表 6 屈曲破坏Z的统计矩和相对误差

Table 6 Statistical moments and relative error of buckling failure Z

方法	m_1 (相对误差, %)	m_2 (相对误差, %)	m_3 (相对误差, %)	m_4 (相对误差, %)	m_5 (相对误差, %)	m_6 (相对误差, %)
UDRM	1.3580×10^3 (0.0436)	2.7193×10^6 (0.6139)	6.1251×10^9 (5.3664)	1.5638×10^{13} (11.4659)	4.3301×10^{16} (19.2362)	1.2918×10^{20} (27.5481)
TDRM	1.3581×10^3 (0.0486)	2.7408×10^6 (0.1745)	6.5011×10^9 (0.4435)	1.7824×10^{13} (0.9090)	5.4407×10^{16} (1.4776)	1.8146×10^{20} (1.7739)
ETDRM	1.3581×10^3 (0.0486)	2.7408×10^6 (0.1745)	6.5011×10^9 (0.4433)	1.7816×10^{13} (0.8669)	5.4190×10^{16} (1.0747)	1.7902×10^{20} (0.4030)

图 10 ETDRM和不同方法的不确定传播结果比较. (a) 概率密度函数; (b) 累积分布函数
Figure 10 Comparison of uncertainty propagation results between ETDRM and different methods. (a) Probability density function; (b) cumulative distribution function.

图 11 智能手表示意图[32]
Figure 11 The diagram of smart watch [32].

能手表芯片温度的不确定性分析:

$$\begin{aligned} T = & 0.5473X_1^2 - 2.932X_1X_2 - 0.3207X_1X_3 + 5.589X_2^2 \\ & - 2.970X_2X_3 - 1.206X_3^2 + 71.85P_4 + 72.81P_5 \\ & + 299.3P_4P_5 + 62.05, \end{aligned} \quad (25)$$

图 12 智能手表有限元模型[32]
Figure 12 Finite element model of smart watch [32].

式中, P_4 和 P_5 为多峰随机分布, 因此基于观测数据使用高斯混合模型来构建概率密度函数. X_1, X_2, X_3, P_4 和 P_5 的分布类型和分布参数见表7.

图13为熵值随统计矩阶数变化的情况, 可以看出熵值随着统计矩阶数的增加不断减小, 在前十二阶统计矩时达到最小, 之后就出现上升趋势. 芯片1温度 T 的概率密度函数则随着统计矩阶数的增加逐渐接近真

表 7 随机变量的分布类型和分布参数

Table 7 Distribution types and parameters of random variables

随机变量	分布类型	权重	均值	标准差
X_1 (mm)	正态	—	1	0.03
X_2 (mm)	正态	—	0.8	0.03
X_3 (mm)	正态	—	1.92	0.03
P_4 (mm)	多峰	(0.6,0.4)	(0.15,0.25)	(0.02,0.04)
P_5 (mm)	多峰	(0.5,0.5)	(0.15,0.3)	(0.025,0.04)

实分布情况, 最终在前十二阶统计矩时得到较为准确的概率密度函数.

图 13 统计矩不同阶数对应的熵值和概率密度函数. (a) 熵值变化; (b) 概率密度函数变化

Figure 13 Entropy values and probability density function corresponding to different orders of statistical moments. (a) Change of entropy values; (b) change of probability density function.

表 8 芯片1温度 T 的统计矩和相对误差

Table 8 Statistical moments and relative error of chip-1 temperature T

方法	m_1 (相对误差, %)	m_2 (相对误差, %)	m_3 (相对误差, %)	m_4 (相对误差, %)	m_5 (相对误差, %)	m_6 (相对误差, %)
UDRM	9.7038×10^1 (0.0051)	9.5875×10^3 (0.0108)	9.6397×10^5 (0.1219)	9.8566×10^7 (0.3973)	1.0241×10^{10} (0.8951)	1.0802×10^{12} (1.6579)
TDRM	9.7038×10^1 (0.0051)	9.5894×10^3 (0.0088)	9.6523×10^5 (0.0088)	9.8962×10^7 (0.0027)	1.0332×10^{10} (0.0118)	1.0980×10^{12} (0.0370)
ETDRM	9.7038×10^1 (0.0051)	9.5894×10^3 (0.0088)	9.6523×10^5 (0.0088)	9.8962×10^7 (0.0027)	1.0332×10^{10} (0.0118)	1.0980×10^{12} (0.0369)

方法	m_7 (相对误差, %)	m_8 (相对误差, %)	m_9 (相对误差, %)	m_{10} (相对误差, %)	m_{11} (相对误差, %)	m_{12} (相对误差, %)
UDRM	1.1556×10^{14} (2.7105)	1.2528×10^{16} (4.0597)	1.3749×10^{18} (5.6959)	1.5263×10^{20} (7.5967)	1.7125×10^{22} (9.7304)	1.9405×10^{24} (12.0600)
TDRM	1.1869×10^{14} (0.0745)	1.3041×10^{16} (0.1257)	1.4551×10^{18} (0.1915)	1.6473×10^{20} (0.2720)	1.8901×10^{22} (0.3671)	2.1961×10^{24} (0.4762)
ETDRM	1.1869×10^{14} (0.0744)	1.3041×10^{16} (0.1257)	1.4551×10^{18} (0.1915)	1.6473×10^{20} (0.2722)	1.8901×10^{22} (0.3676)	2.1961×10^{24} (0.4774)

表8为芯片1温度 T 的统计矩和相对误差, 可知UDRM最大相对误差达到了12.0600%, 而TDRM和ETDRM的最大相对误差只有0.4762%和0.4774%, 因此ETDRM和TDRM求得的统计矩相对更接近实际统计矩. 对于前10阶统计矩, ETDRM和TDRM得到的相对误差比较接近, 而第10~12阶统计矩时, ETDRM的相对误差相较TDRM则逐渐增大. 因为满足拆解条件的二元积分和三元积分拆解后对于统计矩计算精度的影响会随着统计矩阶数的增加而不断提高, 在10阶矩之后则较为显著. 由图14可以看出, 使用ETDRM和TDRM计算获得的概率密度函数和累积分布函数更贴近真实情况, 而UDRM则相差较大, 因此ETDRM和

图 14 ETDRM和不同方法的不确定传播结果比较. (a) 概率密度函数; (b) 累积分布函数

Figure 14 Comparison of uncertainty propagation results between ETDRM and different methods. (a) Probability density function; (b) cumulative distribution function.

TDRM在实际工程中计算精度较高. UDRM, ETDRM和TDRM的调用次数分别为51次、1399次和2551次,因此三种方法中UDRM的计算效率相对较高,其次是ETDRM, TDRM的计算效率相对较低. 综合考虑计算精度和效率, ETDRM在处理实际工程问题时具有相对较好的计算效果. 因此ETDRM和TDRM的计算精度较高.

6 结论

本文提出了一种针对多峰随机分布的不确定性传播分析方法. 多峰随机变量的概率密度函数通过高斯混合模型建立. 在多峰随机分布的不确定性传播分析

中需要考虑高阶统计矩的计算, 对于非线性问题中的高阶统计矩计算, TDRM相比于UDRM拥有更高的计算精度, 但是计算效率相对较低. 因此发展了ETDRM, 该方法通过对部分二元积分和三元积分进行拆解, 可以有效提高TDRM的计算效率. 此外, 使用了一种自适应方法确定统计矩的最优阶数, 从而简化了计算的复杂程度并减少了计算所需的时间. 四个算例表明本文方法在多峰随机分布的不确定性传播分析具有较好的计算精度和计算效率. 但是在输入多峰随机变量的建模中并未考虑各个高斯分布之间的相关性. 因此在未来的工作中, 我们打算考虑多峰随机变量中各个高斯分布之间的相关性. 此外, 将上述方法应用于考虑多峰随机分布的可靠性评估与优化设计中.

参考文献

- 1 Yang J, Ma C H, Xiang Y, et al. Uncertainty inverse analysis of dam material parameters based on relevance vector machine and stochastic finite element method (in Chinese). *Sci Sin Tech*, 2018, 48: 1113–1121 [杨杰, 马春辉, 向衍, 等. 基于相关向量机与随机有限元的筑坝材料参数不确定性反分析. 中国科学: 技术科学, 2018, 48: 1113–1121]
- 2 Tang J C, Jiang C, Long X Y, et al. An interval robust optimization method for uncertain structures (in Chinese). *Sci Sin Tech*, 2019, 49: 787–802 [唐嘉昌, 姜潮, 龙湘云, 等. 一种针对不确定性结构的区间鲁棒性优化方法. 中国科学: 技术科学, 2019, 49: 787–802]
- 3 Liu Y, Li X Y, Zhang X H. Multi-state system reliability modeling and optimization with considering dynamic load distribution mechanism (in Chinese). *J Mech Eng*, 2016, 52: 197–205 [刘宇, 李翔宇, 张小虎. 考虑载荷动态分配机制的多状态系统可靠性建模及优化. 机械工程学报, 2016, 52: 197–205]
- 4 Cao L, Tao Y R. Reliability-based method featuring the combination of evidence theory and fuzzy distribution (in Chinese). *J Mech Des*, 2018, 35: 85–90 [曹亮, 陶友瑞. 证据理论与模糊分布相结合的可靠性方法研究. 机械设计, 2018, 35: 85–90]
- 5 Wang X J, Yang H F, Qiu Z P, et al. Fuzzy theory for uncertain structural analysis based on measurement data (in Chinese). *J Beijing Univ Aeronaut Astronaut*, 2010, 36: 887–891 [王晓军, 杨海峰, 邱志平, 等. 基于测量数据的不确定性结构分析的模糊理论. 北京航空航天大学学报, 2010, 36: 887–891]

- 6 Liu X, Gong M, Zhou Z H, et al. An efficient mechanical structure reliability analysis method (in Chinese). *Chin Mech Eng*, 2020, 31: 2031–2037 [刘鑫, 龚敏, 周振华, 等. 基于证据理论的机械结构高效可靠性分析方法. *中国机械工程*, 2020, 31: 2031–2037]
- 7 Zhu S P, Zhang X, Jiang C, et al. Advances in structural integrity and reliability analysis for critical components. *Adv Mech Eng*, 2018, 10: 168781401881640
- 8 Qu X Z, Yu J H, Yao Q S, et al. Random-interval hybrid reliability analysis for fan performance in the presence of epistemic uncertainty (in Chinese). *Sci Sin Tech*, 2020, 50: 299–311 [屈小章, 余江鸿, 姚齐水, 等. 基于随机-区间混合不确定性的风机性能可靠性分析. *中国科学: 技术科学*, 2020, 50: 299–311]
- 9 Zhou T, Peng Y. Structural reliability analysis via dimension reduction, adaptive sampling, and Monte Carlo simulation. *Struct Multidisc Optim*, 2020, 62: 2629–2651
- 10 Yun W, Lu Z, Wang L, et al. Error-based stopping criterion for the combined adaptive Kriging and importance sampling method for reliability analysis. *Probab Eng Mech*, 2021, 65: 103131
- 11 Fan C, Liao Y, Zhou G, et al. Improving cooling load prediction reliability for HVAC system using Monte-Carlo simulation to deal with uncertainties in input variables. *Energy Buildings*, 2020, 226: 110372
- 12 Yaseen Z M, Aldlemy M S, Oukati Sadegh M. Non-gradient probabilistic Gaussian global-best harmony search optimization for first-order reliability method. *Eng Comput*, 2020, 36: 1189–1200
- 13 Jiang C, Deng Q Q, Zhang W. Second order reliability method of structures considering parametric correlations (in Chinese). *Chin Mech Eng*, 2016, 27: 3068–3074 [姜潮, 邓青青, 张旺. 考虑参数相关性的结构二阶可靠性分析方法. *中国机械工程*, 2016, 27: 3068–3074]
- 14 Yuan X K, Kong C C, Gu J. Reliability analysis approach based on Kriging and advanced first-order second moment method (in Chinese). *J Natl Univ Def Tech*, 2020, 42: 150–156 [袁修开, 孔冲冲, 顾健. Kriging与改进一次二阶矩融合的可靠性分析方法. *国防科技大学学报*, 2020, 42: 150–156]
- 15 Shi Y, Lu Z, Chen S, et al. A reliability analysis method based on analytical expressions of the first four moments of the surrogate model of the performance function. *Mech Syst Signal Pr*, 2018, 111: 47–67
- 16 He W, Zeng Y, Li G. A novel structural reliability analysis method via improved maximum entropy method based on nonlinear mapping and sparse grid numerical integration. *Mech Syst Signal Pr*, 2019, 133: 106247
- 17 Ding C, Xu J. An improved adaptive bivariate dimension-reduction method for efficient statistical moment and reliability evaluations. *Mech Syst Signal Pr*, 2021, 149: 107309
- 18 He W, Zeng Y, Li G. An adaptive polynomial chaos expansion for high-dimensional reliability analysis. *Struct Multidisc Optim*, 2020, 62: 2051–2067
- 19 Amini A, Abdollahi A, Hariri-Ardebili M A, et al. Copula-based reliability and sensitivity analysis of aging dams: Adaptive Kriging and polynomial chaos Kriging methods. *Appl Soft Comput*, 2021, 109: 107524
- 20 Lin Q, Xiong F, Wang F, et al. A data-driven polynomial chaos method considering correlated random variables. *Struct Multidisc Optim*, 2020, 62: 2131–2147
- 21 Zeng Y C, Song D L, Zhang W H, et al. Stochastic failure process of railway vehicle dampers and the effects on suspension and vehicle dynamics. *Vehicle Syst Dyn*, 2021, 59: 703–718
- 22 Ni Y Q, Ye X W, Ko J M. Monitoring-based fatigue reliability assessment of steel bridges: Analytical model and application. *J Struct Eng*, 2010, 136: 1563–1573
- 23 Hu Z L, Du X P. A mean value reliability method for bimodal distributions. In: ASME 2017 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. Cleveland: American Society of Mechanical Engineers (ASME), 2017
- 24 Zhang Z, Jiang C, Han X, et al. A high-precision probabilistic uncertainty propagation method for problems involving multimodal distributions. *Mech Syst Signal Pr*, 2019, 126: 21–41
- 25 Meng X, Liu J, Cao L, et al. A general frame for uncertainty propagation under multimodally distributed random variables. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2020, 367: 113109
- 26 Wan W, Liu J. Nonlocal patches based Gaussian mixture model for image inpainting. *Appl Math Model*, 2020, 87: 317–331
- 27 Castillo-Barnes D, Martinez-Murcia F J, Ramirez J, et al. Expectation-maximization algorithm for finite mixture of α -stable distributions. *Neurocomputing*, 2020, 413: 210–216
- 28 Li G, Zhang K. A combined reliability analysis approach with dimension reduction method and maximum entropy method. *Struct Multidisc*

- Optim*, 2011, 43: 121–134
- 29 Cai C H, Lu Z H, Xu J, et al. Efficient algorithm for evaluation of statistical moments of performance functions. *J Eng Mech*, 2019, 145: 06018007
- 30 Sobczyk K, Trzebicki J. Approximate probability distributions for stochastic systems: Maximum entropy method. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1999, 168: 91–111
- 31 Fan W, Wei J, Ang A H S, et al. Adaptive estimation of statistical moments of the responses of random systems. *Probab Eng Mech*, 2016, 43: 50–67
- 32 Huang Z L, Jiang C, Zhou Y S, et al. An incremental shifting vector approach for reliability-based design optimization. *Struct Multidisc Optim*, 2016, 53: 523–543

An uncertainty propagation analysis method considering multimodal random distribution

XIE BoQun^{1,2}, ZHANG Zhe^{1,2} & JIANG Chao^{1,2}

¹ State Key Laboratory of Advanced Design and Manufacturing for Vehicle Body, Hunan University, Changsha 410082, China;

² College of Mechanical and Vehicle Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China

In practical engineering applications, random variables may follow a multimodal random distribution, such as damping characteristics of train shock absorber after long-term use and fatigue life of safety cut specimens after repair. Traditional uncertainty propagation analysis methods are mainly used for random variables following a unimodal distribution. Therefore, large errors will be produced when random variables follow a multimodal distribution. In this study, an uncertainty propagation analysis method considering a multimodal random distribution is proposed. First, the probability density function of input multimodal random variables is defined by the Gaussian mixture model; then, the high-order moments of response function are calculated using the efficient trivariate dimension reduction method, which effectively improves the computational efficiency of uncertainty propagation. Once again, the maximum entropy method is used to compute the probability density function of response, whereas an adaptive method based on entropy is used to determine the optimal order of statistical moments. Finally, four numerical examples are demonstrated to analyze the accuracy and efficiency of the proposed method in handling multimodal uncertainty propagation analysis.

uncertainty propagation, multimodal random distribution, efficient trivariate dimension reduction method, high-order moments

doi: [10.1360/SST-2021-0279](https://doi.org/10.1360/SST-2021-0279)