



论 文

Chen 混沌系统全局指数吸引集和正向不变集的构造性证明及应用

廖晓昕^①, 徐炳吉^{②*}, YU Pei^③, 陈关荣^④

① 华中科技大学自动化学院, 武汉 430074

② 中国地质大学 (北京) 信息工程学院, 北京 100083

③ Department of Applied Mathematics, The University of Western Ontario, London, N6A 5B7, Canada

④ Department of Electronic Engineering, City University of Hong Kong, Hong Kong, China

* 通信作者. E-mail: bjxu@cugb.edu.cn

收稿日期: 2014-04-10; 接受日期: 2014-11-26

国家自然科学基金 (批准号: 60974145, 61273200)、Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (批准号: R2686A02) 和香港城市大学 GRF 基金 (批准号: CityU1109/12) 资助项目

摘要 本文利用多个广义正定的 Lyapunov 函数, 给出了 Chen 混沌系统的全局指数吸引集及正向不变集的构造性证明, 解决了“Chen 混沌系统是否也像 Lorenz 混沌系统一样, 存在全局指数吸引集”这个长期悬而未决的公开理论难题. 本文所提供的方法, 对于研究其他形式的混沌系统具有一般性的示范和启迪作用.

关键词 Chen 混沌系统 最终有界性 全局指数吸引集 正向不变集 广义 Lyapunov 函数

1 引言

自从 Lorenz^[1,2] 于 1963 年首次发现了被称为“蝴蝶效应”的 Lorenz 混沌系统以来, 混沌系统在许多领域内获得了巨大而深远的发展, 被著名的物理学家 Ford 誉为“20 世纪物理学的第三次革命”. 在此之后, 数学家、物理学家及工程技术人员不仅对 Lorenz 系统的基本性质及动力学行为进行了广泛而深入的研究, 而且就相关问题如混沌控制、混沌同步及应用^[3~7]进行了系统研究. 随后, 许多新的混沌系统被发现, 最经典的为 Rössler 混沌系统和 Chua 电路. 20 世纪 90 年代后, Chen 混沌系统由于它与 Lorenz 混沌系统紧密相关^[8] 但又不拓扑等价^[9], 故被国际上广泛关注和研究^[10~14].

混沌系统的定性研究中, 最终有界性的研究起着一个非常重要的作用. 如果一个混沌系统在相空间内具有全局吸引紧集, 则平衡位置、周期解、概周期解、混沌吸引子将不可能在全局吸引集之外. 从应用的角度上讲, 最终有界性及其具体的最终有界的界值的估计, 经常被应用到混沌控制、混沌同步及混沌跟踪. 对于 Lorenz 系统, 它的最终有界性, 最先是由俄罗斯院士 Leonov^[15~17] 证得的. 然后, 由文献^[18~21] 进一步改进和推广. 对于 Lorenz 混沌系统族, 我们在文献^[22] 中深入地研究了全局指数吸引集的构造性证明. 对于具有光滑的非线性函数的 Chua 电路, 我们得到它的最终有界性证明, 回答了一个公开问题^[23] 且应用到混沌同步. 对于 Chen 混沌系统, 由于主对角线有正的系数这个

引用格式: 廖晓昕, 徐炳吉, YU Pei, 等. Chen 混沌系统全局指数吸引集和正向不变集的构造性证明及应用. 中国科学: 信息科学, 2015, 45: 129–144, doi: 10.1360/N112013-00106

极大的困难, 导致对于 Lorenz 系统行之有效的单一的 Lyapunov 函数方法失效. 虽然文献 [24] 也用了一个四次型 Lyapunov 函数研究了 Chen 系统的最终有界性, 但对系统的系数要求条件太苛刻, 导致混沌状态时的 Chen 系统的系数不满足文献 [24] 的条件, 故 Chen 系统的最终有界性, 特别是全局指数吸引集的构造性证明, 至今仍是一个悬而未决的难题. 关于 Lü-Chen 系统 [25] 的类似结果我们另文叙述.

本文给出了一个全局指数吸引集和正向不变集的构造性证明, 解决了这个公开的难题, 期望对其他混沌系统的类似性质的研究, 提供某些启迪作用. 我们将利用本文及文献 [22,23,26~28] 的思想及相似的结果用全新的方法给出 Lü系统、Yang 系统的全局指数吸引集和平衡准量稳定的充要条件, 也拟另文论及且给出严格证明.

考虑下列的 Chen 系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(y - x), \\ \frac{dy}{dt} = (c - a)x - xz + cy, \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz, \end{cases} \quad (1)$$

这里 $a = 35, b = 3, c = 28$ 为常数.

2 一些定义和引理

令 $X(t) := X(t, t_0, X_0)$, 这里 X_0 是式 (1) 的初始值, $X := (x, y, z)$ 为式 (1) 的状态变量.

定义 1 对于系统 (1), 若存在一个紧集 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, 使得对于所有 $X_0 \in \Omega^c \subseteq \mathbb{R}^3$, $\rho(X(t), \Omega) := \inf_{y \in \Omega} \|X(t) - y\| \rightarrow 0$, 当 $t \rightarrow +\infty$, 则称紧集 Ω 是 (1) 的全局吸引集, 或称式 (1) 的解是最终有界的, Ω 的余集 Ω^c 被称为全局吸引域.

我们也称式 (1) 是 Lagrange 意义下全局渐近稳定或具有最终有界性意义下耗散的. 若对所有 $X_0 \in \Omega_0 \subseteq \Omega \subset \mathbb{R}^3$, $X(t, t_0, X_0) \in \Omega_0, t \geq t_0$, 则称 Ω_0 为正向不变集.

定义 2 对于系统 (1), 若存在紧集 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 和一个常数 $M(X_0) > 0, \alpha > 0$, 使得对于所有 $X_0 = X(t_0) \in \Omega^c$, $\rho(X(t), \Omega) \leq M(X(t_0))e^{-\alpha(t-t_0)}$, 则称系统 (1) 具有全局指数吸引性, 并称 Ω 是全局指数吸引集.

由于定义 2 中的 Ω 的存在性条件较难验证, Lyapunov 函数法是研究非线性动力系统的渐近性质的有力工具, 故我们引进比定义 2 更好验证的定义.

定义 3 对于系统 (1), 若存在一个广义正定的径向无界的 Lyapunov 函数 $V(x)$ 和正数 $L > 0, \alpha > 0$, 使得当 $V(X(t)) > L, t \geq t_0$, 不等式 $V(X(t)) - L \leq (V(X_0) - L)e^{-\alpha(t-t_0)}$ 成立, 则称系统 (1) 是全局指数吸引的, 或在 Lagrange 意义下全局指数稳定的, 这里 $\Omega = \{X | V(t) \leq L, t \geq t_0\}$ 称为全局指数吸引集.

以下, 设 $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 为 (1) 式的解. 为证主要定理, 我们需要以下引理.

引理 1 若 $y(t)$ 具有全局指数吸引集, 即存在常数 $k > 0, \alpha > 0$ 使得下列估计式成立:

$$|y(t)| \leq k + |y(t_0)|e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad \text{当 } t \geq t_0, \quad (2)$$

其中 $y(t)$ 为式 (1) 的解的第二个分量, 则式 (1) 的解第一个分量 $x(t)$ 亦有全局指数吸引集, 且有下列估计式

$$|x(t)| \leq \frac{ak}{\alpha} + |x(t_0)|e^{-a(t-t_0)} + a|y(t_0)|e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t_0)}, \quad \text{当 } t \geq t_0, \quad (3)$$

其中 $\bar{\alpha} = \min(a, \alpha)$.

证明 由式 (1) 的第一个方程, 有

$$x(t) = x(t_0)e^{-a(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-a(t-\tau)} ay(\tau) d\tau.$$

利用关于 $|y(t)|$ 的估计式 (2), 由式 (1) 的第一个方程便有

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |x(t_0)|e^{-a(t-t_0)} + a \int_{t_0}^t e^{-\bar{\alpha}(t-\tau)} \left(k + |y(t_0)|e^{-\bar{\alpha}(\tau-t_0)} \right) d\tau \\ &\leq |x(t_0)|e^{-a(t-t_0)} + \frac{ak}{\bar{\alpha}} e^{-\bar{\alpha}t} (e^{\bar{\alpha}t} - e^{\bar{\alpha}t_0}) + a|y(t_0)|e^{-\bar{\alpha}t} \int_{t_0}^t e^{\bar{\alpha}\tau} e^{-\bar{\alpha}(\tau-t_0)} d\tau \\ &\leq |x(t_0)|e^{-a(t-t_0)} + \frac{ak}{\bar{\alpha}} (1 - e^{-\bar{\alpha}(t-t_0)}) + a|y(t_0)|e^{-\bar{\alpha}t} \int_{t_0}^t e^{\bar{\alpha}\tau} d\tau \\ &\leq |x(t_0)|e^{-a(t-t_0)} + \frac{ak}{\bar{\alpha}} + a|y(t_0)|e^{-\frac{\bar{\alpha}}{2}(t-t_0)}e^{-\frac{\bar{\alpha}}{2}(t-t_0)}(t-t_0) \\ &\leq |x(t_0)|e^{-a(t-t_0)} + \frac{ak}{\bar{\alpha}} + a|y(t_0)|e^{-\frac{\bar{\alpha}}{2}(t-t_0)}, \quad \text{当 } t \geq t_0. \end{aligned} \quad (4)$$

这里, 利用了估计式 $e^{-\frac{\bar{\alpha}}{2}(t-t_0)}(t-t_0) \leq 1$, 当 $t \geq t_0$. 引理 1 证毕.

引理 2 若 $x(t), y(t)$ 均具有全局指数吸引集, 即若有下列估计式

$$|y(t)| \leq k + |y(t_0)|e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad (5a)$$

$$|x(t)| \leq k + |x(t_0)|e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad (5b)$$

其中 $\alpha > 0, k \geq 0$ 为常数, $t \geq t_0$, 则式 (1) 的解 $z(t)$ 亦有全局指数吸引集, 即有下列估计式

$$|z(t)| \leq \frac{k^2}{\bar{b}} + |z(t_0)|e^{-\bar{b}(t-t_0)} + (k|x(t_0)| + k|y(t_0)| + |x(t_0)||y(t_0)|)e^{-\frac{\bar{b}}{2}(t-t_0)}, \quad \text{当 } t \geq t_0, \quad (6)$$

其中, $\bar{b} = \min(b, \alpha)$.

证明 由式 (1) 的第 3 个方程有

$$z(t) = z(t_0)e^{-b(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-b(t-\tau)} |x(\tau)||y(\tau)| d\tau.$$

故

$$\begin{aligned} |z(t)| &\leq |z(t_0)|e^{-b(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-\bar{b}(t-\tau)} \left[k + |x(t_0)|e^{-\alpha(\tau-t_0)} \right] \left[k + |y(t_0)|e^{-\alpha(\tau-t_0)} \right] d\tau \\ &\leq |z(t_0)|e^{-b(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-\bar{b}(t-\tau)} \left[k^2 + (k|x(t_0)| + k|y(t_0)|)e^{-\alpha(\tau-t_0)} + |x(t_0)||y(t_0)|e^{-2\alpha(\tau-t_0)} \right] d\tau \\ &\leq |z(t_0)|e^{-b(t-t_0)} + \frac{k^2(1 - e^{-\bar{b}(t-t_0)})}{\bar{b}} + [k|x(t_0)| + k|y(t_0)| + |x(t_0)||y(t_0)|] \cdot \int_{t_0}^t e^{-\bar{b}(t-\tau)} e^{-\bar{b}(\tau-t_0)} d\tau \\ &\leq |z(t_0)|e^{-b(t-t_0)} + \frac{k^2}{\bar{b}} + [k|x(t_0)| + k|y(t_0)| + |x(t_0)||y(t_0)|] e^{-\frac{\bar{b}}{2}(t-t_0)}, \quad \text{当 } t \gg t_0. \end{aligned} \quad (7)$$

这里仍利用了 $e^{-\frac{\bar{b}}{2}(t-t_0)}(t-t_0) \leq 1$. 引理 2 证毕.

在下面主要定理的证明过程中, 要证当 $|x| > c = \text{const}$ 可保证 $(y(t), z(t))$ 的全局指数吸引性, 即全局指数地进入某一个紧集 (有界闭集). 然而, 当 $(y(t), z(t))$ 向全局吸引集收敛时, $|x(t)|$ 亦向吸引集收敛. 它是根据引理 1, $y(t)$ 的全局指数吸引性又蕴涵 $x(t)$ 的全局指数吸引性. 利用引理 2, $(y(t), x(t))$ 的全局指数吸引性又蕴涵 $z(t)$ 的全局指数吸引性.

3 主要定理

在证明主要定理之前, 为使证明过程条理清晰, 我们引进一些记号.

记对称矩阵

$$P_1 := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad P_2 := \begin{bmatrix} 1+\varepsilon & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad P_3 := \begin{bmatrix} 1-\bar{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

其中 $\varepsilon \in (0, +\infty)$, $\bar{\varepsilon} \in (-\infty, 1)$ 为常数, 从而 $P_i (i = 1, 2, 3)$ 均为对称正定矩阵.

$$Q_1 := \begin{bmatrix} -(a+c-\xi) & 0 & 0 \\ 0 & -(a-c) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b}{2} \end{bmatrix}, \quad 0 < \xi < a+c, \quad Q_2 := \begin{bmatrix} -\frac{b}{2}l^2 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{2} \end{bmatrix} = Q_3,$$

其中, Q_1, Q_2, Q_3 是对称负定的.

令 $\lambda_M(Q_i), \lambda_M(P_i)$ 分别表示 Q_i, P_i 的最大特征值 ($i = 1, 2$),

$$R_1 := \sqrt{\frac{\lambda_M(P_1)}{|\lambda_M(Q_1)|} 2a^2b}, \quad R_2 := \sqrt{\frac{\lambda_M(P_2)}{|\lambda_M(Q_2)|} \frac{b}{2}(a-c)^2}, \quad R_3 := \sqrt{\frac{\lambda_M(P_3)}{|\lambda_M(Q_3)|} \frac{b}{2}(a-c)^2}.$$

当 $Q_2 = Q_3, \varepsilon = -\bar{\varepsilon}$ 时, 有 $R_2 = R_3$.

在 $x = 0, z \leq \xi$ 平面内作广义正定的径向无界的 Lyapunov 函数

$$V_1(y, z) = \frac{1}{2} [y^2 + (z - 2a)^2]. \quad (8)$$

在 (y, z) 的半平面 $z \geq 0$ (即第 I 象限内) 作广义正定的径向无界的 Lyapunov 函数

$$V_2(y, z) = \frac{1+\varepsilon}{2} y^2 + \frac{1}{2} [z + (1+\varepsilon)(a-c)]^2. \quad (9)$$

在 (y, z) 的半平面 $z \leq 0$ (即第 II 象限内) 作广义正定的径向无界的 Lyapunov 函数

$$V_3(y, z) = \frac{1-\bar{\varepsilon}}{2} y^2 + \frac{1}{2} [z + (1-\bar{\varepsilon})(a-c)]^2. \quad (10)$$

适当地选取 $L_i^2 > R_i^2$ (显然 $V_i = R_i^2$ 被包含在 $V_i = L_i^2$ 内), 使得 $V_1(y, z) = L_1^2$ 与 $z = \eta$ 相交于 $A_1(y_1, \eta)$ 即 $V_1(y, z) = V_1(y_1, \eta) = L_1^2$ 与 $z = \xi$ 相交于 $\bar{A}_1(\bar{y}_1, \xi)$ 即 $V_1(y, z) = V_1(\bar{y}_1, \xi) = L_1^2$, 且使

$$V_2(y, z) = V_2(y_1, \eta) = L_2^2 > R_2^2, \quad (11)$$

$$V_3(y, z) = V_3(\bar{y}_1, \xi) = L_3^2 > R_3^2. \quad (12)$$

$V_2(y, z) = L_2^2$ 与 z 轴 (即 $y = 0$) 相交于 $A_2(0, z_2)$. $V_3(y, z) = L_3^2$ 与 z 轴 (即 $y = 0$) 相交于 $\bar{A}_2(0, \bar{z}_2)$.

我们总可以适当地调整 ξ 上升逼近 $a+c$, η 下降逼近于 0 及 $\varepsilon, \bar{\varepsilon}$ 使得 $\bar{z}_2 \geq z_2$.

以 $A_1 \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_2 A_1$ 围成的有界闭集为 Ω , Ω 的解析表达式为

$$\Omega: \begin{cases} \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}(z-2a)^2 \leq L_1^2, & \text{当 } z \leq \xi, \\ \frac{1+\varepsilon}{2}y^2 + \frac{1}{2}[z+(1+\varepsilon)(a-c)]^2 \leq L_2^2, & \text{当 } y \geq 0, \\ \frac{1-\bar{\varepsilon}}{2}y^2 + \frac{1}{2}[z+(1-\bar{\varepsilon})(a-c)]^2 \leq L_3^2, & \text{当 } y \leq 0. \end{cases} \quad (13)$$

令 Ω^c 为 Ω 的余集, 即 $\Omega^c = \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$, G^c 为 G 的余集,

$$G = \left\{ x \mid |x| \leq \max \left[\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon l} c, \frac{1-\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon} h} c \right] \right\}, \quad G^c = \left\{ x \mid |x| > \max \left[\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon l} c, \frac{1-\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon} h} c \right] \right\}.$$

主要定理 (1) $\Omega^c \cup G^c$ 为式 (1) 的 (x, y, z) 的全局吸引域;

(2) 当 $|x| \geq \max \left[\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon l} c, \frac{1-\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon} h} c \right]$, Ω 为式 (1) 的 (y, z) 的全局指数吸引集和正向不变集;

(3) $\Omega \cup G = \{x : |x| \leq \max \left[\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon l} c, \frac{1-\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon} h} c \right]\}$ 为 (x, y, z) 的全局指数吸引集和正向不变集.

证明 因为系统 (1) 具有关于 (x, y) 的对称性, 即 $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ 系统是不变的, 故我们只需考虑 $x \geq 0$ 的情况.

下面分四步来证明定理.

第 1 步: 在 $z \leq \xi < a+c$ 的下半 $\mathbb{R}^3$ 区域内作 3 维空间的广义正定的径向无界的 Lyapunov 函数

$$\begin{aligned} V_1(x, y, z) &= V_1 = x^2 + \frac{1}{2}y^2 - xy + \frac{1}{2}(z-2a)^2 \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-2a \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-2a \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-2a \end{pmatrix}^T P_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-2a \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

故

$$\lambda_m(P_1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-2a \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-2a \end{pmatrix} \leq V_1 \leq \lambda_M(P_1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-2a \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-2a \end{pmatrix}. \quad (15)$$

沿系统式 (1) 的解对 V_1 求导数, 当 $z \leq \xi$ 时,

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV_1}{dt} \right|_{(1)} &= 2x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} + (z-2a) \frac{dz}{dt} \\ &= 2axy - 2ax^2 + (c-a)xy - xyz + cy^2 - ay^2 + axy \\ &\quad - (c-a)x^2 + x^2z - cxy - bz^2 + xyz - 2axy + 2abz \\ &= (-2a+a-c)x^2 - (a-c)y^2 + 2axy - axy + axy - 2axy \\ &\quad + x^2z + cxy - cxy - \frac{b}{2}z^2 + 2abz - \frac{(2a)^2}{2}b + \frac{(2a)^2}{2}b - \frac{b}{2}z^2 \\ &= -(a+c-\xi)x^2 - (a-c)y^2 + (z-\xi)x^2 - \frac{b}{2}(z-2a)^2 + 2a^2b - \frac{b}{2}z^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \leq \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-2a \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -(a+c-\xi) & 0 & 0 \\ 0 & -(a-c) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-2a \end{pmatrix} - \frac{b}{2}z^2 + 2a^2b \\
 & \leq \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-2a \end{pmatrix}^T Q_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-2a \end{pmatrix} + 2a^2b \\
 & \leq \lambda_M(Q_1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-2a \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-2a \end{pmatrix} + 2a^2b \\
 & \leq \frac{\lambda_M(Q_1)}{\lambda_M(P_1)} \left(V_1 + \frac{\lambda_M(P_1)}{\lambda_M(Q_1)} 2a^2b \right) = \frac{\lambda_M(Q_1)}{\lambda_M(P_1)} \left(V_1 - \frac{\lambda_M(P_1)}{|\lambda_M(Q_1)|} 2a^2b \right) \\
 & = \frac{\lambda_M(Q_1)}{\lambda_M(P_1)} (V_1 - R_1^2) < \frac{\lambda_M(Q_1)}{\lambda_M(P_1)} (V_1 - L_1^2). \tag{16}
 \end{aligned}$$

从式 (16) 可看出

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{dV_1}{dt} \right|_{(1)V_1=R_1^2} & \leq \frac{\lambda_M(Q_1)}{\lambda_M(P_1)} (R_1^2 - R_1^2) \leq 0, \\
 \left. \frac{dV_1}{dt} \right|_{(1)V_1=L_1^2} & \leq \frac{\lambda_M(Q_1)}{\lambda_M(P_1)} (L_1^2 - R_1^2) < 0.
 \end{aligned}$$

故

$$(V_1(X(t)) - L_1^2) \leq (V_1(X(t_0)) - L_1^2) e^{-\frac{|\lambda_M(Q_1)|}{\lambda_M(P_1)}(t-t_0)}, \quad \text{当 } V_1(X(t)) > L_1^2, V_1(X(t_0)) > L_1^2. \tag{17}$$

从而当始值 $z \leq \xi$, 轨线 $X(t)$ 从 $V_1 > L_1^2$ 按指数衰减进入 $V_1 \leq L_1^2$, 当进入时 $V_1 = L_1^2$ 永远停留在 $V_1 \leq L_1$ 内, 因此可知 Ω 为 (y, z) 全局指数吸引集和正向不变集.

对于 $V_1^\pi(x, y, z) = V_1(0, y, z) = R_1^2$ 在 $x = 0$ 平面上的投影即为二维空间的 $V_1^\pi = V_1(0, y, z) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}(z-2a)^2 = L_1^2$ 如示意图 1 所示.

第 2 步: 在 (y, z) 平面上的第 I 象限及 $z \geq \eta$ 的上方作二维空间的广义正定的径向无界的 Lyapunov 函数

$$\begin{aligned}
 V_2 & = V_2(y, z) = \frac{1+\varepsilon}{2}y^2 + \frac{1}{2}[z + (1+\varepsilon)(a-c)]^2 \\
 & = \begin{pmatrix} y \\ z + (1+\varepsilon)(a-c) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{1+\varepsilon}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z + (1+\varepsilon)(a-c) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

选取 $x \geq \max \left[\frac{(1+\varepsilon)c}{\varepsilon l}, \frac{(1-\varepsilon)c}{\varepsilon h} \right]$,

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{dV_2}{dt} \right|_{(1)} & = (1+\varepsilon)y \frac{dy}{dt} + [z + (1+\varepsilon)(a-c)] \frac{dz}{dt} \\
 & = (1+\varepsilon)(c-a)xy - (1+\varepsilon)xyz + (1+\varepsilon)cy^2 + [z + (1+\varepsilon)(a-c)](xy - bz) \\
 & = (1+\varepsilon)(c-a)xy + (1+\varepsilon)(a-c)xy - (1+\varepsilon)xyz + xyz + (1+\varepsilon)cy^2
 \end{aligned}$$

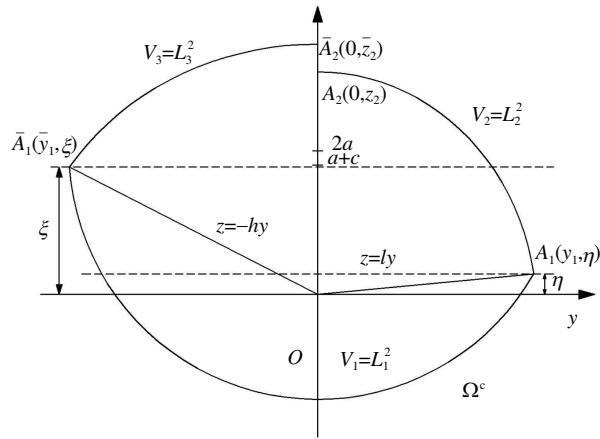


图 1 示意图

Figure 1 Schematic diagram. $A_1(y_1, \eta)$, $\bar{A}_1(\bar{y}_1, \bar{\eta})$, $A_2(0, z_2)$, $\bar{A}_2(0, \bar{z}_2)$, $OA_1: z = ly$, $OA_2: z = hy$. $\Omega: A_1 \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_2 A_1$. Ω^c is the complement set of Ω , $\Omega^c = R^2 \setminus \Omega$

$$\begin{aligned}
 & -bz^2 - (1+\varepsilon)(a-c)bz \\
 & = -\varepsilon xyz + (1+\varepsilon)cy^2 - bz^2 - (1+\varepsilon)(a-c)bz \\
 & \leq -\varepsilon lxy^2 + (1+\varepsilon)cy^2 - \frac{b}{2}[z + (1+\varepsilon)(a-c)]^2 + \frac{b}{2}(1+\varepsilon)(a-c)^2 - \frac{b}{2}z^2 \\
 & \leq -\varepsilon lxy^2 + (1+\varepsilon)cy^2 - \frac{b}{2}l^2y^2 - \frac{b}{2}[z + (1+\varepsilon)(a-c)]^2 + \frac{b}{2}[(1+\varepsilon)(a-c)]^2 \\
 & \leq \begin{pmatrix} y \\ z + (1+\varepsilon)(a-c) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\varepsilon lx + (1+\varepsilon)c - \frac{h}{2}l^2 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z + (1+\varepsilon)(a-c) \end{pmatrix} \\
 & \quad + \frac{b}{2}[(1+\varepsilon)(a-c)]^2 \\
 & \leq \begin{pmatrix} y \\ z + (1+\varepsilon)(a-c) \end{pmatrix}^T Q_2 \begin{pmatrix} y \\ z + (1+\varepsilon)(a-c) \end{pmatrix} + \frac{b}{2}[(1+\varepsilon)(a-c)]^2 \\
 & \leq \lambda_M(Q_2) \begin{pmatrix} y \\ z + (1+\varepsilon)(a-c) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y \\ z + (1+\varepsilon)(a-c) \end{pmatrix} + \frac{b}{2}[(1+\varepsilon)(a-c)]^2 \\
 & \leq \frac{\lambda_M(Q_2)}{\lambda_M(P_2)} \left[V_2 - \frac{\lambda_M(P_2)}{|\lambda_M(Q_2)|} \frac{b}{2} [(1+\varepsilon)(a-c)]^2 \right] \\
 & \leq \frac{\lambda_M(Q_2)}{\lambda_M(P_2)} [V_2 - R_2^2] < \frac{\lambda_M(Q_2)}{\lambda_M(P_2)} [V_2 - L_2^2]. \tag{18}
 \end{aligned}$$

故

$$(V_2(X(t)) - R_2^2) \leq (V_2(X(t_0)) - R_2^2) e^{-\frac{\lambda_M(P_2)}{|\lambda_M(Q_2)|}(t-t_0)}.$$

从而当

$$x \geq \frac{(1+\varepsilon)c}{\varepsilon l}, \quad V_2(X(t_0)) > L_2^2, \quad V_2(X(t)) > L_2^2.$$

在第 I 象限扇形 $\widehat{OA_1A_2O}$ 外的轨线 (y, z) 要按指数衰减规律进入扇形 $\widehat{OA_1A_2O}$.

从式 (18) 的推导可得出

$$\begin{aligned}\left.\frac{dV_2}{dt}\right|_{(1) V_2=R_2^2} &= \frac{\lambda_M(Q_2)}{\lambda_M(P_2)} [R_2^2 - R_2^2] = 0, \\ \left.\frac{dV_2}{dt}\right|_{(1) V_2=L_2^2} &= \frac{\lambda_M(Q_2)}{\lambda_M(P_2)} [L_2^2 - R_2^2] < 0.\end{aligned}$$

从而从第 I 象限 $V_2 > L_2^2$ 出发的轨线 (y, z) 按指数衰减规律进入 $V_2 \leq L_2^2$, 且进入扇形 $\widehat{OA_1A_2O}$ 的轨线 $(y(t), z(t))$ 不能再达到 $V_2 = L_2^2$, 故当 $x \geq \frac{(1+\varepsilon)c}{\varepsilon l}$, 故当 $V_2 > L_2^2$ 下降至 $V_2 = L_2^2$, $x > \frac{(1+\varepsilon)c}{\varepsilon l}$ 单调下降到 $x = \frac{(1+\varepsilon)c}{\varepsilon l}$, 这说明当轨线 $(y(t), z(t))$ 按指数衰减规律 (18) 进入 Ω 时, x 也随之下降到 $x \leq \frac{(1+\varepsilon)c}{\varepsilon l}$. 这是我们的断言 Ω_ε 是 (y, z) 全局指数吸引集和正向不变集的证据.

第 3 步: 在 (y, z) 平面上的第 II 象限及 $z \geq \xi$ 上作广义正定的径向无界的 Lyapunov 函数.

$$\begin{aligned}V_3(y, z) &= V_3 = \frac{1-\bar{\varepsilon}}{2}y^2 + \frac{1}{2}[z + (1-\bar{\varepsilon})(a-c)]^2 \\ &= \begin{bmatrix} y \\ z + (1-\bar{\varepsilon})(a-c) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1-\bar{\varepsilon}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z + (1-\bar{\varepsilon})(a-c) \end{bmatrix} \\ &:= \begin{bmatrix} y \\ z + (1-\bar{\varepsilon})(a-c) \end{bmatrix}^T P_3 \begin{bmatrix} y \\ z + (1-\bar{\varepsilon})(a-c) \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (19)$$

当 $x \geq \max\left[\frac{(1+\varepsilon)c}{\varepsilon l}, \frac{(1-\bar{\varepsilon})c}{\bar{\varepsilon}h}\right]$ 有

$$\begin{aligned}\left.\frac{dV_3}{dt}\right|_{(1)} &= (1-\bar{\varepsilon})y\frac{dy}{dt} + [z + (1-\bar{\varepsilon})(a-c)]\frac{dz}{dt} \\ &= (1-\bar{\varepsilon})(c-a)xy - (1-\bar{\varepsilon})xyz + (1-\bar{\varepsilon})cy^2 + xyz + (1-\bar{\varepsilon})(a-c)xy \\ &\quad - (1-\bar{\varepsilon})(a-c)bz - bz^2 \\ &\leq (1-\bar{\varepsilon})cy^2 + \varepsilon xyz - \frac{b}{2}[z + (1-\bar{\varepsilon})(a-c)]^2 + \frac{b}{2}[(1-\bar{\varepsilon})(a-c)]^2 - \frac{b}{2}z^2 \\ &\leq (1-\bar{\varepsilon})cy^2 + \varepsilon xyz - \frac{b}{2}[z + (1-\bar{\varepsilon})(a-c)]^2 - \frac{bh^2}{2}y^2 + \frac{b}{2}[(1-\bar{\varepsilon})(a-c)]^2 \\ &\leq \begin{bmatrix} y \\ z + (1-\bar{\varepsilon})(a-c) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -hx\bar{\varepsilon} - \frac{b}{2}h^2 + (1-\bar{\varepsilon})c & 0 \\ 0 & -\frac{b}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z + (1-\bar{\varepsilon})(a-c) \end{bmatrix} \\ &\leq \begin{bmatrix} y \\ z + (1-\bar{\varepsilon})(a-c) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -hx\bar{\varepsilon} - \frac{b}{2}l^2 + (1-\bar{\varepsilon})c & 0 \\ 0 & -\frac{b}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z + (1-\bar{\varepsilon})(a-c) \end{bmatrix} \\ &\leq \begin{bmatrix} y \\ z + (1-\bar{\varepsilon})(a-c) \end{bmatrix}^T Q_3 \begin{bmatrix} y \\ z + (1-\bar{\varepsilon})(a-c) \end{bmatrix} + \frac{b}{2}[(1-\bar{\varepsilon})(a-c)]^2 \\ &= \begin{bmatrix} y \\ z + (1-\bar{\varepsilon})(a-c) \end{bmatrix}^T Q_2 \begin{bmatrix} y \\ z + (1-\bar{\varepsilon})(a-c) \end{bmatrix} + \frac{b}{2}[(1-\bar{\varepsilon})(a-c)]^2\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\lambda_M(Q_2)}{\lambda_M(P_3)} (V_3 - R_3^2) < \frac{\lambda_M(Q_2)}{\lambda_M(P_3)} (V_3 - L_3^2). \quad (20)$$

从式 (20) 我们有

$$\left. \frac{dV_3}{dt} \right|_{(1) V_3=R_3^2} \leq \frac{\lambda_M(Q_2)}{\lambda_M(P_3)} [R_3^2 - R_3^2] = 0, \quad (21)$$

$$\left. \frac{dV_3}{dt} \right|_{(1) V_3=L_3^2} \leq \frac{\lambda_M(Q_2)}{\lambda_M(P_3)} [L_3^2 - R_3^2] < 0. \quad (22)$$

从而从第 II 象限 $V_3 > L_3^2$ 出发的轨线 (y, z) 按指数衰减律进入 $V_3 \leq L_3^2$, x 也随之下降, 且进入扇形 $\widehat{OA_1A_2O}$ 的轨线 $(y(t), z(t))$ 不能再达到 $V_3 = L_3^2$.

故 Ω 是 $(y(t), z(t))$ 的全局指数吸引集和正向不变集.

第四步: 我们有多组可自由调整的参数. 通过这些参数的调整, 可使 $\bar{A}_2(0, \bar{z}_2)$ 在 $A_2(0, z_2)$ 之上, 即 $\bar{z}_2 \geq z_2$.

(1) 尽量提升 ξ 接近于 $a + c$, 从而可提升 h 及 $\bar{z}_1$, 进而可提升 $\bar{z}_2$;

(2) 尽量减小 η 接近于 0 使 l 减小, 从而可使 z_1 下降, 进而可使 z_2 下降使得 $\bar{z}_2 \geq z_2$;

(3) $\varepsilon, \bar{\varepsilon}$ 还可以适当调整, 使 $\bar{z}_2 \geq z_2$;

(4) 更可以根据需要调节 Q_2, Q_3 使 $\lambda_M(Q_2) < \lambda_M(Q_3)$, 或 $\lambda_M(Q_2) > \lambda_M(Q_3)$, 或 $\lambda_M(Q_2) = \lambda_M(Q_3)$ 都有可能. 只要调节 $x \geq$ 某常数的值, 我们这里是调节使 $Q_2 = Q_3$, 从而 $\lambda_M(Q_2) = \lambda_M(Q_3)$ 目的是使 $|y_1| \leq |\bar{y}_1|$ 确保 $z_2 \leq \bar{z}_2$.

因此, 我们不妨设 $\bar{z}_2 > z_2$.

现在要证明过 $\overline{A_2A_2}$ 的线段上, 轨线 $(y(t), z(t))$ 也是从右往左走的, 且按指数衰减的, 故轨线 $(y(t), z(t))$ 是从 Ω 的外面走向 Ω 的内部的, 且停留在 Ω 内. 因为把 $y = 0$ 代入式 (1) 的第 2 个方程

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=0} = (c - a)x - xz < 0, \quad (23)$$

即轨线 $(y(t), z(t))$ 是从右往左走的, 因为在 $y \neq 0$ 时, 轨线是指数型衰减的. 由 Lefschetz 著名的连续开拓原理, 在 $y = 0$ 上也是指数型衰减的. 到此, 定理证毕.

注 为了图形的美观, 我们也可以过点 A_2 取 $V_3 = \frac{1}{2}[z_2 + (1 - \bar{\varepsilon})(a - c)]^2$ 与 $V_1 = L_1^2$ 相交于 $A_3(y_3, z_3), y_3, z_3$ 满足

$$V_1^\pi(y_3, z_3) = L_1^2.$$

可以证明, 通过适当的调整上面的参数, 可使 A_3 点在 $V_1^\pi = L_1^2$ 的弧线上, 介于 (η, ξ) 之间 (见示意图 2).

现在我们对 Chen 系统中的具体参数进行真实的仿真, 以证明方法的有效性 (仍以 R_1^2, R_2^2, R_3^2 为例, 如图 3, 图 4 所示).

取 $a = 35, c = 28, b = 3, \xi = a + c - 1 = 35 + 28 - 1 = 63 - 1 = 62, \eta = 10$. 这样

$$Q_1 = \begin{bmatrix} -(a + c - \xi) & 0 & 0 \\ 0 & -(a - c) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -1.5 \end{bmatrix},$$

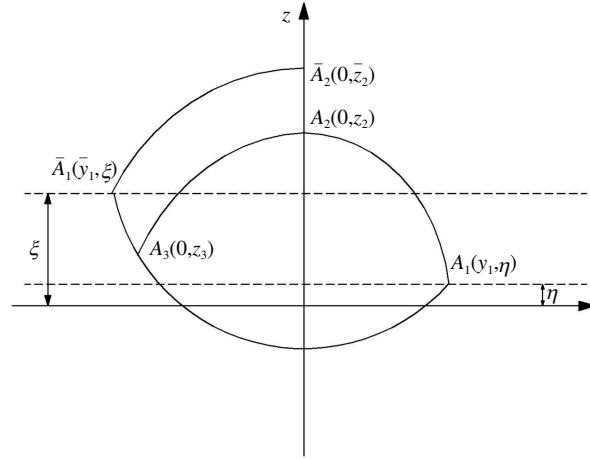


图 2 示意图

Figure 2 Schematic diagram. $A_1(y_1, \eta)$, $\bar{A}_1(\bar{y}_1, \xi)$, $A_2(0, z_2)$, $\bar{A}_2(0, \bar{z}_2)$, $A_3(y_3, z_3)$, $y_3, z_3, V_1(y_3, z_3) = L_1^2$

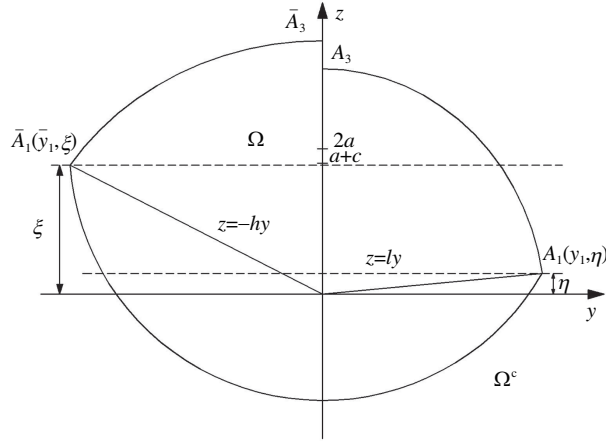


图 3 示意图

Figure 3 Schematic diagram

故此 $\lambda_M(Q_1) = -1$.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

故此 $\lambda_M(P_1) = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$.

(1) 以 $2a$ 为圆心, $R_1^2 = \frac{\lambda_M(P_1)}{|\lambda_M(Q_1)|} 2a^2b = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \times 3 \times 35^2$ 为半径作圆 $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}(z-2a)^2 = R_1^2$.

(2) 求此圆与直线 $z = \xi = 62$ 的交点 $\bar{A}_1(\bar{y}_1, \bar{z}_1) = \bar{A}_1(\bar{y}_1, \xi)$,

$$\bar{y}_1 = \sqrt{2R_1^2 - (\xi - 2a)^2} = \sqrt{(3 + \sqrt{5}) \times 3 \times 35^2 - 8^2} = 138.49, \quad \bar{z}_1 = \xi = 62.$$

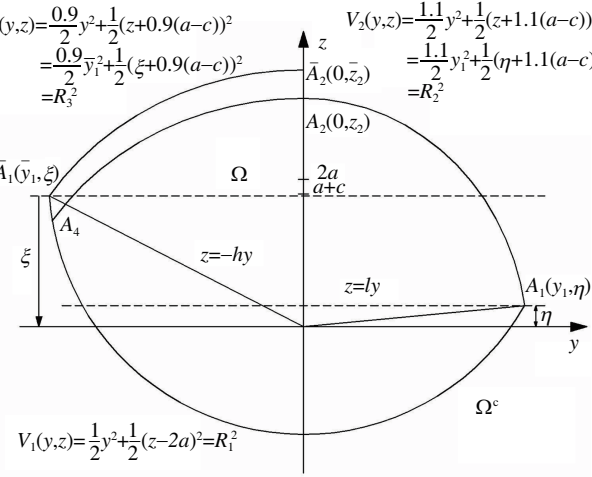


Figure 4 Schematic diagram

(3) 求此圆与直线 $z = \eta = 10$ 的交点 $A_1(y_1, z_1) = A_1(y_1, \eta)$,

$$y_1 = \sqrt{2R_1^2 - (\eta - 2a)^2} = \sqrt{(3 + \sqrt{5}) \times 3 \times 35^2 - (70 - 10)^2} = 125.07, \quad z_1 = \eta = 10.$$

(4) 过 A_1 点作椭圆 (取 $\varepsilon = 0.2$),

$$\begin{aligned} \frac{1+\varepsilon}{2}y^2 + \frac{1}{2}[z + (1+\varepsilon)(a-c)]^2 &= \frac{1+\varepsilon}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}[z_1 + (1+\varepsilon)(a-c)]^2 \\ &= \frac{1+0.2}{2}[(3+\sqrt{5}) \times 3 \times 35^2 - (70-10)^2] \\ &\quad + \frac{1}{2}[10 + (1+0.2)(35-28)]^2 = 9554.81, \end{aligned}$$

与 z 轴交于 $A_2(0, z_2)$.

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt{(1+\varepsilon)y_1^2 + [\eta + (1+\varepsilon)(a-c)]^2} - (1+\varepsilon)(a-c) \\ &= \sqrt{(1+0.2)[(3+\sqrt{5}) \times 3 \times 35^2 - (70-10)^2] + [10 + (1+0.2)(35-28)]^2} - (1+0.2)(35-28) \\ &= 129.84. \end{aligned}$$

(5) 过 $\bar{A}_1$ 点作椭圆 (取 $\bar{\varepsilon} = 0.2$),

$$\begin{aligned} \frac{1-\bar{\varepsilon}}{2}y^2 + \frac{1}{2}[z + (1-\bar{\varepsilon})(a-c)]^2 &= \frac{1-\bar{\varepsilon}}{2}\bar{y}_1^2 + \frac{1}{2}[\xi + (1-\bar{\varepsilon})(a-c)]^2 \\ &= \frac{1-0.2}{2}[(3+\sqrt{5}) \times 3 \times 35^2 - 8^2] + \frac{1}{2}[62 + (1-0.2)(35-28)]^2 \\ &= 9956.30. \end{aligned}$$

与 z 轴交于 $\bar{A}_2(0, \bar{z}_2)$.

$$\bar{z}_2 = \sqrt{(1 - \bar{\varepsilon}) \bar{y}_1^2 + [\xi + (1 - \bar{\varepsilon})(a - c)]^2} - (1 - \bar{\varepsilon})(a - c)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{(1-0.2) \left[(3+\sqrt{5}) \times 3 \times 35^2 - 8^2 \right] + [62 + (1-0.2)(35-28)]^2 - (1-0.2)(35-28)} \\
 &= 135.51,
 \end{aligned}$$

$\bar{z}_2 = 135.51 > z_2 = 129.84$ 满足要求.

类似地, 仿照上面的方法, 我们反复计算, 当 $a = 35, c = 28, b = 3, \xi = 62, \eta = 10, \varepsilon = 0.2, \bar{\varepsilon} = 0.1$; 或 $\xi = 62, \eta = 10, \varepsilon = 0.1, \bar{\varepsilon} = 0.1$; 或 $\xi = 62, \eta = 1, \varepsilon = 0.1, \bar{\varepsilon} = 0.1$; 或 $\xi = 29, \eta = 1, \varepsilon = 0.2, \bar{\varepsilon} = 0.1$; 或 $\xi = 29, \eta = 1, \varepsilon = 0.1, \bar{\varepsilon} = 0.1$; 或 $\xi = 25, \eta = 1, \varepsilon = 0.1, \bar{\varepsilon} = 0.1$ 时均满足要求 $\bar{z}_2 > z_2$.

如果在 $V_i = R_i^2$ 的某一个上不满足 $\frac{dV_i}{dt} < 0$, 我们可以作相似变换, 将图 3, 图 4 的基本图形扩大, 变换为

$$\begin{aligned}
 V_1(y, z) &= \frac{1}{2} [y^2 + (z - 2a)^2] = L_1^2, \\
 V_2(y, z) &= \frac{1.1}{2} y^2 + \frac{1}{2} [z + 1.1(a - c)]^2 = \frac{1.1}{2} y^2 + \frac{1}{2} [\eta + 1.1(a - c)]^2 = L_2^2, \\
 V_3(y, z) &= \frac{0.9}{2} y^2 + \frac{1}{2} [3 + 0.9(a - c)]^2 = \frac{0.9}{2} \bar{y}_1^2 + \frac{1}{2} [\xi + 0.9(a - c)]^2 = L_3^2,
 \end{aligned}$$

使

$$\left. \frac{dV_i}{dt} \right|_{V_i=L_i^2} < 0. \quad (24)$$

这是能实现且必成功的, 从而 Ω 为全局指数吸引集和正向不变集.

4 对两个 Chen 系统混沌同步的应用

混沌应用重要内容之一是保密通讯的混沌同步. 两个同类混沌系统之间只有加上负反馈控制律才可能实现同步. 虽然原则上非线性反馈律和线性反馈律的设计, 一种方案是加容易实现的线性反馈律, 但人们设想连续混沌系统必须是最终有界的. 然而, 除了 Lorenz 系统已有文献 [15~22] 和具有光滑的 Chua 电路 [23] 已构造性地证明最终有界的存在, 其他混沌系统尚未证明这个重要的结论, 故我们的线性反馈律的方案也是建立在未知最终有界的界值存在性的先验假设基础上, 使用时仍难具体实现.

现在由于上面已给出了 Chen 系统最终有界的界值估计, 从而必可以用线性反馈律实现同步, 下面予以叙述.

设 Chen 系统的发送方程为

$$\begin{cases} \frac{dx_d}{dt} = a(y_d - x_d), \\ \frac{dy_d}{dt} = (c - a)x_d - x_d z_d + cy_d, \\ \frac{dz_d}{dt} = x_d y_d - bz_d, \end{cases} \quad (25)$$

接收系统为

$$\begin{cases} \frac{dx_r}{dt} = a(y_r - x_r), \\ \frac{dy_r}{dt} = (c - a)x_r - x_r z_r + cy_r, \\ \frac{dz_r}{dt} = x_r y_r - bz_r. \end{cases} \quad (26)$$

令 $e_x = x_d - x_r, e_y = y_d - y_r, e_z = z_d - z_r$, 则加负反馈控制律的误差系统为

$$\begin{cases} \frac{de_x}{dt} = a(e_y - e_x) - u_1(e_x, e_y, e_z), \\ \frac{de_y}{dt} = (c - a)e_x - x_d z_d + x_r z_r + ce_y - u_2(e_x, e_y, e_z), \\ \frac{dz_r}{dt} = x_d y_d - x_r y_r - be_z - u_3(e_x, e_y, e_z), \end{cases} \quad (27)$$

其中

$$u_i(e_x, e_y, e_z)$$

为 e_x, e_y, e_z 的线性函数

$$u_i > 0, i = 1, 2, 3.$$

令

$$\begin{aligned} z_d^* &= \max_{z \in \Omega} |z_d| = \max \left\{ \bar{z}_3, \sqrt{2R_2 - 2a} \right\}, \\ y_d^* &= \max_{y \in \Omega} |y_d| = \max \{|y_2|, |\bar{y}_2|\}. \end{aligned}$$

定义 4 式 (27) 的零解分别是全局渐近稳定的, 或全局指数渐近稳定的, 则称式 (25) 和 (26) 分别是全局同步, 或全局指数同步的.

现在, 我们对式 (27) 加最简单的线性负反馈控制律

$$u_1 = \lambda_1 e_x, u_2 = \lambda_2 e_y, u_3 = \lambda_3 e_z, \lambda_i > 0 \text{ 为常数.}$$

如果矩阵

$$G := \begin{bmatrix} -a - \lambda_1 & \frac{c + z_d^*}{2} & \frac{y_d^*}{2} \\ \frac{c + z_d^*}{2} & c - \lambda_2 & 0 \\ \frac{y_d^*}{2} & 0 & -(b + \lambda_3) \end{bmatrix}$$

是负定的, 则式 (27) 的零解全局指数稳定, 式 (25) 和 (26) 全局指数同步.

证明 作正定的径向无界的 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2}(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2). \quad (28)$$

沿式 (27) 的解对 V 求导数

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(27)} &= (-a - \lambda_1)e_x^2 + ae_x e_y + (c - a)e_x e_y - e_x e_y z_d - e_y e_z x_r + ce_y^2 - \lambda_2 e_y^2 \\ &\quad + e_x e_z y_d + e_y e_z x_r - be_z^2 - \lambda_3 e_z^2 \\ &\leq (-a - \lambda_1)e_x^2 + (c + |z_d|)|e_x||e_y| + ce_y^2 - \lambda_2 e_y^2 + |y_d||e_x||e_z| - be_z^2 - \lambda_3 e_z^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \leq \begin{bmatrix} |e_x| \\ |e_y| \\ |e_z| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -(a + \lambda_1) & \frac{c + |z_d|}{2} & \frac{|y_d|}{2} \\ \frac{c + |z_d|}{2} & (c - \lambda_2) & 0 \\ \frac{|y_d|}{2} & 0 & -(b + \lambda_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |e_x| \\ |e_y| \\ |e_z| \end{bmatrix} \\
 & \leq \begin{bmatrix} |e_x| \\ |e_y| \\ |e_z| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -(a + \lambda_1) & \frac{c + z_d^*}{2} & \frac{y_d^*}{2} \\ \frac{c + z_d^*}{2} & c - \lambda_2 & 0 \\ \frac{y_d^*}{2} & 0 & -(b + \lambda_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |e_x| \\ |e_y| \\ |e_z| \end{bmatrix} \\
 & \leq 2\lambda_M(G)V.
 \end{aligned} \tag{29}$$

因而

$$V(t) \leq V(t_0)e^{-2|\lambda_M(G)|(t-t_0)}, \tag{30}$$

故式 (27) 的零解使全局指数稳定的, 从而式 (25) 和 (26) 是全局指数同步的.

注 这里的系数全是具体的数值, 不存在不确定的未知数, 故应用是方便的, 可计算的.

5 结论

历时多年的反复思考, 本文终于结合几何与代数的技巧, 采用 3 个不同的广义正定的径向无界的 Lyapunov 函数证明了 Chen 混沌系统的所有解最终要全局指数地进入一个构造性的紧集 Ω , 即 Ω 是全局指数吸引集和正向不变集, 解决了这个长期未解决的公开理论难题. 本文的方法和技巧还可以用于研究其他混沌系统的定性性质, 我们将另文研究.

参考文献

- 1 Lorenz E N. Deterministic nonperiodic flow. J Atmos Sci, 1963, 20: 130–141
- 2 Lorenz E N. The Essence of Chaos. Seattle: University of Washington Press, 1993
- 3 Sparrow C. The Lorenz Equations: Bifurcation, Chaos and Strange Attractors. New York: Springer, 1982
- 4 Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic circuits. Phys Rev Lett, 1990, 64: 821–824
- 5 Chen G R, Dong X N. From Chaos to Order. Singapore: World Scientific Pub Co., 1998
- 6 Stewart I. The Lorenz attractor exists. Nature, 2002, 406: 948–949
- 7 Tucker W. A rigorous ODE solver and Sonale's 14th problem. Found Comput Meth, 2002, 2: 53–117
- 8 Chen G R, Ueta T. Yet another chaotic attractor. Int J Bifur Chaos, 1999, 9: 1465–1466
- 9 Hou Z T, Kang N, Kong X X, et al. On the nonequivalence of Lorenz system and Chen system. Int J Bifur Chaos, 2010, 20: 557–560
- 10 Celikovsy S, Chen G R. On a generalized Lorenz canonical form of the chaotic systems. Int J Bifur Chaos, 2002, 12: 1789–1812
- 11 Lü J H, Zhou T S, Chen G R, et al. The compound structure of Chen's attractor. Int J Bifur Chaos, 2002, 12: 855–858
- 12 Chen G R, Lü J H. Dynamical Analysis, Control and Synchronization of Lorenz Families. Beijing: Chinese Science Press, 2003
- 13 Chen G R, Lü J H. Chen's attractor exists. Int J Bifur Chaos, 2003, 14: 3167–3177
- 14 Ueta T, Chen G R. Bifurcation analysis of Chen's attractor. Int J Bifur Chaos, 2000, 10: 1917–1931
- 15 Leonov G, Bunin A, Kokschn N. A tractor localization of the Lorenz system. ZAMM, 1987, 67: 649–656

- 16 Leonov G. On estimates of attractors of Lorenz system. *Vestn Leningradskogo Unuversiten Matematika*, 1988, 21: 32–37
- 17 Leonov G. Bound for attractors of the existence of homoclinic orbits in the Lorenz system. *J App Math*, 2001, 65: 19–32
- 18 Progromsky A Y, Santoboni G, Nijneijer H. An ultimate bound on the trajectories of the Lorenz system and its applications. *Nonlinearity*, 2003, 16: 1597–1605
- 19 Yu P, Liao X X. Globally attractive and positive invariant set of the Lorenz system. *Int J Bifur Chaos*, 2006, 16: 757–764
- 20 Li D, Lu J A, Wu X Q, et al. Estimating the bounds for the Lorenz family of chaotic system. *Chaos Soliton Fract*, 2005, 23: 529–534
- 21 Yu P, Liao X X. New estimations for globally attractive and positive invariant set of the family of the Lorenz systems. *Int J Bifur Chaos*, 2006, 16: 3383–3390
- 22 Liao X X, Fu Y L, Xie S L, et al. Globally exponentially attractive sets of the family of Lorenz systems. *Sci China Ser F-Inf Sci*, 2008, 51: 283–292
- 23 Liao X X, Yu P, Xie S L, et al. Study on the global property of the smooth Chua's system. *Int J Bifur Chaos*, 2006, 16: 2815–2841
- 24 Qin W X, Chen G R. On the boundedness of solutions of the Chen system. *J Math Anal Appl*, 2007, 329: 445–451
- 25 Lü J H, Chen G R, Cheng D, et al. Bridge the gap between the Lorenz system and the Chen system. *Int J Bifur Chaos*, 2002, 12: 2917–2936
- 26 Liao X X. On new results of global attractive set and positively invariant sets for the Lorenz chaotic system and the application in chaos control and synchronization. *Sci Sin Technol*, 2004, 34: 1404–1419 [廖晓昕. 论 Lorenz 混沌系统全局吸引集和正向不变集的新结果及对混沌控制与同步的应用. 中国科学 E 辑: 信息科学, 2004, 34: 1404–1419]
- 27 Liao X X, Luo H G, Fu Y L, et al. Analysis on the global exponential set and positive invariant set of the Lorenz family. *Sci Sin Technol*, 2007, 37: 757–769 [廖晓昕, 罗海庚, 傅予力, 等. 论 Lorenz 系统的全局指数吸引集和正向不变集. 中国科学 E 辑: 信息科学, 2007, 37: 757–769]
- 28 Luo Q, Liao X X. Simple algebraic necessary and sufficient conditions of Lyapunov stability for the Lorenz chaotic system and its application. *Sci Sin Technol*, 2010, 40: 1086–1095 [廖晓昕, 罗琦. Lorenz 混沌系统 Lyapunov 稳定性简洁的代数充要条件及其应用. 中国科学: 信息科学, 2010, 40: 1086–1095]

Constructive proof of globally exponentially attractive and positively invariant set of the chaotic Chen's system

LIAO XiaoXin¹, XU BingJi^{2*}, YU Pei³ & CHEN Guanrong⁴

¹ School of Automation, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China;

² School of Information Engineering, China University of Geosciences (Beijing), Beijing 100083, China;

³ Department of Applied Mathematics, The University of Western Ontario, London, N6A 5B7, Canada;

⁴ Department of Electronic Engineering, City University of Hong Kong, Hong Kong, China

*E-mail: bjxu@cugb.edu.cn

Abstract In this paper, a constructive proof of the globally exponentially attractive and positively invariant set for the chaotic Chen's system is given, by using several generalized positive definite Lyapunov functions. The problem of the existence of a globally exponentially attractive set for the chaotic Chen's system is completely solved, which is a long standing open theoretical problem. Methods provided herein can be useful for the study of other forms of chaotic systems.

Keywords chaotic Chen's system, ultimate boundedness, globally exponentially attractive set, positive invariant set, generalized Lyapunov function



LIAO XiaoXin was born in 1938. He is a Professor and Ph.D. Advisor at the School of Automation, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, China. He has published more than 200 journal papers and 7 books. He obtained the first prize of natural science in Hubei province and second prize in science and technology progress of the Education Minister. His research

interests include nonlinear control, neural networks, chaos control, and stability of general dynamic systems and synchronization.



XU BingJi was born in 1962. He received the B.Sc. degree in mathematics from the Qufu Normal University, Qufu, China, in 1983, and the M.Sc. and Ph.D. degrees, in applied mathematics and systems engineering, from the Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, China, in 1991 and 2002, respectively. Currently, he is a Professor at China University of Geo-

sciences (Beijing), China. His research interests include neural networks, nonlinear systems, and control theory and applications of hybrid dynamic systems.