中国科学: 数学　2022 年　第 52 卷　第 4 期: 433～446
SCIENTIA SINICA Mathematica
论　文

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

加权 Markov 分枝过程的上穿/下穿性质

李彦芸[1], 李俊平[1]*, 陈安岳[2]

1. 中南大学数学与统计学院, 长沙 410083;
2. 南方科技大学数学系, 深圳 518055
E-mail: 2310962168@qq.com, jpli@mail.csu.edu.cn, chenay@sustc.edu.cn

收稿日期: 2020-03-06; 接受日期: 2020-06-06; 网络出版日期: 2021-01-20; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11771452 和 11971486) 资助项目

摘要　本文考虑具有吸收态的加权 Markov 分枝过程的上穿/下穿性质, 对给定的穿越范围, 得到穿越次数的联合概率分布. 特别地, 本文给出 Markov 分枝过程在吸收之前死亡总数的概率分布, 同时给出 $M^X/M/1$ 排队系统在一个忙期内服务总顾客数和固定批量到达总数的联合概率分布.

关键词　加权 Markov 分枝过程　下穿　上穿　联合概率分布

MSC (2020) 主题分类　60J27, 60J35

1　引言

经典 Markov 分枝过程 (Markov branching process, MBP) 在随机过程的研究领域中具有重要的地位, 相关文献可参见文献 [1–3].

经典 Markov 分枝过程的本质性质是分枝性, 即不同粒子的演变是相互独立的. 然而, 在大多数实际问题中, 这种独立性并不满足, 粒子之间通常存在相互作用. 正因为如此, 概率论学者为推广经典分枝过程作出了重要贡献 (参见文献 [4]). Sevast'yanov [5] 首先考虑了这种推广的分枝模型. Vatutin [6]、Li 和 Chen [7] 及 Li 等 [8] 考虑了具有状态独立移入的 Markov 分枝过程. Li 和 Liu [9] 进一步考虑了具有状态独立移入、移出的 Markov 分枝过程. Yamazato [10] 考虑了只在 0 状态移民的分枝模型. 作为 Yamazato 模型的推广, Renshaw 和 Chen [11] 考虑了一类更一般的分枝模型. 这类模型的进一步研究可参见文献 [12–15].

众所周知, 0 是分枝过程的吸收态. 系统中每一个粒子生存一个随机时间后独立地分裂出若干新的粒子, 当系统中没有粒子时停止演变. 对这类过程, 考虑系统中曾经生存过的粒子总数 (即死亡粒子总数) 或系统中分裂出 m 个新粒子的粒子总数 (其中 m 为给定的自然数) 等, 都是非常有趣而又重要的问题. 为了方便起见, 以下称这类次数为定程穿越次数, 例如, -1- 程穿越次数 (即下穿次数) 就是系统中死亡粒子总数, 若 $m>0$, 则 m- 程穿越次数 (即 m- 程上穿次数) 是系统中分裂出 m 个新

英文引用格式: Li Y Y, Li J P, Chen A Y. The down/up crossing properties of weighted Markov branching processes (in Chinese). Sci Sin Math, 2022, 52: 433–446, doi: 10.1360/SCM-2020-0182

　

粒子的粒子总数. 到目前为止, 还没有文献针对这类问题进行讨论和研究. 本文主要针对加权 Markov 分枝过程研究这类问题. 由于这种定程穿越次数是随机的, 因此, 需要考虑 m- 程穿越次数的概率分布问题.

为了讨论加权 Markov 分枝过程的定程穿越次数问题, 先给出模型的生成元, 即 Q 矩阵. 令 $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

定义 1.1 称 Q 矩阵 $Q = (q_{ij}; i, j \in \mathbb{Z}_+)$ 为一个加权分枝 (weighted branching) Q 矩阵, 如果

$$q_{ij} = \begin{cases} w_i b_{j-i+1}, & \text{若 } i \geqslant 1, \quad j \geqslant i-1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中

$$b_j \geqslant 0 \quad (j \neq 1), \quad 0 < -b_1 = \sum_{j \neq 1} b_j < \infty, \quad w_i > 0 \quad (i \geqslant 1). \tag{1.2}$$

定义 1.2 一个状态空间 $\mathbb{Z}_+$ 上的连续时间 Markov 链称为一个加权 Markov 分枝过程, 如果其概率转移函数 $P(t) = (p_{ij}(t);\, i, j \in \mathbb{Z}_+)$ 满足

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(t) q_{kj}, \quad i \geqslant 0, \quad j \geqslant 1, \quad t \geqslant 0, \tag{1.3}$$

其中 $Q = (q_{ij}; i, j \in \mathbb{Z}_+)$ 由 (1.1) 和 (1.2) 定义.

Chen 等 [14] 通过死亡率 b_0、生率 $\{b_k; k \geqslant 2\}$ 和序列 $\{w_k; k \geqslant 1\}$ 给出了加权 Markov 分枝过程的正则性条件. 因此, 以下假定过程是正则的.

2 预备知识

设 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_+$ 为有限子集且 $1 \notin \mathbb{N}$, $b_k > 0$ $(k \in \mathbb{N})$. 记 $N = |\mathbb{N}|$ 为 $\mathbb{N}$ 中所含元素的个数. 本文考虑过程在吸收之前的 $(\mathbb{N}-1)$- 程穿越次数的概率分布 (这里 $(\mathbb{N}-1)$ 表示 $(i-1; i \in \mathbb{N})$), 即 N 维随机向量 $(N_i; i \in \mathbb{N})$ 的联合概率分布, 其中 N_i 为 $(i-1)$- 程穿越次数.

为方便讨论, 定义

$$B(u) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j u^j \tag{2.1}$$

和

$$B_{\mathbb{N}}(u, \boldsymbol{v}) = \sum_{j \in \mathbb{N}} b_j v_j u^j, \quad \bar{B}_{\mathbb{N}}(u) = \sum_{j \in \mathbb{N}^c} b_j u^j, \tag{2.2}$$

其中 $\boldsymbol{v} = (v_j; j \in \mathbb{N})$. 显然, $B(u)$ 和 $\bar{B}_{\mathbb{N}}(u)$ 至少在 $[0,1]$ 上有定义, $B_{\mathbb{N}}(u, \boldsymbol{v})$ 至少在 $[0,1]^{N+1}$ 上有定义.

下面的引理属于数学分析的结论, 在此省略其证明.

引理 2.1 设 $\{f_{\boldsymbol{k}}; \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}_+^N\}$ 为定义在 $\mathbb{Z}_+^N$ 上的实数序列,

$$F(\boldsymbol{v}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}_+^N} f_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{k}}$$

为 $\{f_{\boldsymbol{k}};\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}_+^N\}$ 的母函数, 则对任意 $j\in\mathbb{Z}_+$, 有

$$F^j(\boldsymbol{v})=\sum_{\boldsymbol{l}\in\mathbb{Z}_+^N}f_{\boldsymbol{l}}^{*(j)}\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{l}}, \tag{2.3}$$

其中

$$f_{\boldsymbol{0}}^{*(0)}=1,\quad f_{\boldsymbol{l}}^{*(0)}=0\quad(\boldsymbol{l}\neq\boldsymbol{0}),\quad f_{\boldsymbol{l}}^{*(j)}=\sum_{\boldsymbol{k}^{(1)}+\cdots+\boldsymbol{k}^{(j)}=\boldsymbol{l}}f_{\boldsymbol{k}^{(1)}}\cdots f_{\boldsymbol{k}^{(j)}}\quad(j\geqslant 1)$$

为 $\{f_{\boldsymbol{k}};\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}_+^N\}$ 的 j 重卷积.

在后面的讨论中, 函数 $\bar{B}_{\mathbb{N}}(u)+B_{\mathbb{N}}(u,\boldsymbol{v})$ 将起到重要作用. 下面的定理给出了该函数的基本性质.

定理 2.1　(i) 对任意 $\boldsymbol{v}\in[0,1]^N$,

$$\bar{B}_{\mathbb{N}}(u)+B_{\mathbb{N}}(u,\boldsymbol{v})=0 \tag{2.4}$$

在 $[0,1]$ 中至多有 2 个根. 记 $\rho(\boldsymbol{v})$ 为方程 (2.4) 的最小非负根, 则 $\rho(\boldsymbol{v})\leqslant\rho$, 其中 ρ 是 $B(u)=0$ 的最小非负根.

(ii) $\rho(\boldsymbol{v})\in C^\infty([0,1)^N)$, 且 $\rho(\boldsymbol{v})$ 可以展开成多元 Taylor 级数

$$\rho(\boldsymbol{v})=\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}_+^N}\rho_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{k}}, \tag{2.5}$$

其中 $\rho_{\boldsymbol{k}}\geqslant 0,\forall\,\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}_+^N$.

证明　首先, 由 $0\leqslant B_{\mathbb{N}}(u,\boldsymbol{0})\leqslant B_{\mathbb{N}}(u,\boldsymbol{v})\leqslant B_{\mathbb{N}}(u,\boldsymbol{1})$, 得到

$$\bar{B}_{\mathbb{N}}(u)+B_{\mathbb{N}}(u,\boldsymbol{v})\leqslant B(u).$$

由文献 [16, 引理 2.1] 立得 (i). 接下来证明 (ii). 不失一般性, 假设 $\mathbb{N}=\{2,3\}$, 因此,

$$B_{\mathbb{N}}(u,\boldsymbol{v})=B_{\mathbb{N}}(u,v_2,v_3).$$

记

$$f(u,v_2,v_3)=B_{\mathbb{N}}(u,v_2,v_3)\quad\text{和}\quad g(u)=\bar{B}_{\mathbb{N}}(u),$$

则

$$g(\rho(v_2,v_3))+f(\rho(v_2,v_3),v_2,v_3)\equiv 0.$$

由于

$$g'_u(\rho(v_2,v_3))+f'_u(\rho(v_2,v_3),v_2,v_3)<g'_u(\rho)+f'_u(\rho,1,1)=B'(\rho)\leqslant 0,$$

因此,

$$\begin{cases}g'_u(\rho(v_2,v_3))\cdot\rho'_{v_2}(v_2,v_3)+f'_u(\rho(v_2,v_3),v_2,v_3)\cdot\rho'_{v_2}(v_2,v_3)+f'_{v_2}(\rho(v_2,v_3),v_2,v_3)\equiv 0,\\ g'_u(\rho(v_2,v_3))\cdot\rho'_{v_3}(v_2,v_3)+f'_u(\rho(v_2,v_3),v_2,v_3)\cdot\rho'_{v_3}(v_2,v_3)+f'_{v_3}(\rho(v_2,v_3),v_2,v_3)\equiv 0.\end{cases}$$

由递归法得知 $\rho(v_2,v_3)\in C^\infty([0,1)^2)$, 这意味着 ρ'_{v_2} 和 ρ'_{v_3} 在 $[0,1)^2$ 上是有定义的.

接下来证明 (2.5). 假设

$$\rho(\boldsymbol{v})=\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}_+^N}\rho_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{k}}.$$

将上述 $\rho(\boldsymbol{v})$ 的表达式代入 (2.4), 可得

$$\begin{aligned}0&\equiv\bar{B}_{\mathbb{N}}(\rho(\boldsymbol{v}))+B_{\mathbb{N}}(\rho(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{v})\\&=\sum_{j\in\mathbb{N}^c}b_j(\rho(\boldsymbol{v}))^j+\sum_{j\in\mathbb{N}}b_j(\rho(\boldsymbol{v}))^jv_j\\&=\sum_{j\in\mathbb{N}^c}b_j\sum_{\boldsymbol{l}\geqslant\boldsymbol{0}}\rho_{\boldsymbol{l}}^{*(j)}\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{l}}+\sum_{j\in\mathbb{N}}b_j\sum_{\boldsymbol{l}\geqslant\boldsymbol{0}}\rho_{\boldsymbol{l}}^{*(j)}\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{l}+\boldsymbol{e}_j}\\&=\sum_{\boldsymbol{l}\geqslant\boldsymbol{0}}\left(\sum_{j\in\mathbb{N}^c}b_j\rho_{\boldsymbol{l}}^{*(j)}\right)\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{l}}+\sum_{j\in\mathbb{N}}b_j\sum_{\boldsymbol{l}\geqslant\boldsymbol{0}}\rho_{\boldsymbol{l}}^{*(j)}\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{l}+\boldsymbol{e}_j}.\end{aligned}$$

用数学归纳法证明 $\rho_{\boldsymbol{l}}\geqslant 0$. 因为 $\bar{B}_{\mathbb{N}}(u)+B_{\mathbb{N}}(u,\boldsymbol{0})=0$ 的最小非负根是 $\rho_{\boldsymbol{0}}$, 若 $\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{1}=0$, 则 $\rho_{\boldsymbol{0}}=\rho(\boldsymbol{0})\geqslant 0$. 若 $\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{1}=1$, 即存在某个 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_k$, 则

$$\sum_{j\in\mathbb{N}^c}b_j\rho_{\boldsymbol{e}_k}^{*(j)}+b_k\rho_{\boldsymbol{0}}^{*(k)}=0,$$

即

$$\sum_{j\in\mathbb{N}^c}b_jj\rho_{\boldsymbol{0}}^{j-1}\rho_{\boldsymbol{e}_k}+b_k\rho_{\boldsymbol{0}}^k=0.$$

由于 $\bar{B}'_{\mathbb{N}}(\rho_{\boldsymbol{0}})<0$, 因此,

$$\rho_{\boldsymbol{e}_k}=-\frac{b_k\rho_{\boldsymbol{0}}^k}{\bar{B}'_{\mathbb{N}}(\rho_{\boldsymbol{0}})}\geqslant 0,\quad k\in\mathbb{N}.$$

假设对所有满足 $\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{1}\leqslant m$ 的 $\boldsymbol{l}$, 有 $\rho_{\boldsymbol{l}}\geqslant 0$, 则对于 $\bar{\boldsymbol{l}}\cdot\boldsymbol{1}=m+1$, 存在 $\boldsymbol{l}$ 和 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $\bar{\boldsymbol{l}}=\boldsymbol{l}+\boldsymbol{e}_k$ 且 $\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{1}\leqslant m$. 因此,

$$\sum_{j\in\mathbb{N}^c}b_j\rho_{\boldsymbol{l}+\boldsymbol{e}_k}^{*(j)}+b_k\rho_{\boldsymbol{l}}^{*(k)}=0,$$

即

$$\sum_{j\in\mathbb{N}^c}b_jj\rho_{\boldsymbol{0}}^{j-1}\rho_{\boldsymbol{l}+\boldsymbol{e}_k}+\sum_{j\in\mathbb{N}^c\setminus\{1\}}b_j\sum_{\boldsymbol{l}^{(1)}+\cdots+\boldsymbol{l}^{(j)}=\boldsymbol{l}+\boldsymbol{e}_k,\ \boldsymbol{l}^{(1)}\cdot\boldsymbol{1},\ldots,\boldsymbol{l}^{(j)}\cdot\boldsymbol{1}\leqslant m}\rho_{\boldsymbol{l}^{(1)}}\cdots\rho_{\boldsymbol{l}^{(j)}}+b_k\rho_{\boldsymbol{l}}^{*(k)}=0.$$

因此, 由 $\bar{B}'_{\mathbb{N}}(\rho_{\boldsymbol{0}})<0$, 有

$$\rho_{\bar{\boldsymbol{l}}}=\rho_{\boldsymbol{l}+\boldsymbol{e}_k}=-\frac{\sum_{j\in\mathbb{N}^c\setminus\{1\}}b_j\sum_{\boldsymbol{l}^{(1)}+\cdots+\boldsymbol{l}^{(j)}=\boldsymbol{l}+\boldsymbol{e}_k,\ \boldsymbol{l}^{(1)}\cdot\boldsymbol{1},\ldots,\boldsymbol{l}^{(j)}\cdot\boldsymbol{1}\leqslant m}\rho_{\boldsymbol{l}^{(1)}}\cdots\rho_{\boldsymbol{l}^{(j)}}+b_k\rho_{\boldsymbol{l}}^{*(k)}}{\bar{B}'_{\mathbb{N}}(\rho_{\boldsymbol{0}})}\geqslant 0.$$

由数学归纳法, 得到 $\rho_{\boldsymbol{l}}\geqslant 0$, $\forall\,\boldsymbol{l}\in\mathbb{Z}_+^N$. 证毕. $\square$

3 上穿、下穿性质

现在考虑加权 Markov 分支过程的上穿、下穿性质. 令 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_+$ 如前所述.

本文的主要目的是计算 $(\mathbb{N}-1)$- 程穿越次数. 然而, 加权 Markov 分枝过程的转移概率函数本身并不能直接刻画这种穿越次数. 因此, 需要找到一个新方法来讨论其穿越次数的性质. 为此, 构造一个新的 Q 矩阵 $\tilde{Q} = (q_{(i,\boldsymbol{k}),(j,\boldsymbol{l})}; (i,\boldsymbol{k}),(j,\boldsymbol{l}) \in \mathbb{Z}_+^{N+1})$:

$$q_{(i,\boldsymbol{k}),(j,\boldsymbol{l})} = \begin{cases} w_i b_{j-i+1}, & \text{若 } i \geqslant 1, \quad j-i+1 \in \mathbb{N}^c, \quad \boldsymbol{l} = \boldsymbol{k}, \\ w_i b_{j-i+1}, & \text{若 } i \geqslant 1, \quad j-i+1 \in \mathbb{N}, \quad \boldsymbol{l} = \boldsymbol{k} + \boldsymbol{e}_{j-i+1}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{3.1}$$

显然, $\tilde{Q}$ 确定一个 $(N+1)$- 程 Markov 链 $(X(t), \boldsymbol{Y}(t))$, 其中 $X(t)$ 是加权 Markov 分支过程, $\boldsymbol{Y}(t) = (Y_k(t); k \in \mathbb{N})$ (假设 $Y_k(0) = 0$ $(k \in \mathbb{N})$) 是计算到 t 时刻的 $(\mathbb{N}-1)$- 程穿越次数. 特别地,

(i) 若 $\mathbb{N} = \{0\}$, 则 $Y_0(t)$ 是 $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ 在 t 时刻前的下穿次数 (即死亡数);

(ii) 若 $\mathbb{N} = \{m\}$ $(m \geqslant 2)$, 则 $Y_m(t)$ 是 $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ 在 t 时刻前的 $(m-1)$- 程上穿次数;

(iii) 若 $\mathbb{N} = \{0, m\}$ $(m \geqslant 2)$, 则 $\boldsymbol{Y}(t) = (Y_0(t), Y_m(t))$ 是 $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ 在 t 时刻前的死亡数和 $(m-1)$- 程下穿数.

令 $P(t) = (p_{(i,\boldsymbol{k}),(j,\boldsymbol{l})}(t); (i,\boldsymbol{k}),(j,\boldsymbol{l}) \in \mathbb{Z}_+^{N+1})$ 记为 $(X(t), \boldsymbol{Y}(t))$ 的转移概率函数.

引理 3.1 对于 $P(t)$, 有

$$\sum_{(j,\boldsymbol{l}) \in \mathbb{Z}_+^{N+1}} p'_{(i,\boldsymbol{0}),(j,\boldsymbol{l})}(t) u^j \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{l}} = [\bar{B}_{\mathbb{N}}(u) + B_{\mathbb{N}}(u, \boldsymbol{v})] \cdot \sum_{j \geqslant 1, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}_+^N} p_{(i,\boldsymbol{0}),(j,\boldsymbol{k})}(t) w_j u^{j-1} \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{k}}, \tag{3.2}$$

其中 $\bar{B}_{\mathbb{N}}(u)$ 和 $B_{\mathbb{N}}(u, \boldsymbol{v})$ 如 (2.2) 定义, $\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{l}} = \prod_{k \in \mathbb{N}} v_k^{l_k}$, 且

$$\begin{aligned} &\sum_{(j,\boldsymbol{l}) \in \mathbb{Z}_+^{N+1}} p_{(i,\boldsymbol{0}),(j,\boldsymbol{l})}(t) u^j \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{l}} - u^i \\ &\quad = [\bar{B}_{\mathbb{N}}(u) + B_{\mathbb{N}}(u, \boldsymbol{v})] \cdot \sum_{j \geqslant 1, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}_+^N} \left(\int_0^t p_{(i,\boldsymbol{0}),(j,\boldsymbol{k})}(s) ds \right) \cdot w_j u^{j-1} \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{k}}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

证明 由 Kolmogorov 向前方程得

$$p'_{(i,\boldsymbol{0}),(j,\boldsymbol{l})}(t) = \sum_{n \geqslant 1, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}_+^N} p_{(i,\boldsymbol{0}),(n,\boldsymbol{k})}(t) \cdot q_{(n,\boldsymbol{k}),(j,\boldsymbol{l})}, \quad \forall t \geqslant 0, \quad i \in \mathbb{Z}_+.$$

将上式两边同时乘以 $u^j \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{l}}$ 然后对 j 和 $\boldsymbol{l}$ 求和, 可得

$$\begin{aligned} &\sum_{(j,\boldsymbol{l}) \in \mathbb{Z}_+^{N+1}} p'_{(i,\boldsymbol{0}),(j,\boldsymbol{l})}(t) \cdot u^j \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{l}} \\ &= \sum_{(j,\boldsymbol{l}) \in \mathbb{Z}_+^{N+1}} \sum_{n \geqslant 1, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}_+^N} p_{(i,\boldsymbol{0}),(n,\boldsymbol{k})}(t) \cdot q_{(n,\boldsymbol{k}),(j,\boldsymbol{l})} \cdot u^j \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{l}} \\ &= \sum_{n \geqslant 1, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}_+^N} \sum_{(j,\boldsymbol{l}) \in \mathbb{Z}_+^{N+1}} p_{(i,\boldsymbol{0}),(n,\boldsymbol{k})}(t) \cdot q_{(n,\boldsymbol{k}),(j,\boldsymbol{l})} \cdot u^j \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{l}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n\geqslant 1,\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}_+^N} \Bigg[\sum_{j:j-n+1\in\mathbb{N}} p_{(i,\mathbf{0}),(n,\boldsymbol{k})}(t)\cdot q_{(n,\boldsymbol{k}),(j,\boldsymbol{k}+\boldsymbol{e}_{j-n+1})}\cdot u^j \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{e}_{j-n+1}} \\
&\quad + \sum_{j:j-n+1\in\mathbb{N}^c} p_{(i,\mathbf{0}),(n,\boldsymbol{k})}(t)\cdot q_{(n,\boldsymbol{k}),(j,\boldsymbol{k})}\cdot u^j \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{k}} \Bigg] \\
&= \sum_{n\geqslant 1,\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}_+^N} \Bigg[\sum_{j:j-n+1\in\mathbb{N}} p_{(i,\mathbf{0}),(n,\boldsymbol{k})}(t)\cdot w_n b_{j-n+1}\cdot u^j \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{e}_{j-n+1}} \\
&\quad + \sum_{j:j-n+1\in\mathbb{N}^c} p_{(i,\mathbf{0}),(n,\boldsymbol{k})}(t)\cdot w_n b_{j-n+1}\cdot u^j \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{k}} \Bigg] \\
&= \sum_{n\geqslant 1,\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}_+^N} [B_{\mathbb{N}}(u,\boldsymbol{v})\cdot p_{(i,\mathbf{0}),(n,\boldsymbol{k})}(t)\cdot w_n u^{n-1}\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{k}} + \bar{B}_{\mathbb{N}}(u)\cdot p_{(i,\mathbf{0}),(n,\boldsymbol{k})}(t)\cdot w_n u^{n-1}\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{k}}] \\
&= [\bar{B}_{\mathbb{N}}(u) + B_{\mathbb{N}}(u,\boldsymbol{v})]\cdot \sum_{j\geqslant 1,\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}_+^N} p_{(i,\mathbf{0}),(j,\boldsymbol{k})}(t)\cdot w_j u^{j-1}\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{k}}.
\end{aligned}
$$

(3.2) 得证. 由 (3.2) 积分立得 (3.3). 证毕. □

令

$$
\tau = \inf\{t \geqslant 0; X(t) = 0\} \tag{3.4}
$$

为 $\{X(t); t \geqslant 0\}$ 的灭绝时间.

下面的定理给出了在 $\tau < \infty$ 的条件下, $(\mathbb{N}-1)$- 程穿越次数的联合概率分布函数.

定理 3.1 假设 $\{X(t); t \geqslant 0\}$ 是一个加权 Markov 分枝过程, 其中 $X(0) = 1$, 则在 $\tau < \infty$ 的情形下, $(\mathbb{N}-1)$- 程穿越次数的概率分布函数如下:

$$
G(\boldsymbol{v}) = \rho^{-1} \sum_{\boldsymbol{l}\in\mathbb{Z}_+^N} \rho_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{l}}, \quad \boldsymbol{v} \in [0,1]^N, \tag{3.5}
$$

其中 ρ 是 $B(u) = 0$ 的最小非负根, $\rho_{\mathbf{0}}$ 是 $\bar{B}_{\mathbb{N}}(u) = 0$ 的最小非负根, 且 $\rho_{\boldsymbol{l}}$ $(\boldsymbol{l} \neq \mathbf{0})$ 可如下递归得到:

$$
\rho_{\boldsymbol{l}+\boldsymbol{e}_k} = -\frac{\sum_{j\in\mathbb{N}^c\setminus\{1\}} b_j \sum_{\boldsymbol{l}^{(1)}+\cdots+\boldsymbol{l}^{(j)}=\boldsymbol{l}+\boldsymbol{e}_k,\ \boldsymbol{l}^{(1)}\cdot\mathbf{1},\ldots,\boldsymbol{l}^{(j)}\cdot\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{l}\cdot\mathbf{1}} \rho_{\mathbf{l}^{(1)}}\cdots\rho_{\boldsymbol{l}^{(j)}} + b_k \rho_{\boldsymbol{l}}^{*(k)}}{\bar{B}'_{\mathbb{N}}(\rho_{\mathbf{0}})}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.6}
$$

证明 令 $\tilde{Q} = (q_{(i,\boldsymbol{k}),(j,\boldsymbol{l})}; (i,\boldsymbol{k}),(j,\boldsymbol{l}) \in \mathbb{Z}_+^{N+1})$ 为由 (3.1) 定义的 Q 矩阵而且 $(X(t),\boldsymbol{Y}(t))$ 为 $\tilde{Q}$ 过程, 则 $\boldsymbol{Y}(t) = (Y_k(t); k \in \mathbb{N})$ 为 t 时刻之前的 $(\mathbb{N}-1)$- 程穿越次数, 且在 $\tau < \infty$ 的条件下, $\boldsymbol{Y}(\tau) = (Y_k(\tau); k \in \mathbb{N})$ 就是 $(\mathbb{N}-1)$- 程穿越总次数.

记 $P(t) = (p_{(i,\boldsymbol{k}),(j,\boldsymbol{l})}(t); (i,\boldsymbol{k}),(j,\boldsymbol{l}) \in \mathbb{Z}_+^{N+1})$ 为 $(X(t),\boldsymbol{Y}(t))$ 的转移概率. 由引理 3.1 可得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{(j,\boldsymbol{l})\in\mathbb{Z}_+^{N+1}} p_{(1,\mathbf{0}),(j,\boldsymbol{l})}(t)\cdot u^j \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{l}} - u \\
&\quad = [\bar{B}_{\mathbb{N}}(u) + B_{\mathbb{N}}(u,\boldsymbol{v})]\cdot \sum_{j\geqslant 1,\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}_+^N} \left(\int_0^t p_{(1,\mathbf{0}),(j,\boldsymbol{k})}(s)ds\right)\cdot w_j u^{j-1}\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{k}}.
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

在 (3.7) 中令 $t \to \infty$, 并注意到对于 $j \geqslant 1$, $\lim_{t\to\infty} p_{(1,\mathbf{0}),(j,\boldsymbol{l})}(t) = 0$ (由于当 $j \geqslant 1$ 时, $(j,\boldsymbol{l})$ 是瞬时状态), 得到

$$
\sum_{\boldsymbol{l}\in\mathbb{Z}_+^N} a_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{l}} - u = [\bar{B}_{\mathbb{N}}(u) + B_{\mathbb{N}}(u,\boldsymbol{v})]\cdot \sum_{j\geqslant 1,\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}_+^N} \left(\int_0^\infty p_{(1,\mathbf{0}),(j,\boldsymbol{k})}(t)dt\right)\cdot w_j u^{j-1}\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{k}}, \tag{3.8}
$$

其中 $a_{\boldsymbol{l}}=\lim_{t\to\infty}p_{(1,\mathbf{0}),(0,\boldsymbol{l})}(t)$. 由定理 2.1, 在 (3.8) 中令 $u=\rho(\boldsymbol{v})$, 得到

$$\sum_{\boldsymbol{l}\in\mathbb{Z}_+^N}a_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{l}}-\rho(\boldsymbol{v})\equiv 0,$$

因此, $a_{\boldsymbol{l}}=\rho_{\boldsymbol{l}}$ ($\boldsymbol{l}\in\mathbb{Z}_+^N$).

从而,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\boldsymbol{Y}(\tau)=\boldsymbol{l}\mid\tau<\infty)&=\frac{\mathrm{P}(\boldsymbol{Y}(\tau)=\boldsymbol{l},\tau<\infty)}{\mathrm{P}(\tau<\infty)}\\&=\rho^{-1}\lim_{t\to\infty}\mathrm{P}(\boldsymbol{Y}(t)=\boldsymbol{l},\tau<t)\\&=\rho^{-1}\lim_{t\to\infty}p_{(1,\mathbf{0}),(0,\boldsymbol{l})}(t)\\&=\rho^{-1}\rho_{\boldsymbol{l}}.\end{aligned}$$

证毕. □

注 3.1　定理 3.1 给出了在 $\tau<\infty$ 的条件下, $(\mathbb{N}-1)$- 程穿越次数的联合概率母函数. 因此, 在 $\tau<\infty$ 的条件下, $(\mathbb{N}-1)$- 程穿越次数 $\boldsymbol{Y}(\tau)$ 的联合概率分布为

$$\mathrm{P}(\boldsymbol{Y}(\tau)=\boldsymbol{l}\mid\tau<\infty)=\rho^{-1}\rho_{\boldsymbol{l}},\quad \boldsymbol{l}\in\mathbb{Z}_+^N.$$

若 $X(0)=i$ (>1), 则在 $\tau<\infty$ 的条件下, $(\mathbb{N}-1)$- 程穿越次数的联合概率母函数为

$$G_i(\boldsymbol{v})=[G(\boldsymbol{v})]^i,$$

而且在 $\tau<\infty$ 的条件下, $(\mathbb{N}-1)$- 程穿越次数 $\boldsymbol{Y}(\tau)$ 的联合概率分布为

$$\mathrm{P}(\boldsymbol{Y}(\tau)=\boldsymbol{l}\mid\tau<\infty)=\rho^{-i}\cdot\rho_{\boldsymbol{l}}^{*(i)},\quad \boldsymbol{l}\in\mathbb{Z}_+^N,$$

其中 $\{\rho_{\boldsymbol{l}}^{*(i)};\boldsymbol{l}\in\mathbb{Z}_+^N\}$ 是 $\{\rho_{\boldsymbol{l}};\boldsymbol{l}\in\mathbb{Z}_+^N\}$ 的 i 重卷积.

作为定理 3.1 和注 3.1 的直接结论, 下面推论给出了在 $\tau<\infty$ 的条件下, 死亡数的概率分布以及对于固定 $m>1$, $(m-1)$- 程上穿次数的概率分布.

推论 3.1　假设 $\{X(t);t\geqslant 0\}$ 是一个加权 Markov 分枝过程, $X(0)=1$, 则在 $\tau<\infty$ 的条件下, 死亡数的概率生成函数为

$$G(v)=\rho^{-1}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k v^k.$$

因此, 死亡数 $Y_0(\tau)$ 的概率分布为

$$\mathrm{P}(Y_0(\tau)=k\mid\tau<\infty)=\rho^{-1}\cdot\rho_k,\quad k\geqslant 0,$$

其中

$$\begin{cases}\rho_0=0,\\ \rho_1=-b_1^{-1}\cdot b_0,\\ \rho_{k+1}=-b_1^{-1}\cdot\displaystyle\sum_{j=2}^{k+1}b_j\rho_{k+1}^{*(j)},\quad k\geqslant 1.\end{cases}$$

证明 注意到 $\mathbb{N}=\{0\}$, $\rho_0=0$ 是

$$\bar{B}_{\mathbb{N}}(u)=\sum_{j=1}^{\infty}b_j u^j=0$$

的最小非负根, 而且

$$\sum_{j=2}^{\infty}b_j\sum_{l_1+\cdots+l_j=k+1,l_1,\ldots,l_j\leqslant k}\rho_{l_1}\cdots\rho_{l_j}=\sum_{j=2}^{k+1}b_j\rho_{k+1}^{*(j)}.$$

由定理 3.1 立得结论. 证毕. □

注 3.2 从定理 3.1 的证明可知在 $\tau<\infty$ 的情形下穿越次数的联合概率分布不依赖于 $\{w_i;\ i\geqslant 1\}$, 因此,

(i) 对于 Markov 分枝过程, 在 $\tau<\infty$ 的情形下, 死亡数 $Y_0(\tau)$ 的概率分布为

$$\mathrm{P}(Y_0(\tau)=k\mid\tau<\infty)=\rho^{-1}\cdot\rho_k,\quad k\geqslant 0,$$

其中 ρ_k $(k\geqslant 0)$ 由推论 3.1 给出;

(ii) 对于 $M^X/M/1$ 排队过程, 一个忙期的服务总数 $Y_0(\tau)$ 的概率分布为

$$\mathrm{P}(Y_0(\tau)=k\mid\tau<\infty)=\rho^{-1}\cdot\rho_k,\quad k\geqslant 0,$$

其中 ρ_k $(k\geqslant 0)$ 由推论 3.1 给出.

推论 3.2 假设 $\{X(t);t\geqslant 0\}$ 是一个加权 Markov 分枝过程, $X(0)=1$, 且 m (>1) 是给定的整数, 则在 $\tau<\infty$ 的条件下, $(m-1)$- 程上穿次数的概率母函数 $G(v)$ 为

$$G(v)=\rho^{-1}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k v^k.$$

因此在 $\tau<\infty$ 的情形下, $(m-1)$- 程上穿次数 $Y_m(\tau)$ 的概率分布为

$$\mathrm{P}(Y_m(\tau)=k\mid\tau<\infty)=\rho^{-1}\cdot\rho_k,\quad k\geqslant 0,$$

其中 ρ_0 是 $B_m(u)=\sum_{j\neq m}b_j u^j=0$ 的最小非负根, 且

$$\begin{cases}\rho_1=-\dfrac{b_m\rho_0^m}{B_m'(\rho_0)},\\ \rho_{k+1}=-\dfrac{\sum_{i\neq 1,m}b_i\sum_{j_1+\cdots+j_i=k+1;\ j_1,\ldots,j_i\leqslant k}\rho_{j_1}\cdots\rho_{j_i}+b_m\rho_k^{*(m)}}{B_m'(\rho_0)},\quad k\geqslant 1,\end{cases}$$

这里 $\{\rho_k^{*(m)};k\in\mathbb{Z}_+\}$ 是 $\{\rho_k;\ k\in\mathbb{Z}_+\}$ 的 m 重卷积.

证明 注意到此时 $\mathbb{N}=\{m\}$, 由定理 3.1 立得. □

定理 3.2 假设 $\{X(t);t\geqslant 0\}$ 是一个加权 Markov 分枝过程, $X(0)=1$, $m\neq 1$, $Y_m(\tau)$ 是 $(m-1)$- 程穿越次数. 若 $\rho=1$ (即 $B'(1)\leqslant 0$), 则

$$\mathrm{E}[Y_m(\tau)]=\sum_{k=0}^{\infty}k\rho_k,$$

且

$$\mathrm{Var}[Y_m(\tau)] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\rho_k - \bigg(\sum_{k=0}^{\infty} k\rho_k\bigg)^2,$$

其中 ρ_k ($k \geqslant 0$) 由推论 3.1 (若 $m=0$) 或推论 3.2 (若 $m>1$) 给出.

证明 由 $\rho=1$ 可知 $G(v)$ 是 $Y_m(\tau)$ 的概率母函数, 因此,

$$\mathrm{E}[Y_m(\tau)] = G'(1^-), \quad \mathrm{Var}[Y_m(\tau)] = G''(1^-) + G'(1^-) - [G'(1^-)]^2.$$

由推论 3.1 和 3.2 立得. 证毕. □

定理 3.1 给出了在 $\tau<\infty$ 的情形下, $(\mathbb{N}-1)$- 程穿越次数的联合概率分布. 现在考虑 $\tau=\infty$ 的情形. 为简单起见, 仅考虑 $\mathbb{N}$ 单点集的情形, 一般情形类似.

令 $m\in\mathbb{Z}_+$ 且 $b_m>0$, $\tilde{Q}_m=(q_{(i,k),(j,l)};(i,k),(j,l)\in\mathbb{Z}_+^2)$ 为由 (3.1) 定义的 Q 矩阵, 其中 $\mathbb{N}=\{m\}$. 记 $(X(t),Y_m(t))$ 是 $\tilde{Q}_m$ 过程, $P(t)=(p_{(i,k),(j,l)};(i,k),(j,l)\in\mathbb{Z}_+^2)$ 为其转移概率函数.

定理 3.3 假设 $(X(t),Y_m(t))$ 是 $\tilde{Q}_m$ 过程, $X(0)=1$. 若 $\rho<1$, 则

$$\mathrm{P}(Y_m(\infty)=\infty \mid \tau=\infty)=1. \tag{3.9}$$

证明 由引理 3.1 (注意 $\mathbb{N}=\{m\}$) 可得, 对任意 $u,v\in[0,1]$, 有

$$\sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}_+^2} p_{(1,0),(j,k)}(t)\cdot u^jv^k - u = B_m(u,v)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\bigg(\int_0^t p_{(1,0),(j,k)}(s)ds\bigg)\cdot w_ju^{j-1}v^k,$$

其中

$$B_m(u,v)=\sum_{i\neq m} b_iu^i + b_mu^mv,$$

即

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty} p_{(1,0),(0,k)}(t)\cdot v^k + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{(1,0),(j,k)}(t)\cdot u^jv^k - u\\ &= B_m(u,v)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\bigg(\int_0^t p_{(1,0),(j,k)}(s)ds\bigg)\cdot w_ju^{j-1}v^k.\end{aligned} \tag{3.10}$$

令 $t\to\infty$ 并注意到

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty} p_{(1,0),(0,k)}(t)v^k=\rho(v),$$

可得

$$\rho(v)-u = B_m(u,v)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\bigg(\int_0^{\infty} p_{(1,0),(j,k)}(s)ds\bigg)\cdot w_ju^{j-1}v^k, \quad \forall\, u,v\in[0,1),$$

其中对固定的 $v\in[0,1]$, $\rho(v)$ 是 $B_m(u,v)=0$ 的最小非负根. 令 $u\uparrow 1$, 由单调收敛定理得

$$1-\rho(v) = b_m(1-v)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\bigg(\int_0^{\infty} p_{(1,0),(j,k)}(s)ds\bigg)\cdot w_jv^k, \quad \forall\, v\in[0,1).$$

从而,

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\int_0^{\infty}p_{(1,0),(j,k)}(s)ds\right)\cdot w_j=b_m^{-1}\cdot\left(1-\sum_{i=0}^{k}\rho_i\right),\quad k\geqslant 0,\tag{3.11}$$

以及

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\int_0^{\infty}p_{(1,0),(j,k)}(s)ds\right)\cdot w_jv^k<\infty,\quad \forall\, v\in[0,1).$$

另一方面, 在 (3.10) 中令 $u\uparrow 1$, 得

$$\begin{aligned}1-\sum_{k=0}^{\infty}p_{(1,0),(0,k)}(t)\cdot v^k-\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{P}(Y_m(t)=k,\tau>t)v^k\\ =b_m(1-v)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\int_0^{t}p_{(1,0),(j,k)}(s)ds\right)\cdot w_jv^k.\end{aligned}$$

因此,

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\int_0^{t}p_{(1,0),(j,k)}(s)ds\right)\cdot w_j=b_m^{-1}\cdot\left[1-\sum_{i=0}^{k}p_{(1,0),(0,i)}(t)-\mathrm{P}(Y_m(t)\leqslant k,\tau>t)\right],\quad k\geqslant 0.$$

令 $t\to\infty$ 并由单调收敛定理得

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\int_0^{\infty}p_{(1,0),(j,k)}(s)ds\right)\cdot w_j=b_m^{-1}\cdot\left[1-\sum_{i=0}^{k}\rho_i-\mathrm{P}(Y_m(\infty)\leqslant k,\tau=\infty)\right],\quad k\geqslant 0.$$

比较上式与 (3.11), 可得

$$\mathrm{P}(Y_m(\infty)\leqslant k,\tau=\infty)=0,\quad k\geqslant 0.$$

因此,

$$\mathrm{P}(Y_m(\infty)=\infty,\tau=\infty)=1.$$

证毕. □

最后, 给出两个例子说明前面的结论.

例 3.1 设 $X(t)$ 是一个到达率为 λ、服务率为 μ 的停止 $M/M/1$ 排队过程 (或一个生率为 λ、死亡率为 μ 的生灭型分枝过程), $X(0)=1$. 考虑一个忙期内服务的顾客数和到达顾客数. 此时,

$$B(u)=\mu-(\mu+\lambda)u+\lambda u^2,\quad \mathbb{N}=\{0,2\}.$$

则

$$B_{\mathbb{N}}(u,y,z)=\mu y+\lambda zu^2,\quad \bar{B}_{\mathbb{N}}(u)=-(\mu+\lambda)u.$$

考虑

$$\bar{B}_{\mathbb{N}}(u)+B_{\mathbb{N}}(u,y,z)=\mu y-(\mu+\lambda)u+\lambda zu^2=0.\tag{3.12}$$

(3.12) 的最小非负根是

$$\rho(y,z)=\frac{\mu+\lambda-\sqrt{(\mu+\lambda)^2-4\mu\lambda zy}}{2\lambda z},\quad \rho=\rho(1,1)=\frac{\mu}{\lambda}\wedge 1.$$

利用 Taylor 展开式

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{2^n n!}(-1)^{n-1}x^n,$$

可得

$$\begin{aligned}\rho(y,z)&=\frac{\mu+\lambda}{2\lambda z}\cdot\left[1-\sqrt{1-\frac{4\mu\lambda zy}{(\mu+\lambda)^2}}\right]\\&=\frac{\mu+\lambda}{2\lambda z}\cdot\left[1-\left(1-\frac{4\mu\lambda zy}{2(\mu+\lambda)^2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{2^n n!}(-1)^{n-1}\left(-\frac{4\mu\lambda zy}{(\mu+\lambda)^2}\right)^n\right)\right]\\&=\frac{\mu+\lambda}{2\lambda z}\cdot\left[\frac{4\mu\lambda zy}{2(\mu+\lambda)^2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{2^n n!}\left(\frac{4\mu\lambda zy}{(\mu+\lambda)^2}\right)^n\right]\\&=\frac{\mu y}{\mu+\lambda}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!2^{n-1}\mu^n\lambda^{n-1}}{n!(\mu+\lambda)^{2n-1}}z^{n-1}y^n.\end{aligned}$$

所以,

$$\begin{cases}\rho_{1,0}=\dfrac{\mu}{\mu+\lambda},\\ \rho_{n,n-1}=\dfrac{(2n-3)!!2^{n-1}\mu^n\lambda^{n-1}}{n!(\mu+\lambda)^{2n-1}}, & n\geqslant 2,\\ \rho_{n,m}=0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因此,

(i) 若 $\mu\geqslant\lambda$, 则

$$\begin{cases}\mathrm{P}((Y_0(\tau),Y_2(\tau))=(1,0))=\dfrac{\mu}{\mu+\lambda},\\ \mathrm{P}((Y_0(\tau),Y_2(\tau))=(n,n-1))=\dfrac{(2n-3)!!2^{n-1}\mu^n\lambda^{n-1}}{n!(\mu+\lambda)^{2n-1}}, & n\geqslant 2,\\ \mathrm{P}((Y_0(\tau),Y_2(\tau))=(n,m))=0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathrm{P}(Y_0(\tau)=0)=0,\\ \mathrm{P}(Y_0(\tau)=1)=\dfrac{\mu}{\mu+\lambda},\\ \mathrm{P}(Y_0(\tau)=n)=\dfrac{(2n-3)!!2^{n-1}\mu^n\lambda^{n-1}}{n!(\mu+\lambda)^{2n-1}}, & n\geqslant 2,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathrm{P}(Y_2(\tau)=0)=\dfrac{\mu}{\mu+\lambda},\\ \mathrm{P}(Y_2(\tau)=n)=\dfrac{(2n-1)!!2^n\mu^{n+1}\lambda^n}{(n+1)!(\mu+\lambda)^{2n+1}}, & n\geqslant 1;\end{cases}$$

(ii) 若 $\mu < \lambda$, 则

$$\begin{cases} \mathrm{P}((Y_0(\tau),Y_2(\tau))=(1,0)\mid \tau<\infty)=\dfrac{\lambda}{\mu+\lambda}, \\ \mathrm{P}((Y_0(\tau),Y_2(\tau))=(n,n-1)\mid \tau<\infty)=\dfrac{(2n-3)!!2^{n-1}\mu^{n-1}\lambda^n}{n!(\mu+\lambda)^{2n-1}}, \quad n\geqslant 2, \\ \mathrm{P}((Y_0(\tau),Y_2(\tau))=(n,m)\mid \tau<\infty)=0, \qquad \text{其他}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{P}(Y_0(\tau)=0\mid \tau<\infty)=0, \\ \mathrm{P}(Y_0(\tau)=1\mid \tau<\infty)=\dfrac{\lambda}{\mu+\lambda}, \\ \mathrm{P}(Y_0(\tau)=n\mid \tau<\infty)=\dfrac{(2n-3)!!2^{n-1}\mu^{n-1}\lambda^n}{n!(\mu+\lambda)^{2n-1}}, \quad n\geqslant 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{P}(Y_2(\tau)=0\mid \tau<\infty)=\dfrac{\lambda}{\mu+\lambda}, \\ \mathrm{P}(Y_2(\tau)=n\mid \tau<\infty)=\dfrac{(2n-1)!!2^{n}\mu^{n}\lambda^{n+1}}{(n+1)!(\mu+\lambda)^{2n+1}}, \quad n\geqslant 1. \end{cases}$$

例 3.2 设 $X(t)$ 是一个分枝过程, 其分枝速率的生成函数为

$$B(u)=2q-3pu+u^3,$$

其中 $q>0$, $3p=2q+1$, $X(0)=1$. 考虑系统灭绝前上穿、下穿次数. 此时, $\mathbb{N}=\{0,3\}$,

$$B(u,v)=2qv-3pu+u^3. \tag{3.13}$$

对固定的 $v\in[0,1]$, 记 $\rho(v)$ 为 (3.13) 的最小非负根. 显然, $\rho(0)=0$. 假设

$$\rho(v)=\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k v^k,$$

则

$$2qv-3p\rho(v)+\rho^3(v)\equiv 0, \quad v\in[0,1). \tag{3.14}$$

易知

$$\rho_1=\frac{2q}{3p}, \quad \rho_2=0. \tag{3.15}$$

由 (3.14) 可得

$$-p\rho^{(n+1)}(v)+\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\sum_{i=0}^{k}C_k^i\rho^{(i)}(v)\rho^{(k-i)}(v)\right)\rho^{(n-k+1)}(v)\equiv 0, \quad n\geqslant 2.$$

在上式中令 $v=0$, 可得

$$p(n+1)!\rho_{n+1}=\sum_{k=2}^{n}C_n^k\left(\sum_{i=1}^{k-1}C_k^i i!(k-i)!\rho_i\rho_{k-i}\right)(n-k+1)!\rho_{n-k+1}, \quad n\geqslant 2,$$

即

$$\rho_{n+1} = \frac{1}{p(n+1)} \cdot \sum_{k=2}^{n} (n-k+1)\rho_{n-k+1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k-1} \rho_i \rho_{k-i} \right), \quad n \geqslant 2. \tag{3.16}$$

因此, 若 $p \geqslant 1$, 则

$$\begin{cases} \mathrm{P}(Y_0(\tau) = 0) = 0, \\ \mathrm{P}(Y_0(\tau) = 1) = \dfrac{2q}{3p}, \\ \mathrm{P}(Y_0(\tau) = 2) = 0, \\ \mathrm{P}(Y_0(\tau) = n) = \rho_n, \quad n \geqslant 3. \end{cases}$$

若 $p < 1$, 则

$$\begin{cases} \mathrm{P}(Y_0(\tau) = 0 \mid \tau < \infty) = 0, \\ \mathrm{P}(Y_0(\tau) = 1 \mid \tau < \infty) = \dfrac{2q}{3p\rho}, \\ \mathrm{P}(Y_0(\tau) = 2 \mid \tau < \infty) = 0, \\ \mathrm{P}(Y_0(\tau) = n \mid \tau < \infty) = \rho^{-1} \cdot \rho_n, \quad n \geqslant 3, \end{cases}$$

其中 $\rho = \rho(1)$ 是 $B(u) = 0$ 的最小非负根, ρ_n 由 (3.15) 和 (3.16) 给出.

致谢 感谢审稿人提出的宝贵意见.

参考文献

1. Harris T E. The Theory of Branching Processes. Berlin-New York: Springer, 1963
2. Athreya K B, Ney P E. Branching Processes. Berlin: Springer, 1972
3. Asmussen S, Hering H. Branching Processes. Boston: Birkhäuser, 1983
4. Athreya K B, Jagers P. Classical and Modern Branching Processes. Berlin: Springer, 1997
5. Sevast'yanov B A. On certain types of Markov processes (in Russian). Uspehi Mat Nauk, 1949, 4: 194
6. Vatutin V A. Asymptotic behavior of the probability of the first degeneration for branching processes with immigration (in Russian). Teor Verojatnost i Primenen, 1974, 19: 26–35
7. Li J P, Chen A Y. Markov branching processes with immigration and resurrection. Markov Process Related Fields, 2006, 12: 139–168
8. Li J P, Chen A Y, Pakes A G. Asymptotic properties of the Markov branching process with immigration. J Theoret Probab, 2012, 25: 122–143
9. Li J P, Liu Z M. Markov branching processes with immigration-migration and resurrection. Sci China Math, 2011, 54: 1043–1062
10. Yamazato M. Some results on continuous time branching processes with state-dependent immigration. J Math Soc Japan, 1975, 27: 479–496
11. Renshaw E, Chen A Y. Birth-death processes with mass annihilation and state-dependent immigration. Comm Statist Stoch Model, 1997, 13: 239–253
12. Chen A Y. Uniqueness and extinction properties of generalised Markov branching processes. J Math Anal Appl, 2002, 274: 482–494
13. Chen A Y. Ergodicity and stability of generalised Markov branching processes with resurrection. J Appl Probab, 2002, 39: 786–803
14. Chen A Y, Li J P, Ramesh N I. Uniqueness and extinction of weighted Markov branching processes. Methodol Comput Appl Probab, 2005, 7: 489–516
15. Chen A Y, Pollett P, Li J P, et al. A remark on the uniqueness of weighted Markov branching processes. J Appl Probab, 2007, 44: 279–283

16 Li J P, Chen A Y. Decay property of stopped Markovian bulk-arriving queues. Adv in Appl Probab, 2008, 40: 95–121

The down/up crossing properties of weighted Markov branching processes

Yanyun Li, Junping Li & Anyue Chen

Abstract We consider the weighted Markov branching processes which stop at state 0. The joint probability distribution of fixed range crossing numbers of such processes is obtained by using a new method. In particular, the probability distribution of the total death number is given for Markov branching process and the joint probability distributions of the total number of served customers and the total number of customers who ever entered the system are also given for bulk-arrival queueing systems.

Keywords weighted Markov branching process, down crossing, up crossing, joint probability distribution

MSC(2020) 60J27, 60J35

doi: 10.1360/SCM-2020-0182