

一种基于数学形态学的分形维数估计方法

夏 勇¹⁾ 赵荣椿¹⁾ 江泽涛^{1),2)}

¹⁾(西北工业大学计算机学院计算机信息与工程系, 西安 710072)

²⁾(南昌航空工业学院计算机系, 南昌 330029)

摘 要 对于分形维数的估计是基于分形理论的纹理图像分割算法中最重要的环节。由于使用固定划分的规则网格,常用的基于盒计数的分形维数估计算法及其各种改进方法的误差较大;而传统的形态学维数估计算法虽然在准确性上有一定提高,但其时间复杂度偏高。为此提出了一种基于可变结构元的数学形态学分形维数估计方法(VSEM)。该方法将灰度图像视为一个三维空间中的曲面,使用一组不同尺度的结构元分别度量该曲面,根据度量结果与尺度之间满足的指数率来估计图像表面的分形维数。通过恰当的选择结构元和使用递推技术得到不同尺度下的膨胀结果,新方法成功地弥补了现有算法的不足。本文使用了一组合成纹理和一组自然纹理来评估几种常见的分形维数估计算法。结果显示,本文提出的新方法能够在较小的时间复杂度下,得到更为精确的估计结果。最后,将该方法应用于遥感图像的分割。与其他常用的分形分割算法相比,使用该方法估计的分形维数和图像的临域均值作为特征能够得到更好的分割结果。在对比分析和分割实验中表现出的良好性能说明本文提出的分形维数估计算法可以有效地应用于纹理图像分割。

关键词 分形维数 图像分割 数学形态学

中图法分类号: TP391.41

文献标识码: A

文章编号: 1006-8961(2004)06-0760-07

Fractal Dimension Estimation Based on Mathematical Morphology

XIA Yong¹⁾, ZHAO Rong-chun¹⁾, JIANG Ze-tao^{1),2)}

¹⁾(Dept. of Computer Information and Engineering, Computer School, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

²⁾(Dept. of Computer, Nanchang Institute of Aeronautical Technology, Nanchang 330029)

Abstract The estimation of fractal dimension is essential in fractal-based image segmentation. The most popular estimation algorithm is based on box-counting. However, the regular partition and counting methods used in this scheme produces less accurate results. Though morphological fractal estimation is more accurate, the traditional method is very time consuming. In this paper, a new morphological fractal dimension estimation algorithm based on variable structure elements (SE) is proposed. The digitized gray level image is treated as a three-dimensional surface, which is measured under different scales by performing dilations by a series of structuring elements with different sizes on it. And the fractal dimension of it can be estimated from the power law followed by the metrics of the surface and the size of the structuring elements. By properly choosing the structure elements and constructing iterative dilations, the new method achieves better accuracy as well as efficiency. Comparative experiments on both synthetic textures and natural textures show that the proposed approach gives better results than five other commonly used estimation methods. Finally, the estimated fractal dimension and local average gray level are used as characters to segment remote sensing images, comparing with other fractal-based methods, it provides more meaningful segmentation. All these satisfied experimental results demonstrate that the proposed estimation can be successfully applied to texture segmentation.

Keywords fractal dimension, image segmentation, mathematical morphology

1 引 言

分形理论为研究自然界中不规则的复杂对象提

供了一种极好的数学手段。自然物体表面大多近似为分形体,这些表面的亮度图像也多具有分形特征。因此,该理论自 Mandelbrot^[1]于 20 世纪 60 年代提出以来已经被广泛应用于图像压缩、生成和分割的

研究中。对于纹理图像分析而言,分形维数可以很好地表征纹理的粗糙程度,并且对尺度的变化不敏感,这与人类视觉系统(HVS)有很大的相似之处^[2]。所以,分形维数常常被用作描述纹理的特征。

与常用的基于盒计数(box-counting, BC)的算法^[3~5]相比,基于数学形态学的分形维数估计算法^[6]可以得到更准确的结果。但是,传统的形态学操作计算量较大,使得这类方法难于实用。本文在分析现有图像分形维数估计算法的基础上,提出了一种基于数学形态学的分形维数估计新方法。通过选用正方体结构元,并构造不同尺度下膨胀结果的递推算法,使得计算大大简化。对比实验表明,该方法可以在较小的计算代价下得到更为精确的分形维数估计,且分割效果和时间复杂度都优于已有的分形分割算法^[7,8]。

2 分形维数的估计

对于分形维数,除了 Mandelbrot 给出的定义之外,基于不同的测度和分形构造方法,以及应用领域的差异,还有其他一些广泛应用的维数定义。但是,大多数定义都是基于“尺度 δ 下的度量”这一思想^[9]。对每个 δ ,在不考虑尺度小于 δ 的不规则集下度量一个集合 F ,观察在 $\delta \rightarrow 0$ 时这些度量的变化。 F 的维数由 $\delta \rightarrow 0$ 时度量 $M_\delta(F)$ 所服从的指数率确定。若对于常数 c 和 s ,有

$$M_\delta(F) = c\delta^{n-s} \quad (1)$$

则称 F 具有维数 s 。其中, n 是 F 的拓扑维数。对于理想的分形体,维数 s 与尺度 δ 无关。

对于灰度纹理图像而言,把二维图像视作一个三维表面,每一点处的高就是对应位置处像素的灰度值,于是图像灰度的变化情况将反映在该表面的崎岖程度上,使用不同尺度去测度该表面,得到的维数就是图像的分形维数。目前已有许多估计其分形维数的方法^[3],诸如基于灰度级共生矩阵的方法、频域方法^[2]、 ϵ -覆盖法^[10]、基于盒计数(BC)的方法^[4,5]和基于数学形态学的方法^[6]。其中,基于盒计数的方法及其各种改进不仅直观易行,而且时间复杂度较小,因而应用最为广泛。

基于盒计数的算法的基本思想就是使用不同尺度的盒子来度量图像表面,假设在尺度 δ 下至少需要 N_δ 个盒子才能完全覆盖该表面,那么图像的维数 D 满足:

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(N_\delta)}{\ln(1/\delta)} \quad (2)$$

事实上,求解 N_δ 的最优值是一个非常困难的优化问题。在实际应用中,人们总是通过将图像划分成规则网格并分别计数覆盖每一个网格所需的盒子数,以这些盒子数的总和 $\tilde{N}_\delta$ 作为 N_δ 的一个近似值。但是,由于使用了硬性划分的规则网格,使得 $\tilde{N}_\delta$ 在小尺度下偏小,在大尺度下偏大,从而使由此得到的分形维数偏小^[11]。实验表面,这种误差是相当可观的,此方法得到的分形维数的最大估计值一般仅有 2.5~2.7。动态区域较窄使得分形维数对不同纹理的区分性下降,由此造成对自然景物图像的分割效果不佳。尽管人们提出了各种各样的改进(如最常用的差分盒计数(DBC)算法^[4]和相对差分盒计数(RDBC)算法^[5]),但是,这些方法都使用了硬性划分的规则网格,因而不可避免的带有上述不足。

3 基于数学形态学的分形维数估计

数学形态学^[12]是以形态为基础对图像进行分析的一种数学工具,它的基本思想是用具有一定形态的结构元素去度量和提取图像中的对应形态以达到对图像分析和识别的目的。膨胀和腐蚀是数学形态学的 2 种基本运算,它们可以简化图像数据,保持图像的基本特征,并除去尺度上小于结构元的细节。这就如同在不同的尺度下观察图像,结构元的尺度较小时,可以看到很多细节;如果换用较大尺度的结构元,看到的就只有粗的轮廓。数学形态学的这种能力恰好就是在不同尺度下度量几何体的分形维数时所需要的,所以,基于数学形态学来计算灰度图像的分形维数应该是一个很自然的选择。

Samarabandu 等人^[6]给出了一种基于固定结构元的数学形态学分形维数估计方法(FSEM)。同基于盒计数的算法一样,该方法也把二维图像 X 当成一个三维表面,使用固定尺度的结构元 Y 去膨胀 X ,得到度量 $M(X, Y, \delta)$

$$M(X, Y, \delta) = \frac{V(X \oplus \delta Y)}{2\delta} \quad (3)$$

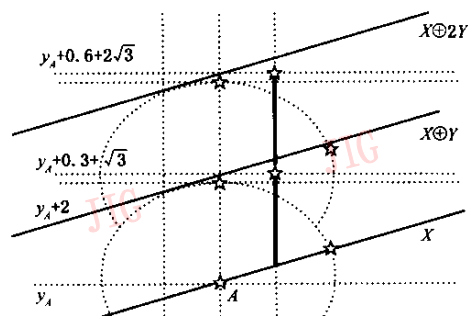
其中, $\oplus$ 是膨胀算子, δ 是尺度因子, $V(X)$ 表示 X 的体积。在这里尺度因子取整数,不同尺度下的膨胀结果可以由如下的递推形式给出

$$X \oplus (\delta + 1)Y = (X \oplus \delta Y) \oplus Y \quad (4)$$

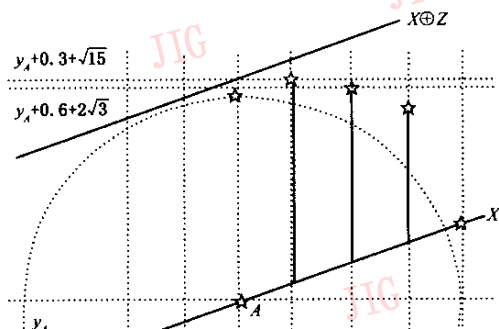
虽然,这种方法由于仅是反复使用固定的一个

小尺度结构元而降低了计算量,但是其缺陷也是明显的。首先,该方法在不同尺度下实际所用的等效结构元的半径是成倍增长的。例如,选择结构元 Y 的半径为 3,当 $\delta=4$ 时就相当于用半径为 12 的结构元去做膨胀,这样得到的估计结果会受到较大邻域

内像素的影响。使用这样得到的分形维数进行图像分割,会造成边缘区域难以准确定位,降低了分割的精度。其次,由于数字图像是定义在离散网格上的,离散化的影响致使式(4)并不总是成立,图 1 以一维信号为例说明了这种误差的产生。



(a) 小尺度结构元膨胀两次



(b) 大尺度结构元膨胀一次

图 1 由离散化而造成的膨胀误差示意图

假设 X 是一条斜率为 1 的直线, Y 和 Z 分别是半径为 2 和 4 的圆盘形结构元。如果 X 是连续取值, $X \oplus 2Y$ 和 $X \oplus Z$ 会得到相同的结果;但是,如果 X 只能在离散的单位网格上取值(如图 1 所示),则 $X \oplus 2Y$ 得到的结果较小。表 1 以直线为例,给出了对这种膨胀误差的估计,其中结构元 Y 和 Z 的半径分别为 3 和 15。大尺度上膨胀结果偏小,将导致最终的分形维数估计值偏大。

表 1 由离散化而造成的对直线的膨胀误差

X 的斜率 k	$X \oplus 5Y$	$X \oplus Z$	误差(%)
0	15.00	15.00	0.00
1	21.18	21.20	0.08
2	31.18	33.48	7.39
3	45.00	47.39	5.30
4	60.00	61.39	2.31
5	75.00	75.39	0.51
$k \geq 6$	$15k$	$15k$	0.00

有鉴于此,提出一种基于可变结构元的数学形态学分形维数估计方法(VSEM),它使用一组不同尺度的结构元 Y_δ 分别对图像表面进行膨胀。一幅 $M \times N$ 图像,其表面 X 可以表示成一个三元组集合 $\{(x, y, f(x, y)); x=1, 2, \dots, M; y=1, 2, \dots, N\}$, 同样结构元 Y_δ 也可以表示成一个三元组的集合 $\{(x_{\delta i}, y_{\delta i}, z_{\delta i}); i=1, 2, \dots, P_\delta\}$, 其中 P_δ 为结构元 Y_δ 的像素数。像素 $f(x, y)$ 第 δ 次膨胀的结果为

$$f'_\delta(x, y) = \max \{f(x + x_{\delta i}, y + y_{\delta i}) + z_{\delta i}, i=1, 2, \dots, P_\delta\} \quad (5)$$

该结果包含了所有到图像表面的距离为 δ 且位

于其上方的点。通常的欧氏距离定义决定了膨胀中将使用一个球形的结构元。显然,不同的距离定义将导致不同的结构元。如果使用 L_∞ 距离,将得到一个正方体结构元,这就意味着

$$z_{\delta i} \equiv \delta, i=1, 2, \dots, P_\delta \quad (6)$$

于是,式(5)可以改写成

$$f'_\delta(x, y) = \max \{f(x + x_{\delta i}, y + y_{\delta i}), i=1, 2, \dots, P_\delta\} + \delta = f''_\delta(x, y) + \delta \quad (7)$$

而在不同尺度下 $f'_\delta(x, y)$ 的值可以递推得到

$$f'_{\delta+1}(x, y) = \max \{f'_\delta(x, y), f(x_i, y_i); (x_i, y_i) \in D_{\delta+1}\} \quad (8)$$

其中,区域 D_δ 表示随着尺度增大结构元的支撑区域扩展的部分,如图 2 所示,并且,对任意点 (x, y) , $f'_0(x, y) = 0$ 。

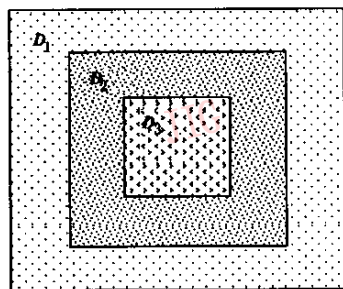


图 2 不同尺度结构元的支撑区域示意图

这样,求所有尺度下 $f'_\delta(x, y)$ 的总计算量仅相当于求最大尺度下 $f'_\delta(x, y)$ 的计算量。表 2 给出了

分别使用 FSEM 和 VSEM 算法在 5 个不同尺度上膨胀一副 $M \times N$ 图像所需的计算量。显然,新算法对于降低计算的时间复杂度是非常有效的。

表 2 膨胀操作的计算复杂度对比		
	FSEM	VSEM
结构元半径	3	1~5
尺度个数	5	5
比较操作	240MN	121MN
加法操作	245MN	4MN

基于上述膨胀结果,可以在一个 $W \times W$ 的窗口中定义结构元 Y_δ 对图像 X 的一个局部度量 $M(X, Y, \delta)$

$$M(X, Y, \delta) = \frac{V(X, Y_\delta, \delta)}{\delta} = \frac{\sum_{x,y} (f_\delta(x, y) - f(x, y))}{\delta}$$
$$= \frac{\sum_{x,y} (f_\delta^i(x, y) - f(x, y)) + W^2 \delta}{\delta} \tag{9}$$

对式(1)进行对数变换,得到

$$\ln(M_\delta(F)) = \ln(c) - (s - n)\ln(\delta) \tag{10}$$

因此,图像的分形维数 s 为

$$s = n + \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(M(X, Y, \delta))}{\ln(1/\delta)} \right) \tag{11}$$

对于上式中的极限,通常都是以 $\ln(1/\delta)$ 为横坐标, $\ln(M(X, Y, \delta))$ 为纵坐标做出散点图,这些点的分布近似为一条直线,其斜率就是所求的极限值,可以由最小二乘拟合得到。

4 不同估计方法的对比

为了说明 VSEM 算法估计分形维数的精确性,将其与 Blanket 算法、DBC 算法、RDBC 算法和 FSEM 算法在 2 组图像上进行对比。第 1 组是 60 个

通过在灰度值为 128 的均匀背景上叠加零均值高斯噪声得到的合成纹理图像,噪声的方差分别为 1, 2, 4, 8, 12, 36, 56, 80, 104 和 128。如果叠加后某像素的灰度值小于 0(或大于 255),该值将被截断。理论上,这组图像的分形维数应该随着噪声方差的增大而从 2.0 向 3.0 增加。一个好的估计算法得到的结果将能反映出这种趋势,并且占有较大的动态范围。第 2 组是从 12 种 Brodatz 纹理^[13]中取出的 72 幅自然纹理图像。首先将每幅图像分为 $W \times W$ 的块,将在每个块内得到的分形维数的平均值作为该图的分形维数。为了减轻随机性的影响,对于每一个噪声水平或纹理,分别使用在 6 幅 128×128 图像上得到的平均值作为最终的估计结果。在 DBC 算法和 RDBC 算法中 W 取 12,其他算法中 W 取 11。

与文献[4]和[5]类似,距离误差(distance error, DE)被用来衡量分形维数估计的质量。不同之处在于,这里估计的是局部分形维数,因为它更适合作为分割纹理的特征。距离误差的计算方法如下:

$$DE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \frac{(mx_i + c - y_i)^2}{(1 + m)^2}}{n}} \tag{12}$$

其中, $y = mx + c$ 表示拟合的直线, y 表示 $\ln(A(X, Y_\epsilon))$, x 表示 $\ln(1/\epsilon)$, n 是所用到的尺度个数。

图 3 和图 4 给出了用 5 种不同方法进行局部分形维数估计的对比试验结果。从图 3 不难看出,基于数学形态学的分形维数估计算法得到的结果占据了更大的动态区域,从而具有更强的区分纹理的能力。同 VSEM 算法的结果相比,由 FSEM 算法得到的估计值都稍稍偏大,这与第 2 节中的分析是吻合的,从而印证了 VSEM 算法的准确性。同时,图 4 也显示 VSEM 算法的误差也是较小的。

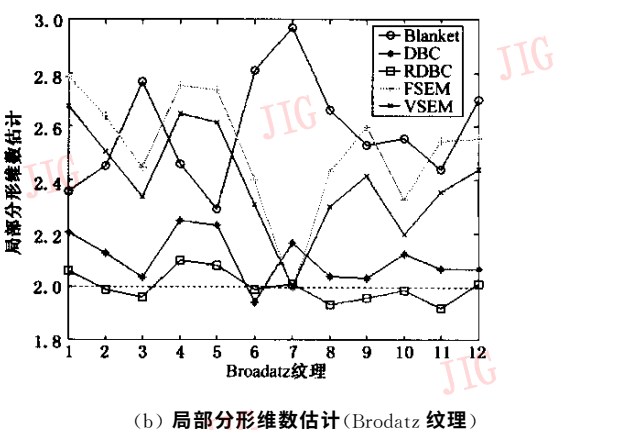
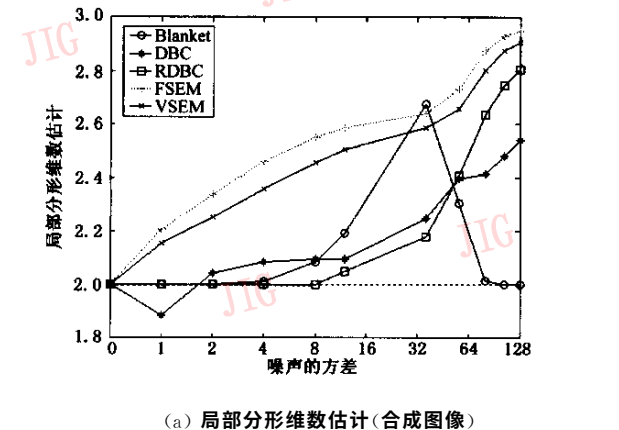


图 3 几种分形维数估计算法得到的局部分形维数对比

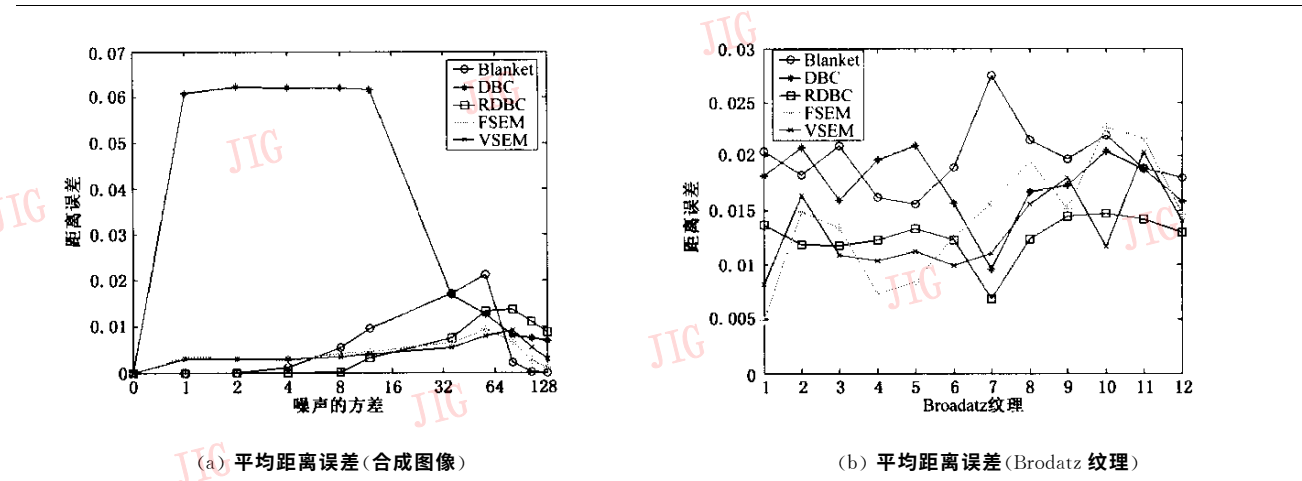


图 4 几种分形维数估计算法的平均距离对比

5 基于分形维数的纹理图像分割

虽然分形维数是描述纹理的一个很好的特征,但是,自然界中很多视觉上差别很大的纹理,其分数维近似相同。这是因为,分形维数所描述的主要是图像表面的崎岖程度,而没有考虑表面整体的高度(即图像的平均灰度)。为了说明这一点,使用上述 3 种算法来估计另一组合成图像的分形维数,这组图像是在 3 幅灰度值恒定的均匀图像上叠加 $\sigma=16$ 的零均值高斯噪声得到的。表 3 所示的估计结果表明,虽然图像的灰度均值相差很大,但由于方差相等,它们的分形维数非常接近。

表 3 等方差图像的分形维数估计

	平均灰度		
	64	128	192
DBC 算法	2.371	2.369	2.386
FSEM 算法	2.599	2.607	2.621
VSEM 算法	2.595	2.597	2.605

由此可见,单一分形维数对纹理的描述是不完备的。为此,Chaudhuri 等人先对图像进行一系列简单变换,然后提取这组变换图像的分形维数构成高维特征^[7];李厚强等人使用推广的 DBC 方法计算图像的广义维数谱作为特征^[8]。但是,由于他们都是基于 DBC 算法来估计分形维数的,而该算法的误差较大,所以这 2 种方法不但耗时,而且分割效果不理想。本文将上述改进的形态学维数估计算法得到的分形维数和图像的邻域均值作为描述灰度纹理图像的特征,并使用 Kohonen 自组织映射神经网络作为

分类器来实现纹理图像自动分割。

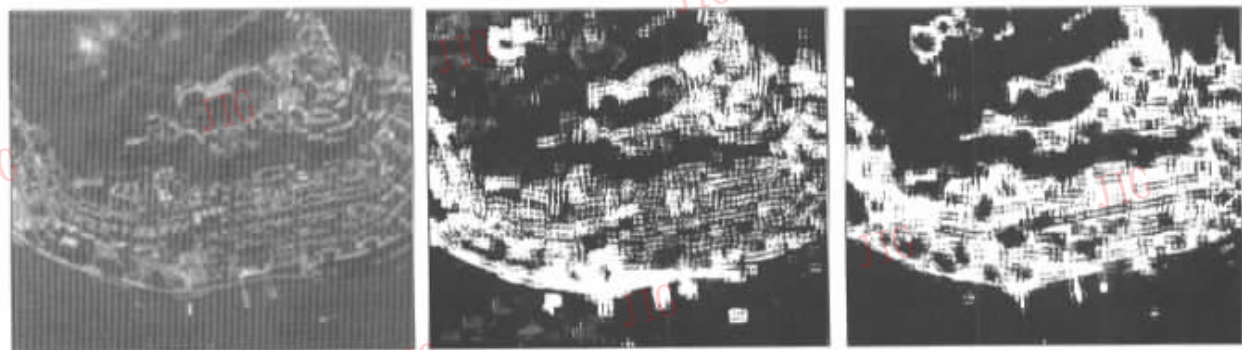
根据分形理论,遥感图像中自然地貌和人工地物在分形维数上应该有较大差别。因此,下面给出一个使用分形技术对遥感图像进行粗分割的例子。图 5(a) 是一幅高分辨率遥感图像,图 5(b)~图 5(e)分别是使用 Chaudhuri 算法^[7]、基于多重分维的算法^[8]和上述基于形态学分形维数的分割算法的结果,其中,图 5(d)和图 5(e)的差别在于估计分形维数时前者使用 FSEM 算法,而后者则是使用 VSEM 算法。从图 5(e)中明显可以看出,VSEM 算法基本上成功地将人工地物所在目标区域从自然地貌所在的背景区域中分了出来,目标区域的连通性较好,这为后续的细分割奠定了基础。需要说明的是,这些分割结果都是使用的 Kohonen 神经网络将像素分为 3 类,再对过渡类进行简单归并得到的。

表 4 给出了在赛扬 1GHz 的 CPU 上运行图 5(b)~图 5(e)所示的 4 种算法分割一幅 256×256 的图像所用的时间。

表 4 4 种基于分形的分割算法的运算时间

算法	时间(s)
Chaudhuri 算法	29.235
多重分维算法(3 重维数)	9.234
基于形态学维数的算法(FSEM)	6.859
基于形态学维数的算法(VSEM)	3.250

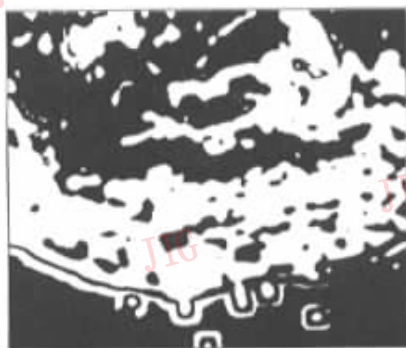
从图 5 和表 4 中不难看出,由于改进算法在简化计算的同时对分形维数的估计更为精确,所以基于它的分割算法不但取得了更好的效果,而且时间复杂度也远小于前三者。



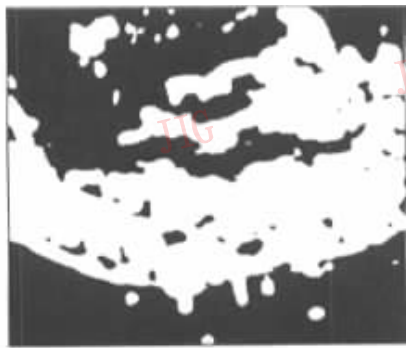
(a) 高分辨遥感图像

(b) Chaudhuri 算法

(c) 多重分维算法



(d) 基于形态学维数的分割



(e) 基于改进的形态学维数的分割

图5 基于分形特征的遥感图像分割结果对比

6 结 论

分形理论提供了一种很好的纹理图像描述模型,分形维数是基于该模型的最常用的特征。数学形态学操作可以很好地在不同尺度下对分形表面的测度,所以基于数学形态学的分形维数估计方法能够得到较精确的结果。针对常用的基于盒计数的算法误差较大和传统的形态学维数估计算法计算量较大的缺陷,本文在恰当选择结构元的基础上构造了不同尺度下膨胀的递推算法,从而令计算大大简化。实验表明,本文所提出的改进算法与已有算法相比,可以在更小的时间复杂度下得到了更为精确的结果。

参 考 文 献

- 1 Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature[M]. New York: W. H. Freeman, 1983.
- 2 Pentland A P. Fractal based description of natural scenes[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1984, 6(6): 661~674.
- 3 Liu Yu-xin, Li Yan-da. Image feature extraction and

segmentation using fractal dimension [A]. In: Proceedings of ICSP'97[C], Singapore, 1997: 975~979.

- 4 Sarkar N, Chaudhuri B B. An efficient differential box-counting approach to compute fractal dimension of image [J]. IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics, 1994, 24(1): 115~120.
- 5 Jin X C, Ong S H, Jayasooriah. A practical method for estimation fractal dimension [J]. Pattern Recognition Letters, 1995, 16(5): 457~464.
- 6 Samarabandu J, Acharya R, Hausmann E, *et al.* Analysis of bone X-rays using morphological fractals [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1993, 12(3): 466~470.
- 7 Chaudhuri B B, Sarkar N. Texture segmentation using fractal dimension [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1995, 17(1): 72~77.
- 8 李厚强, 刘政, 凯林峰. 基于分形理论和 Kohonen 神经网络的纹理图像分割方法 [J]. 计算机工程与应用, 2001, 37(7): 44~46.
- 9 谢和平. 分形几何: 数学基础与应用 [M]. 重庆: 重庆大学出版社, 1991: 24~35.
- 10 Peleg S, Naor J, Hartley R, *et al.* Multiple resolution texture analysis and classification [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1984, 6(4): 518~523.
- 11 Feng Jie, Lin Wei-chung, Chen Chin-tu. Fractal box-counting approach to fractal dimension estimation [A]. In: Proceedings of ICPR '96 [C], Vienna, 1996: 854~858.

12 Serra J. Image Analysis and Mathematical Morphology (vol. 1) [M]. London, Academic Press, 1982.

13 Brodatz P. Texture: A Photographic Album for Artists and Designers[M]. New York, USA: Dover, 1966.



夏 勇 1978 年生,西北工业大学计算机学院计算机信息与工程系硕士研究生。主要研究方向为图像处理、计算机视觉和模式识别。



赵荣椿 1937 年生,博士生导师。主要研究方向为语音和图像信号处理、计算机视觉和模式识别。



江泽涛 1961 年生,教授。1996 年于同济大学声学检测与计算机控制专业毕业,获硕士学位。主要研究方向为计算机控制、图像处理及网络数据库应用。