中国科学: 数学 2012 年 第 42 卷 第 6 期: 619～633
www.springerlink.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

完全 3- 一致超图的一类填充问题和覆盖问题

冯弢[①*], 柴钊[②③], 常彦勋[①]

① 北京交通大学数学系, 北京 100044;
② 北京大学数学科学学院, 北京 100871;
③《中国科学》杂志社, 北京 100717
E-mail: tfeng@bjtu.edu.cn, chaizhao@scichina.org, yxchang@bjtu.edu.cn

收稿日期: 2012-02-24; 接受日期: 2012-06-01; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 10901016 和 61071221) 和中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: 2011JBZ012 和 2011JBM298) 资助项目

摘要 设 Γ 是一些单 t- 一致超图的集合. 填充设计 $P_\lambda(t,\Gamma,v)$ (或覆盖设计 $C_\lambda(t,\Gamma,v)$) 是一个二元有序组 $(X,\mathcal{B})$, 其中 X 是完全 t- 一致超图 $\lambda K_v^{(t)}$ 的顶点集, $\mathcal{B}$ 是 $\lambda K_v^{(t)}$ 的一些子超图的集合, 要求每个子超图都同构于 Γ 中的某一个超图, 每个子超图称为是一个区组, 并且满足 $\lambda K_v^{(t)}$ 中的每一条边至多 (或至少) 含在 $\mathcal{B}$ 的 λ 个区组中. 给定参数 t,v,λ,Γ, 填充设计 $P_\lambda(t,\Gamma,v)$ 的最大可能的区组数称为填充数, 记为 $d_\lambda(t,\Gamma,v)$; 覆盖设计 $C_\lambda(t,\Gamma,v)$ 的最小可能的区组数称为覆盖数, 记为 $c_\lambda(t,\Gamma,v)$. 本文将确定 Γ 中仅含超图 $K_4^{(3)}+e$ 时的 $d_\lambda(t,\Gamma,v)$ 和 $c_\lambda(t,\Gamma,v)$ 的精确值.

关键词 t-(v,Γ,λ) 填充 t-(v,Γ,λ) 覆盖 填充数 覆盖数 可分组 (Γ,t)- 设计 (Γ,t)- 烛台系

MSC (2010) 主题分类 05C70, 05B05

1 引言

超图是有限集合的子集合系统. 具体来讲, 一个超图定义为一个有序二元组 (V,E), 其中 V 是一个有限集, V 中的元素称为顶点, E 是 V 的有限非空子集族 (可以是多重集), E 中的元素称为边. 如果一个超图不含重边, 即它的边集合 E 中没有重复元素, 这个超图被称为是一个单超图. 假设 (V,E) 和 (V',E') 是两个超图, 满足 $V'\subseteq V$, $E'\subseteq E$, 则称 (V',E') 是 (V,E) 的一个子超图.

在一个超图中, 如果每条边都恰有 t 个顶点, 这样的超图称为是 t- 一致的. 一个 2- 一致超图就是一个图. 如果一个 t- 一致超图的边集合恰含点集合中每个 t- 子集刚好一次, 称它是一个完全 t- 一致超图. 当 $|V|=v$ 时, 一个完全 t- 一致超图被记作 $K_v^{(t)}$, 这里 v 称为是这个超图的阶. 方便起见, 当提到一个超图含有一个点, 我们是指这个超图的顶点集含有这个点; 一个完全 t- 一致超图含有一个点集 $\{x_1,x_2,\dots,x_t\}$, 是指这个超图的边集合含有边 $\{x_1,x_2,\dots,x_t\}$. 对超图感兴趣的读者, 可以参考 Berge 的经典教材 [1].

设 λ 是一个正整数, H 是一个单 t- 一致超图. 记 λH 是一个由 H 导出的超图, 即这个超图的点集合就是 H 的点集合, 这个超图的边集合含有 H 中每一条边恰好 λ 次. 设 Γ 是一些单 t- 一致超图的集合. 一个 $(\lambda H,\Gamma)$- 填充 (相应地, $(\lambda H,\Gamma)$- 覆盖) 定义为一个有序二元组 $(X,\mathcal{B})$, 其中 X 是 λH 的点集合, $\mathcal{B}$ 是 λH 的一些子超图的集合, 要求每个子超图都同构于 Γ 中的某一个超图, 每个子超图称为是一个区组, 并且满足 λH 中的每一条边至多 (相应地, 至少) 含在 $\mathcal{B}$ 的 λ 个区组中.

英文引用格式: Feng T, Chai Z, Chang Y X. Packings and coverings of complete 3-uniform hypergraph (in Chinese). Sci Sin Math, 2012, 42(6): 619–633, doi: 10.1360/012011-143

令 H 是完全 t- 一致超图 $K_v^{(t)}$. 此时, 一个 $(\lambda K_v^{(t)},\Gamma)$- 填充可记为 $P_\lambda(t,\Gamma,v)$; 一个 $(\lambda K_v^{(t)},\Gamma)$- 覆盖可记为 $C_\lambda(t,\Gamma,v)$. 进一步, 若 $\lambda=1$, 上述记号可简化为 $P(t,\Gamma,v)$ 和 $C(t,\Gamma,v)$. 如果 $\Gamma=\{J\}$, 即 Γ 仅含一个超图 J, 简记 $P_\lambda(t,\{J\},v)$ 为 $P_\lambda(t,J,v)$, 记 $C_\lambda(t,\{J\},v)$ 为 $C_\lambda(t,J,v)$.

一个参数为 $P_\lambda(t,\Gamma,v)$ 的填充 $(X,\mathcal{B})$ 称为极大填充, 是指如果不存在相同参数的填充 $(X,\mathcal{A})$ 满足 $|\mathcal{B}|<|\mathcal{A}|$. 极大填充 $P_\lambda(t,\Gamma,v)$ 可简记为 $MP_\lambda(t,\Gamma,v)$. 一个极大填充 $MP_\lambda(t,\Gamma,v)$ 所含的区组数, 称为这个填充的填充数, 记为 $d_\lambda(t,\Gamma,v)$. 当 $\lambda=1$ 时, 上述记号分别简记为 $MP(t,\Gamma,v)$ 和 $d(t,\Gamma,v)$.

一个参数为 $C_\lambda(t,\Gamma,v)$ 的覆盖 $(X,\mathcal{B})$ 称为极小覆盖, 是指如果不存在相同参数的覆盖 $(X,\mathcal{A})$ 满足 $|\mathcal{B}|>|\mathcal{A}|$. 极小覆盖 $C_\lambda(t,\Gamma,v)$ 可简记为 $MC_\lambda(t,\Gamma,v)$. 一个极小覆盖 $MC_\lambda(t,\Gamma,v)$ 所含的区组数, 称为这个覆盖的覆盖数, 记为 $c_\lambda(t,\Gamma,v)$. 当 $\lambda=1$ 时, 上述记号分别简记为 $MC(t,\Gamma,v)$ 和 $c(t,\Gamma,v)$.

本文将要讨论的完全 t- 一致超图的填充问题和覆盖问题是指, 给定参数 λ,t,Γ,v, 确定填充数 $d_\lambda(t,\Gamma,v)$ 和覆盖数 $c_\lambda(t,\Gamma,v)$.

对于参数为 $P_\lambda(t,\Gamma,v)$ 的一个填充 $(X,\mathcal{B})$, 可以定义这个填充的余图的概念. 它的余图的点集仍然是 X, 余图的边集 L 满足, 若 $e\in L$ 且 e 在 L 中重复出现 m 次, 当且仅当 e 恰好含在 $\mathcal{B}$ 的 $\lambda-m$ 个区组中.

对于参数为 $C_\lambda(t,\Gamma,v)$ 的一个覆盖 $(X,\mathcal{A})$, 可以定义这个覆盖的溢图的概念. 它的溢图的点集仍然是 X, 溢图的边集 E 满足, 若 $e\in E$ 且 e 在 E 中重复出现 m 次, 当且仅当 e 恰好含在 $\mathcal{A}$ 的 $\lambda+m$ 个区组中.

如果一个填充 $P_\lambda(t,\Gamma,v)$ 的余图是空的, 则称这样的填充为一个 t- 平衡 Γ 设计, 记为 $S_\lambda(t,\Gamma,v)$. 显然, 一个 $S_\lambda(t,\Gamma,v)$ 既是一个极大填充 $MP_\lambda(t,\Gamma,v)$, 也是一个极小覆盖 $MC_\lambda(t,\Gamma,v)$.

为方便理解, 下面给出一个极大填充和极小覆盖的例子. 首先约定在本文中符号 $K_4^{(3)}+e$ 总表示一个点集合为 $\{x,y,z,u,v\}$, 边集合为 $\{\{x,y,z\},\{x,y,u\},\{x,z,u\},\{y,z,u\},\{z,u,v\}\}$ 的超图, 并且这样的超图可记为一个有序五元组 (x,y,z,u,v).

例 1.1 在这个例子中, 我们首先在点集 $\{0,1,\dots,7\}$ 上构造一个 $MP(3,K_4^{(3)}+e,8)$. 它的 $\lfloor\binom{8}{3}/5\rfloor=11$ 个区组列举如下:

$$\begin{array}{cccccc}(0,1,2,3,4) & (0,1,4,5,2) & (0,1,6,7,2) & (0,4,2,6,3) & (0,7,2,5,3) & (0,4,3,7,2)\\ (0,6,3,5,4) & (1,2,4,7,5) & (1,2,5,6,4) & (1,3,4,6,7) & (1,5,3,7,6), & \end{array}$$

可以验证这个填充的余图仅含有一条边 $\{5,6,7\}$. 因此, $d(3,K_4^{(3)}+e,8)=11$. 进一步, 在这个填充原有区组的基础上, 添加一个新的区组 $(0,1,5,6,7)$, 即可以得到一个极大覆盖 $MC(3,K_4^{(3)}+e,8)$. 可以验证该极大覆盖的溢图含有四条边 $\{0,1,5\}$, $\{0,1,6\}$, $\{0,5,6\}$ 和 $\{1,5,6\}$. 因此, $c(3,K_4^{(3)}+e,8)=\lceil\binom{8}{3}/5\rceil=12$.

设 K 是某些正整数的集合, Ω 是阶数取自 K 的一些完全 t- 一致超图的集合. 此时, 一个 $S_\lambda(t,\Omega,v)$ 常记作 $S_\lambda(t,K,v)$, 这对应于经典 t- 平衡设计 (t-BD) 的概念 [2]. Ji [3] 证明了如下结果, 这个结果对于本文主要结论的证明起着重要作用.

引理 1.2 [3] 对于任意正整数 $v\equiv 0,1,2 \pmod 4$ 且 $v\neq 9,13$, 存在 $S(3,\{4,5,6\},v)$.

确定填充数 $d_\lambda(t,\Gamma,v)$ 和覆盖数 $c_\lambda(t,\Gamma,v)$ 的问题是组合设计理论中最基本的问题之一. 目前已经有大量的文献讨论 $t=2$ 的情形, 感兴趣的读者可以参阅综述 [4–7]. 然而, 当 $t\geqslant 3$ 时, 已知结果很少. 即便对于 $t=3$, 也仅有 $\Gamma=K_4^{(3)}-e$ [8,9] 和 $\Gamma=W_4^{(3)}$ [10,11] 这两种情况被系统讨论.

本文的目的是确定填充数 $d_\lambda(3,K_4^{(3)}+e,v)$ 和覆盖数 $c_\lambda(3,K_4^{(3)}+e,v)$. 简单计算可以得到关于填充数的上界 $d_\lambda(3,K_4^{(3)}+e,v)\leqslant\lfloor\lambda v(v-1)(v-2)/30\rfloor$, 和覆盖数的下界 $c_\lambda(3,K_4^{(3)}+e,v)\geqslant\lceil\lambda v(v-$

$1)(v-2)/30\rceil$. Feng 和 Chang [12] 已经建立了如下结果:

引理 1.3 [12] 存在 $S(3,K_4^{(3)}+e,v)$ 当且仅当 $v\equiv 0,1,2 \pmod 5$ 且 $v\geqslant 7$.

由引理 1.3, 立即可推出当 $v\equiv 0,1,2 \pmod 5$ 且 $v\geqslant 7$ 时, $d(3,K_4^{(3)}+e,v)=c(3,K_4^{(3)}+e,v)=\lfloor \lambda v(v-1)(v-2)/30\rfloor=\lceil \lambda v(v-1)(v-2)/30\rceil$. 本文将主要证明如下结果:

定理 1.4 对于任意整数 $v\geqslant 5$, $\lambda\geqslant 1$ 且 $(v,\lambda)\notin\{(5,1),(6,1)\}$, 有 $d_\lambda(3,K_4^{(3)}+e,v)=\lfloor \lambda v(v-1)(v-2)/30\rfloor$. 特别地, $d(3,K_4^{(3)}+e,5)=1$; $d(3,K_4^{(3)}+e,6)=3$.

定理 1.5 对于任意整数 $v\geqslant 5$, $\lambda\geqslant 1$ 且 $(v,\lambda)\notin\{(5,1),(6,1)\}$, 有 $c_\lambda(3,K_4^{(3)}+e,v)=\lceil \lambda v(v-1)(v-2)/30\rceil$. 特别地, $c(3,K_4^{(3)}+e,5)=3$; $c(3,K_4^{(3)}+e,6)=5$.

2 递推构造

本节将引入一些辅助设计, 并给出关于这些辅助设计的几个递推构造. 在第 4 节我们将看到, 这些辅助设计对于讨论完全 3- 一致超图的填充问题和覆盖问题十分有效. 这些辅助设计是组合设计理论中一些经典结构的变形, 如果读者希望深入了解组合设计的相关理论, 可参考文献 [2]. 为方便讨论, 下面总假设 K 是某些正整数的集合, Γ 是一些单 t- 一致超图的集合, Ω 是一些阶数取自 K 的完全 t- 一致超图的集合.

设 v,m,t 是正整数, s 是非负整数. 设 X 是 $v=s+\sum_{i=1}^m a_ig_i$ 个点的集合, S 是 X 的大小为 s 的子集, S 称为柄; $\mathcal{G}=\{G_1,G_2,\dots\}$ 是 $X\setminus S$ 的划分, $\mathcal{G}$ 中的元素称为组; $\mathcal{T}$ 是顶点集定义在 X 的一些子集上的超图族, $\mathcal{T}$ 中的每个超图都同构于 Γ 中的某一个超图, $\mathcal{T}$ 中的每个超图称为是一个区组. 称一个有序四元组 $(X,S,\mathcal{G},\mathcal{T})$ 为一个 (Γ,t)- 烛台系, 是指对于 X 的任意 t- 子集 T, 如果 $|T\cap(S\cup G_i)|<t$ 对任意可能的 i 都成立, 则 T 恰好含于 $\mathcal{T}$ 的一个区组中; 否则, 对于任意 i, $S\cup G_i$ 的任意 t- 子集都不包含在 $\mathcal{T}$ 的任何区组中. 该烛台系记为 $\mathrm{CS}(t,\Gamma,v)$. 若 $\mathcal{G}$ 包含 a_i 个大小为 g_i 的组, $1\leqslant i\leqslant m$, 则称此 CS 的型为 $(g_1^{a_1}\cdots g_m^{a_m}:s)$. 特别地, 当 Γ 仅含一个超图 J 时, $\mathrm{CS}(t,\{J\},v)$ 常简记为 $\mathrm{CS}(t,J,v)$.

在一个 $\mathrm{CS}(t,\Gamma,v)$ 中, 如果 Γ 中的超图都是完全 t- 一致超图, 即 Γ 恰好可以看作是 Ω, 那么一个 $\mathrm{CS}(t,\Gamma,v)$ 常被记作 $\mathrm{CS}(t,K,v)$, 这对应于经典 t- 烛台系的概念 [13]. 因此, 本文引入的 (Γ,t)- 烛台系是 t- 烛台系概念的一种推广.

利用 $S(t,K,v)$ 可以方便地构造一类 t- 烛台系. 假定 $t\geqslant 3$, 且 $(X,\mathcal{B})$ 是一个 $S(t,K,v)$, 则对于任意给定的 $x_0\in X$, 容易验证有序四元组 $(X,\{x_0\},\{\{x\}:x\in X\setminus\{x_0\}\},\mathcal{B})$ 是一个型为 $(1^{v-1}:1)$ 的 $\mathrm{CS}(t,K,v)$. 因此, 利用引理 1.2 的结论, 可以得到如下引理:

引理 2.1 对于任意正整数 $v\equiv 0,1,2 \pmod 4$ 且 $v\neq 9,13$, 存在型为 $(1^{v-1}:1)$ 的 $\mathrm{CS}(3,\{4,5,6\},v)$.

引理 2.2 [12] 对于任意整数 $n\geqslant 3$, 存在型为 $(2^n:2)$ 的 $\mathrm{CS}(3,\{4,6\},2n+2)$.

设 s $(\leqslant v)$ 是一个非负整数. 一个 $(K_v^{(t)}\setminus K_s^{(t)},\Gamma)$- 设计是一个有序三元组 $(X,Y,\mathcal{B})$, 其中 X 是 $K_v^{(t)}\setminus K_s^{(t)}$ 的顶点集, Y 是 $K_s^{(t)}$ 的顶点集, Y 称为洞, $\mathcal{B}$ 是 $K_v^{(t)}\setminus K_s^{(t)}$ 的一些子超图的集合, 每个子超图都同构于 Γ 中的一个超图, 每个子超图称为一个区组, 要求 $K_v^{(t)}\setminus K_s^{(t)}$ 中的每一条边都恰好含在 $\mathcal{B}$ 的一个区组中. 这样的设计记作 $\mathrm{HS}(t,\Gamma;v,s)$. 下面的构造是组合设计中标准填洞构造的变形, 简单但非常有用.

构造 2.3 (填洞构造)

(1) 假定存在一个 $\mathrm{HS}(t,\Gamma;v,s)$ 和一个 $\mathrm{HS}(t,\Gamma;s,r)$, 则存在一个 $\mathrm{HS}(t,\Gamma;v,r)$.

(2) 假定存在一个型为 $(g_1^{a_1}\cdots g_{m-1}^{a_{m-1}}g_m^1:s)$ 的 $\mathrm{CS}(t,\Gamma,v)$. 若对任意 $1\leqslant i\leqslant m-1$, 存在 $\mathrm{HS}(t,\Gamma;g_i+s,s)$, 则存在一个 $\mathrm{HS}(t,\Gamma;v,g_m+s)$.

设 n 和 t 是正整数. 设 X 是点的集合, $\mathcal{B}$ 是顶点集定义在 X 的一些子集上的超图族, $\mathcal{B}$ 中的每个超图都同构于 Γ 中的某一个超图, $\mathcal{B}$ 中的每个超图称为是一个区组. $\mathcal{G}$ 是 X 的一个划分, 把 X 分成 n 个非空子集, 每个非空子集称为是一个组. 一个可分组 (Γ, t)- 设计是一个有序三元组 $(X, \mathcal{G}, \mathcal{B})$, 要求每个区组的边集合中的每一条边都和任意给定的一个组至多交于一点, 并且对于任意 X 的 t- 子集 T, 如果 T 中的 t 个点取自 t 个不同的组, 则 T 恰含于一个区组中.

常用指数记法来表示一个可分组 (Γ, t)- 设计的组型. 具体来讲, 在一个可分组 (Γ, t)- 设计中, 组型 $g_1^{a_1} g_2^{a_2} \cdots g_m^{a_m}$ 表示存在 a_i 个大小为 g_i 的组, $1 \leqslant i \leqslant m$. 一个组型为 $g_1^{a_1} g_2^{a_2} \cdots g_m^{a_m}$ 的可分组 (Γ, t)- 设计记作 $\mathrm{GDD}(t, \Gamma, v)$, 其中 $v = \sum_{i=1}^{m} a_i g_i$. 特别地, 当 Γ 仅含一个超图 J 时, $\mathrm{GDD}(t, \{J\}, v)$ 常简记作 $\mathrm{GDD}(t, J, v)$.

在一个 $\mathrm{GDD}(t, \Omega, v)$ 中, 如果 Γ 中的超图都是完全 t- 一致超图, 即 Γ 恰好可看作 Ω, 那么一个 $\mathrm{GDD}(t, \Omega, v)$ 可记作 $\mathrm{GDD}(t, K, v)$, 这对应于经典可分组 t- 设计的概念 [13]. 因此, 本文引入的可分组 (Γ, t)- 设计是可分组 t- 设计概念的一种推广.

引理 2.4 [12] 对于 $(g, n) \in \{(5,4), (5,6), (10,4), (10,6)\}$, 存在型为 g^n 的 $\mathrm{GDD}(3, K_4^{(3)} + e, gn)$.

为证明本文的主要结果, 还需要下面的递推构造, 这个构造是 Hartman 关于 3- 设计基本构造 [14] 的变形.

构造 2.5 [12] (加权构造) 设 $(X, S, \mathcal{G}, \mathcal{A})$ 是一个型为 $(g_1^{a_1} g_2^{a_2} \cdots g_m^{a_m} : s)$ 的 $\mathrm{CS}(3, K, v)$, 其中 $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$. 假设对于每个含 x_1 的区组 $A \in \mathcal{A}$, 存在型为 $(b^{|V(A)|-1} : r)$ 的 $\mathrm{CS}(3, \Gamma, b(|V(A)| - 1) + r)$. 假设对于每个含 x_i, $2 \leqslant i \leqslant s$, 的区组 $A \in \mathcal{A}$, 存在型为 $b^{|V(A)|}$ 的 $\mathrm{GDD}(3, \Gamma, b|V(A)|)$. 如果对于每个不含任意 x_i, $1 \leqslant i \leqslant s$, 的区组 $A \in \mathcal{A}$, 存在型为 $b^{|V(A)|}$ 的 $\mathrm{GDD}(3, \Gamma, b|V(A)|)$, 则存在型为 $((bg_1)^{a_1} (bg_2)^{a_2} \cdots (bg_m)^{a_m} : r + sb - b)$ 的 $\mathrm{CS}(3, \Gamma, v')$, 其中 $v' = (v-1)b + r$.

3 直接构造

在上一节, 我们定义了许多辅助设计, 并基于这些辅助设计建立了一些递推构造. 本节为了应用这些递推构造, 我们将构作大量小阶数的辅助设计. 由于需要构作的辅助设计往往含有大量的区组, 因此为了借助计算机快速进行搜索, 常常要求待构造的设计含有一个合适的自同构群, 在这个群的作用下, 有可能只需要寻找一小部分区组 (称为基区组), 就可以在群的作用下生成所有的区组, 从而缩减搜索量. 即若 $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ 是辅助设计的一个区组, G 是这个辅助设计的一个自同构群, 则 B 在 G 作用下生成的所有区组是: $\{b_1 \circ g, b_2 \circ g, \ldots, b_k \circ g\}$, $g \in G$. 方便起见, 总约定记号 Z_v 表示模 v 剩余类加群.

引理 3.1 对于 $v = 5, 6$ 以及 $\lambda = 2, 3$, 存在 $S_\lambda(3, K_4^{(3)} + e, v)$.

证明 所要的设计构作在 Z_v 上. 其区组列举如下.

$$
\begin{array}{lllll}
(v,\lambda)=(5,2): & (0,3,1,2,4) & (0,4,1,2,3) & (0,1,3,4,2) & (0,2,3,4,1), \\
(v,\lambda)=(5,3): & (0,1,2,3,4) & (1,3,0,2,4) & (1,2,0,4,3) & (0,3,1,4,2) \\
 & (0,2,3,4,1) & (2,3,1,4,0), & & \\
(v,\lambda)=(6,2): & (1,2,0,4,5) & (0,1,2,5,4) & (0,3,1,4,5) & (0,1,3,5,4) \\
 & (2,3,0,4,5) & (0,3,2,5,4) & (2,3,1,4,5) & (1,2,3,5,4),
\end{array}
$$

$$(v,\lambda)=(6,3):\quad (0,3,1,2,5)\quad (0,2,1,4,5)\quad (0,2,1,5,4)\quad (0,4,1,3,5)$$
$$(0,1,3,5,2)\quad (0,1,4,5,2)\quad (0,4,2,3,5)\quad (0,2,3,5,4)$$
$$(0,2,4,5,3)\quad (0,3,4,5,2)\quad (3,4,1,2,5)\quad (2,4,1,3,5).$$

引理 3.2　存在型为 5^5 的 $\mathrm{GDD}(3,K_4^{(3)}+e,25)$.

证明　所要的设计构作在 Z_{25} 上, 其组集为 $\{5Z_5+j:0\leqslant j\leqslant 4\}$. 它的所有区组由以下基区组在剩余类加群 Z_{25} 的作用下生成.

$$(0,1,2,4,5)\quad (0,1,7,8,19)\quad (0,1,9,13,12)\quad (0,1,14,17,10)\quad (0,2,6,8,15)$$
$$(0,2,11,13,4)\quad (0,3,6,19,10)\quad (0,3,7,14,23)\quad (0,3,9,17,13)\quad (0,4,12,18,5)$$

引理 3.3　对于 $s=3,4$, 存在型为 $(5^3:s)$ 的 $\mathrm{CS}(3,K_4^{(3)}+e,15+s)$.

证明　所要的设计构作在 $Z_{15}\cup\{\infty_1,\infty_2,\dots,\infty_s\}$ 上, 其组集为 $\{3Z_5+j:0\leqslant j\leqslant 2\}$, 柄为 $\{\infty_1,\infty_2,\dots,\infty_s\}$. 记 $\mathcal{T}_s$ 是所构作设计的基区组集, 取 $\mathcal{T}_s=\mathcal{A}\cup\mathcal{B}_s$, $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}_s$ 被列举如下: 它的所有区组由基区组在 Z_{15} 的加法子群 $\{3i:i\in Z_5\}$ 作用下生成, 这里规定 ∞_l $(1\leqslant l\leqslant s)$ 在这个子群的作用下保持不变.

$\mathcal{A}$: $(\infty_1,0,1,2,10)$　$(0,4,11,\infty_1,12)$　$(0,8,13,\infty_1,2)$　$(2,12,4,\infty_1,9)$　$(\infty_2,1,0,5,10)$
$(0,2,10,\infty_2,11)$　$(0,13,11,\infty_2,3)$　$(0,14,4,\infty_2,12)$　$(\infty_3,1,0,11,7)$　$(0,2,13,\infty_3,14)$
$(1,6,14,\infty_3,9)$　$(2,10,3,\infty_3,7)$　$(5,7,1,11,14)$　$(3,4,0,1,8)$　$(1,6,0,7,8)$
$(3,5,0,2,4)$　$(0,6,8,2,1)$　$(3,11,0,8,14)$,

$\mathcal{B}_3$: $(8,13,5,7,6)$　$(3,10,0,7,2)$　$(3,14,0,13,10)$　$(6,13,0,4,10)$　$(8,9,0,4,5)$
$(5,6,0,11,14)$　$(2,11,1,4,14)$　$(1,2,5,13,0)$,

$\mathcal{B}_4$: $(\infty_4,0,1,14,4)$　$(0,4,8,\infty_4,12)$　$(2,7,0,\infty_4,10)$　$(0,13,5,\infty_4,4)$　$(3,7,0,10,14)$
$(3,14,0,13,6)$　$(6,10,0,4,8)$　$(5,8,7,13,0)$　$(5,11,10,13,0)$　$(5,11,0,6,14)$
$(7,10,11,14,0)$.

引理 3.4　存在型为 $(5^4:3)$ 的 $\mathrm{CS}(3,K_4^{(3)}+e,23)$.

证明　所要的设计构作在 $Z_{20}\cup\{\infty_1,\infty_2,\infty_3\}$ 上, 其组集为 $\{4Z_5+j:0\leqslant j\leqslant 3\}$, 柄为 $\{\infty_1,\infty_2,\infty_3\}$. 所有的区组可以分成两个部分, 第一部分由 20 个区组组成: $\{(2+i,4+i,i,10+i,\infty_1):0\leqslant i\leqslant 9\}\cup\{(2+i,4+i,i,10+i,\infty_2):10\leqslant i\leqslant 19\}$; 第二部分的区组由如下基区组在剩余类加群 Z_{20} 的作用下生成, 这里规定 ∞_l $(1\leqslant l\leqslant 3)$ 在这个加法群的作用下保持不变. 注意标 * 号的基区组在 Z_{20} 作用下仅生成 10 个不同的区组:

$$(\infty_1,0,1,6,8)\quad (0,2,9,\infty_1,12)\quad (\infty_2,0,1,7,14)\quad (0,2,5,\infty_2,14)\quad (\infty_3,0,1,3,4)$$
$$(0,5,11,\infty_3,18)\quad (1,11,0,10,\infty_3)^*\quad (1,13,0,2,6)\quad (4,5,0,1,14)\quad (9,15,0,1,8)$$
$$(7,12,0,2,11)\quad (14,17,0,2,16)\quad (7,10,0,3,15)\quad (3,9,0,12,5)\quad (9,13,0,4,14).$$

引理 3.5　存在型为 $(5^4:4)$ 的 $\mathrm{CS}(3,K_4^{(3)}+e,24)$.

证明　所要的设计构作在 $Z_{20} \cup \{\infty_1, \infty_2, \infty_3, \infty_4\}$ 上, 其组集为 $\{4Z_5 + j : 0 \leqslant j \leqslant 3\}$, 柄为 $\{\infty_1, \infty_2, \infty_3, \infty_4\}$. 所有的区组可以分成两个部分, 第一部分由 40 个区组组成:

$$\{(1+i, 2+i, i, 10+i, \infty_1) : 0 \leqslant i \leqslant 9\} \cup \{(1+i, 2+i, i, 10+i, \infty_2) : 10 \leqslant i \leqslant 19\}$$
$$\cup \{(i, 2+i, 7+i, 17+i, \infty_3) : 0 \leqslant i \leqslant 9\} \cup \{(i, 2+i, 7+i, 17+i, \infty_4) : 10 \leqslant i \leqslant 19\}.$$

第二部分的区组由如下基区组在剩余类加群 Z_{20} 的作用下生成, 这里规定 ∞_l $(1 \leqslant l \leqslant 4)$ 在这个加法群的作用下保持不变.

$(\infty_1, 0, 1, 3, 4)$　$(0, 5, 11, \infty_1, 18)$　$(\infty_2, 0, 1, 6, 8)$　$(0, 2, 9, \infty_2, 12)$　$(\infty_3, 0, 1, 7, 14)$
$(0, 2, 5, \infty_3, 14)$　$(\infty_4, 0, 1, 15, 13)$　$(0, 2, 13, \infty_4, 16)$　$(4, 5, 0, 1, 12)$　$(8, 11, 0, 1, 13)$
$(2, 14, 0, 4, 10)$　$(6, 11, 0, 2, 16)$　$(3, 6, 0, 14, 1)$　$(7, 16, 0, 3, 9)$　$(3, 8, 0, 15, 4)$.

引理 3.6　对于 $s = 3, 4$, 存在型为 $(5^5 : s)$ 的 $\mathrm{CS}(3, K_4^{(3)} + e, 25 + s)$.

证明　所要的设计构作在 $Z_{25} \cup \{\infty_1, \infty_2, \ldots, \infty_s\}$ 上, 其组集为 $\{5Z_5 + j : 0 \leqslant j \leqslant 4\}$, 柄为 $\{\infty_1, \infty_2, \ldots, \infty_s\}$. 记 $\mathcal{T}_s$ 是所构作设计的基区组集, 取 $\mathcal{T}_s = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}_s$, $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}_s$ 列举如下. 它的所有区组由基区组在剩余类加群 Z_{25} 的作用下生成, 这里规定 ∞_l $(1 \leqslant l \leqslant s)$ 在这个加法群的作用下保持不变.

$\mathcal{A}$:　$(0, 9, 1, 8, \infty_1)$　$(\infty_1, 1, 3, 0, \infty_2)$　$(\infty_1, 0, 13, 4, \infty_2)$　$(\infty_1, 6, 14, 0, \infty_2)$　$(0, 4, 17, \infty_2, 19)$
$(\infty_2, 7, 1, 0, 6)$　$(0, 1, 4, \infty_3, 12)$　$(\infty_3, 0, 2, 16, 7)$　$(\infty_3, 0, 7, 13, 11)$　$(0, 1, 10, 11, 4)$
$(0, 2, 4, 11, 8)$　$(0, 2, 7, 19, 16)$,

$\mathcal{B}_3$:　$(1, 13, 0, 5, 12)$　$(2, 22, 0, 1, 23)$　$(12, 14, 0, 1, 20)$　$(2, 8, 0, 5, 18)$　$(6, 10, 0, 2, 18)$
$(2, 12, 0, 15, 7)$　$(2, 17, 0, 20, 4)$　$(7, 17, 0, 3, 18)$　$(3, 9, 0, 14, 7)$　$(11, 19, 0, 3, 12)$
$(9, 15, 0, 4, 18)$　$(4, 10, 0, 16, 7)$,

$\mathcal{B}_4$:　$(0, 1, 12, \infty_4, 3)$　$(\infty_4, 0, 21, 18, 12)$　$(\infty_4, 0, 2, 8, 21)$　$(0, 1, 13, 24, 2)$　$(0, 1, 5, 21, 3)$
$(0, 1, 20, 22, 23)$　$(0, 2, 10, 17, 5)$　$(0, 2, 12, 15, 17)$　$(0, 2, 13, 20, 10)$　$(0, 3, 6, 11, 14)$
$(0, 3, 9, 18, 24)$　$(0, 3, 12, 17, 23)$　$(0, 4, 8, 16, 22)$　$(0, 4, 10, 14, 3)$.

引理 3.7　存在型为 $(10^3 : 3)$ 的 $\mathrm{CS}(3, K_4^{(3)} + e, 33)$.

证明　所要的设计构作在 $Z_{30} \cup \{\infty_1, \infty_2, \infty_3\}$ 上, 其组集为 $\{3Z_{10} + j : 0 \leqslant j \leqslant 2\}$, 柄为 $\{\infty_1, \infty_2, \infty_3\}$. 它的所有区组由以下基区组在 Z_{30} 的加法子群 $\{3i : i \in Z_{10}\}$ 作用下生成, 这里规定 ∞_l $(1 \leqslant l \leqslant 3)$ 在这个子群的作用下保持不变.

$(\infty_1, 0, 1, 5, 19)$　$(\infty_1, 20, 0, 7, 16)$　$(0, 2, 4, \infty_1, 5)$　$(0, 8, 13, \infty_1, 15)$　$(0, 10, 17, \infty_1, 18)$
$(0, 11, 19, \infty_1, 27)$　$(0, 14, 25, \infty_1, 11)$　$(0, 16, 26, \infty_1, 3)$　$(\infty_2, 0, 1, 8, 29)$　$(\infty_2, 7, 0, 2, 24)$
$(0, 4, 5, \infty_2, 6)$　$(0, 10, 14, \infty_2, 18)$　$(0, 20, 22, \infty_2, 6)$　$(0, 17, 28, \infty_2, 11)$　$(0, 11, 25, \infty_2, 6)$
$(0, 23, 13, \infty_2, 5)$　$(\infty_3, 0, 1, 17, 25)$　$(\infty_3, 25, 0, 2, 28)$　$(0, 7, 11, \infty_3, 13)$　$(0, 10, 23, \infty_3, 3)$
$(0, 14, 22, \infty_3, 3)$　$(0, 4, 29, \infty_3, 3)$　$(0, 8, 28, \infty_3, 15)$　$(0, 5, 16, \infty_3, 17)$　$(1, 3, 0, 2, 29)$
$(1, 4, 0, 6, 19)$　$(0, 9, 1, 7, 26)$　$(0, 10, 1, 11, 17)$　$(1, 13, 0, 12, 28)$　$(15, 0, 1, 14, 23)$

$(0,16,1,20,11)$ $(1,21,0,23,6)$ $(22,24,0,1,29)$ $(1,26,0,25,8)$ $(2,5,0,6,20)$

$(2,12,0,8,20)$ $(2,13,0,11,22)$ $(2,16,0,14,23)$ $(2,15,0,19,9)$ $(2,18,0,17,29)$

$(2,21,0,20,29)$ $(2,22,0,23,8)$ $(2,26,0,27,1)$ $(3,10,0,7,25)$ $(3,11,0,8,29)$

$(13,16,0,3,28)$ $(3,14,0,17,17)$ $(3,19,0,20,9)$ $(3,25,0,22,9)$ $(3,23,0,26,28)$

$(4,8,0,9,28)$ $(4,18,0,10,22)$ $(11,12,0,4,25)$ $(4,13,0,20,17)$ $(4,19,0,14,20)$

$(16,21,0,4,28)$ $(4,22,0,26,7)$ $(4,24,0,23,28)$ $(5,12,0,7,29)$ $(5,9,0,14,26)$

$(5,15,0,10,25)$ $(11,18,0,5,28)$ $(13,17,0,5,25)$ $(19,23,0,5,22)$ $(5,24,0,20,11)$

$(6,13,0,14,8)$ $(6,25,0,16,19)$ $(6,17,0,22,13)$ $(7,18,0,13,28)$ $(14,21,0,7,22)$

$(7,15,0,23,11)$ $(7,17,0,19,28)$ $(8,10,0,16,28)$ $(17,21,0,8,18)$ $(0,26,8,19,1)$

$(0,12,10,26,1)$ $(0,28,10,20,1)$ $(11,15,0,28,1)$ $(13,19,0,29,23)$ $(2,4,1,5,20)$

$(2,8,1,10,29)$ $(2,13,1,14,16)$ $(2,16,1,23,10)$ $(17,25,1,2,26)$ $(4,8,1,11,29)$

$(4,14,1,17,23)$ $(4,20,1,23,11)$ $(4,26,1,29,13)$ $(5,7,1,11,26)$ $(5,10,1,14,29)$

$(7,14,1,20,26)$ $(8,13,1,26,17)$.

引理 3.8 存在型为 $(10^3:4)$ 的 $\mathrm{CS}(3,K_4^{(3)}+e,34)$.

证明 所要的设计构作在 $Z_{30}\cup\{\infty_1,\infty_2,\infty_3,\infty_4\}$ 上, 其组集为 $\{3Z_{10}+j:0\leqslant j\leqslant 2\}$, 柄为 $\{\infty_1,\infty_2,\infty_3,\infty_4\}$. 它的所有区组由以下基区组在 Z_{30} 的加法子群 $\{3i:i\in Z_{10}\}$ 作用下生成, 这里规定 $\infty_l(1\leqslant l\leqslant 4)$ 在这个子群的作用下保持不变.

$(\infty_1,5,0,1,26)$ $(\infty_1,20,0,7,18)$ $(0,2,4,\infty_1,5)$ $(0,8,13,\infty_1,15)$ $(0,10,17,\infty_1,18)$

$(0,11,19,\infty_1,27)$ $(0,14,25,\infty_1,11)$ $(0,16,26,\infty_1,3)$ $(\infty_2,0,1,8,26)$ $(\infty_2,7,0,2,24)$

$(0,4,5,\infty_2,6)$ $(0,10,14,\infty_2,18)$ $(0,20,22,\infty_2,6)$ $(0,17,28,\infty_2,11)$ $(0,11,25,\infty_2,6)$

$(0,23,13,\infty_2,5)$ $(\infty_3,1,0,17,23)$ $(\infty_3,0,2,25,1)$ $(0,7,11,\infty_3,13)$ $(0,10,23,\infty_3,3)$

$(0,14,22,\infty_3,3)$ $(0,4,29,\infty_3,3)$ $(0,8,28,\infty_3,15)$ $(0,5,16,\infty_3,17)$ $(\infty_4,0,1,14,23)$

$(\infty_4,0,2,16,1)$ $(0,10,20,\infty_4,27)$ $(0,17,25,\infty_4,3)$ $(0,19,26,\infty_4,7)$ $(1,5,27,\infty_4,2)$

$(0,11,13,\infty_4,8)$ $(2,1,3,\infty_4,10)$ $(0,6,1,2,28)$ $(1,3,0,4,18)$ $(0,9,1,7,14)$

$(1,10,0,11,18)$ $(12,13,0,1,25)$ $(1,15,0,22,10)$ $(1,16,0,20,11)$ $(1,21,0,23,4)$

$(1,24,0,29,9)$ $(0,3,2,5,1)$ $(2,12,0,8,26)$ $(2,11,0,15,8)$ $(0,2,13,14,22)$

$(17,18,0,2,28)$ $(2,20,0,19,10)$ $(2,21,0,26,7)$ $(0,22,2,23,1)$ $(3,7,0,10,25)$

$(3,8,0,11,28)$ $(3,16,0,13,26)$ $(3,17,0,14,20)$ $(3,19,0,22,11)$ $(3,20,0,23,16)$

$(3,25,0,28,12)$ $(3,29,0,26,10)$ $(4,6,0,10,18)$ $(4,13,0,9,23)$ $(11,12,0,4,19)$

$(4,14,0,15,10)$ $(16,17,0,4,20)$ $(4,22,0,26,12)$ $(5,12,0,10,28)$ $(0,13,5,15,27)$

$(0,14,5,19,1)$ $(5,21,0,17,11)$ $(5,18,0,25,13)$ $(20,24,0,5,23)$ $(5,26,0,28,14)$

$(13,19,0,6,28)$ $(0,6,14,16,1)$ $(6,17,0,22,13)$ $(6,29,0,20,9)$ $(6,23,0,25,12)$

$(0,7,8,14,1)$ $(19,21,0,7,22)$ $(7,23,0,29,11)$ $(8,17,0,9,22)$ $(0,22,8,16,1)$

$(8,19,0,23,11)$ $(8,25,0,20,13)$ $(9,25,0,19,28)$ $(17,29,0,13,28)$ $(16,25,0,29,5)$
$(7,8,5,10,1)$ $(5,13,7,11,4)$ $(7,16,5,23,1)$ $(5,17,7,25,0)$ $(5,19,7,26,1)$
$(5,20,7,28,0)$ $(5,16,8,13,1)$ $(19,22,5,8,1)$ $(5,28,8,25,3)$ $(10,22,5,11,1)$
$(5,19,10,29,0)$ $(16,22,5,26,1)$ $(19,20,5,25,10)$.

引理 3.9 对于 $s \in \{3,4\}$, 存在型为 $(10^4:s)$ 的 $\mathrm{CS}(3,K_4^{(3)}+e,40+s)$.

证明 所要的设计构作在 $Z_{40}\cup\{\infty_1,\infty_2,\ldots,\infty_s\}$ 上, 其组集为 $\{4Z_{10}+j:0\leqslant j\leqslant 3\}$, 柄为 $\{\infty_1,\infty_2,\ldots,\infty_s\}$. 记 $\mathcal{T}_s$ 是所构作设计的基区组集, 取 $\mathcal{T}_s=\mathcal{A}\cup\mathcal{B}_s$, $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}_s$ 列举如下. 它的所有区组由基区组在剩余类加群 Z_{40} 的作用下生成, 这里规定 ∞_l $(1\leqslant l\leqslant s)$ 在这个加法群的作用下保持不变.

$\mathcal{A}$: $(\infty_1,3,0,1,32)$ $(0,5,11,\infty_1,20)$ $(0,7,21,\infty_1,36)$ $(0,10,23,\infty_1,1)$ $(\infty_2,7,0,1,34)$
$(0,2,5,\infty_2,14)$ $(0,10,27,\infty_2,9)$ $(0,14,29,\infty_2,10)$ $(\infty_3,11,0,1,35)$ $(0,9,22,\infty_3,39)$
$(0,2,7,\infty_3,21)$ $(0,25,19,\infty_3,16)$ $(3,5,0,4,30)$ $(1,5,0,8,27)$ $(1,6,0,10,22)$
$(1,13,0,12,27)$ $(0,16,1,15,12)$ $(1,18,0,17,13)$ $(1,19,0,20,10)$ $(1,30,0,27,7)$
$(1,31,0,33,2)$ $(2,13,0,4,31)$ $(2,6,0,8,29)$ $(2,14,0,12,26)$ $(15,17,0,2,35)$
$(2,16,0,18,24)$ $(2,20,0,23,8)$ $(2,21,0,29,9)$ $(2,31,0,22,8)$ $(3,12,0,6,33)$
$(3,17,0,7,29)$ $(3,15,0,10,13)$ $(3,16,0,11,26)$ $(3,18,0,23,4)$ $(3,25,0,21,10)$
$(3,31,0,26,13)$ $(3,27,0,32,7)$ $(4,17,0,10,26)$ $(4,15,0,11,28)$ $(4,25,0,18,8)$
$(4,21,0,26,8)$ $(5,31,0,10,28)$ $(18,34,0,5,28)$ $(5,20,0,27,6)$ $(0,20,6,14,16)$
$(15,23,0,6,29)$ $(6,16,0,25,10)$ $(6,18,0,31,7)$ $(6,19,0,30,8)$ $(7,14,0,23,9)$
$(7,15,0,24,10)$,

$\mathcal{B}_3$: $(4,9,1,0,14)$ $(24,19,3,0,2)$ $(33,28,3,0,34)$ $(6,28,17,0,38)$ $(19,28,0,7,18)$,

$\mathcal{B}_4$: $(\infty_4,14,0,1,38)$ $(0,7,18,\infty_4,33)$ $(0,2,19,\infty_4,24)$ $(0,34,3,\infty_4,33)$ $(1,4,0,9,21)$
$(3,24,0,19,7)$ $(3,33,0,28,9)$ $(6,17,0,28,7)$.

引理 3.10 存在型为 $(10^5:3)$ 的 $\mathrm{CS}(3,K_4^{(3)}+e,53)$.

证明 所要的设计构作在 $Z_{50}\cup\{\infty_1,\infty_2,\infty_3\}$ 上, 其组集为 $\{5Z_{10}+j:0\leqslant j\leqslant 4\}$, 柄为 $\{\infty_1,\infty_2,\infty_3\}$. 所有的基区组可以分成两个部分, 第一部分由 28 个基区组组成:

$(0,2,35,38,18)$ $(22,48,0,15,18)$ $(22,18,0,35,8)$ $(16,46,0,33,47)$ $(15,28,0,42,24)$
$(42,48,0,35,32)$ $(13,6,0,26,3)$ $(0,8,12,15,49)$ $(0,35,12,28,10)$ $(43,16,0,36,6)$
$(32,38,0,15,2)$ $(0,46,23,26,29)$ $(15,16,0,1,9)$ $(17,27,0,1,42)$ $(11,49,0,10,9)$
$(41,19,0,10,1)$ $(11,26,0,15,6)$ $(11,20,0,9,35)$ $(47,7,0,41,6)$ $(29,20,0,41,15)$
$(21,36,0,15,46)$ $(29,10,0,31,16)$ $(27,37,0,31,46)$ $(39,20,0,31,15)$ $(0,20,1,19,40)$
$(0,11,37,47,26)$ $(7,17,0,21,10)$ $(49,20,0,21,39)$.

第二部分的基区组由下面 12 个基区组中的每一个乘以 11^i $(i=0,1,2,3,4)$ 得到. 它的所有区组由基

区组在剩余类加群 Z_{50} 的作用下生成, 这里规定对于任意 $1 \leqslant l \leqslant 3$, 有 $11\infty_l = \infty_l$, 且 ∞_l 在 Z_{50} 的作用下保持不变.

$(1,2,0,4,\infty_1)$ $(23,33,0,1,\infty_1)$ $(0,7,2,5,\infty_1)$ $(6,40,0,2,\infty_1)$ $(5,6,0,1,\infty_2)$
$(1,14,0,13,\infty_2)$ $(1,26,0,24,\infty_2)$ $(8,22,0,2,\infty_2)$ $(7,8,0,1,\infty_3)$ $(1,18,0,48,\infty_3)$
$(1,25,0,47,\infty_3)$ $(1,28,0,34,\infty_3)$.

引理 3.11 存在型为 $(10^5:4)$ 的 $\mathrm{CS}(3,K_4^{(3)}+e,54)$.

证明 所要的设计构作在 $Z_{50}\cup\{\infty_1,\infty_2,\infty_3,\infty_4\}$ 上, 其组集为 $\{5Z_{10}+j:0\leqslant j\leqslant 4\}$, 柄为 $\{\infty_1,\infty_2,\infty_3,\infty_4\}$. 所有的基区组可以分成两个部分, 第一部分由 12 个基区组组成:

$(0,2,35,38,18)$ $(22,48,0,15,18)$ $(22,18,0,35,8)$ $(16,46,0,33,47)$ $(15,28,0,42,24)$
$(42,48,0,35,32)$ $(13,6,0,26,3)$ $(0,8,12,15,49)$ $(0,35,12,28,10)$ $(43,16,0,36,6)$
$(32,38,0,15,2)$ $(0,46,23,26,29)$.

第二部分的基区组由下面 16 个基区组中的每一个乘以 11^i $(i=0,1,2,3,4)$ 得到. 它的所有区组由基区组在剩余类加群 Z_{50} 的作用下生成, 这里规定对于任意 $1\leqslant l\leqslant 4$, 有 $11\infty_l=\infty_l$, 且 ∞_l 在 Z_{50} 的作用下保持不变.

$(1,2,0,4,\infty_1)$ $(23,33,0,1,\infty_1)$ $(0,7,2,5,\infty_1)$ $(6,40,0,2,\infty_1)$ $(5,6,0,1,\infty_2)$
$(1,14,0,13,\infty_2)$ $(1,26,0,24,\infty_2)$ $(8,22,0,2,\infty_2)$ $(7,8,0,1,\infty_3)$ $(1,18,0,48,\infty_3)$
$(1,25,0,47,\infty_3)$ $(1,28,0,34,\infty_3)$ $(9,10,0,1,\infty_4)$ $(0,16,1,15,\infty_4)$ $(1,27,0,17,\infty_4)$
$(0,20,1,19,\infty_4)$.

引理 3.12 存在型为 $(15^2:0)$ 的 $\mathrm{CS}(3,K_4^{(3)}+e,30)$.

证明 所要的设计构作在 Z_{30} 上, 其组集为 $\{2Z_{15}+j:j=0,1\}$, 柄为空集. 它的所有区组由以下基区组在剩余类加群 Z_{30} 的作用下生成.

$(0,1,2,5,3)$ $(0,1,6,7,2)$ $(0,1,8,9,5)$ $(0,1,10,11,8)$ $(0,1,12,15,2)$
$(0,1,13,18,2)$ $(0,1,14,17,5)$ $(0,1,16,19,8)$ $(0,2,7,9,4)$ $(0,2,11,19,16)$
$(0,2,13,17,4)$ $(0,2,15,21,10)$ $(0,3,6,11,16)$ $(0,3,7,12,19)$ $(0,3,9,26,4)$
$(0,3,10,23,15)$ $(0,3,13,24,8)$ $(0,4,11,23,2)$ $(0,4,15,25,10)$ $(0,5,14,21,7)$
$(0,6,13,21,28)$.

对于 $s=3,4$, 为了构造型为 $(15^4:s)$ 的 $\mathrm{CS}(3,K_4^{(3)}+e,60+s)$, 需要引入一种特殊的辅助设计, $\mathrm{GDD}^*(15^4:s)$. 它是一个有序四元组 $(X,S,\mathcal{G},\mathcal{B})$, 其中 $X=Z_{60}\cup\{\infty_1,\infty_2,\ldots,\infty_s\}$, $S=\{\infty_1,\infty_2,\ldots,\infty_s\}$, $\mathcal{G}=\{4Z_{15}+j:0\leqslant j\leqslant 3\}$, 要求对于任意一个 X 的 3- 子集 T, 如果 $|T\cap S|\leqslant 1$ 且 $|T\cap G|\leqslant 1$, 这里 G 可以是 $\mathcal{G}$ 中任意一个组, 那么 T 含在 $\mathcal{B}$ 的唯一一个区组中; 否则, T 不出现在任何区组中. □

引理 3.13 存在 $\mathrm{GDD}^*(15^4:3)$.

证明 所有的区组可以分成两个部分, 第一部分由 60 个区组构成:

$$\{(5+i,27+i,30+i,i,\infty_2):0\leqslant i\leqslant 29\}\cup\{(5+i,27+i,30+i,i,\infty_3):30\leqslant i\leqslant 59\}.$$

第二部分的区组由下面的基区组在剩余类加群 Z_{60} 的作用下生成, 这里规定 ∞_l $(1 \leqslant l \leqslant 3)$ 在这个加法群的作用下保持不变. 注意打 * 号的基区组在 Z_{60} 作用下仅生成 30 个不同的区组.

$(\infty_1, 7, 0, 1, 58)$ $(\infty_1, 2, 0, 13, 38)$ $(0, 3, 17, \infty_1, 22)$ $(0, 9, 27, \infty_1, 46)$ $(0, 10, 31, \infty_1, 56)$
$(0, 15, 37, \infty_1, 3)$ $(11, 41, 30, 0, \infty_1)^*$ $(\infty_2, 1, 0, 15, 30)$ $(\infty_2, 0, 2, 21, 44)$ $(0, 3, 9, \infty_2, 14)$
$(0, 7, 17, \infty_2, 35)$ $(0, 11, 34, \infty_2, 1)$ $(0, 13, 35, \infty_2, 4)$ $(\infty_3, 1, 0, 10, 47)$ $(\infty_3, 2, 0, 15, 6)$
$(0, 3, 14, \infty_3, 19)$ $(0, 6, 25, \infty_3, 43)$ $(0, 7, 33, \infty_3, 56)$ $(0, 17, 39, \infty_3, 8)$ $(1, 2, 0, 19, 38)$
$(1, 3, 0, 26, 7)$ $(11, 14, 0, 1, 6)$ $(1, 23, 0, 22, 7)$ $(0, 1, 27, 42, 49)$ $(30, 43, 0, 1, 51)$
$(1, 34, 0, 31, 41)$ $(1, 46, 0, 35, 6)$ $(0, 47, 1, 54, 32)$ $(1, 55, 0, 50, 7)$ $(2, 5, 0, 7, 41)$
$(2, 31, 0, 9, 19)$ $(2, 17, 0, 27, 10)$ $(2, 35, 0, 29, 11)$ $(2, 39, 0, 33, 11)$ $(2, 37, 0, 47, 5)$
$(2, 51, 0, 41, 10)$ $(0, 2, 43, 49, 22)$ $(3, 21, 0, 6, 45)$ $(13, 42, 0, 3, 53)$ $(3, 37, 0, 22, 9)$
$(3, 34, 0, 25, 19)$ $(3, 41, 0, 46, 9)$ $(3, 54, 0, 45, 14)$ $(5, 31, 0, 14, 41)$ $(15, 42, 0, 5, 50)$
$(5, 18, 0, 39, 14)$ $(23, 34, 0, 5, 46)$ $(5, 26, 0, 35, 17)$ $(5, 51, 0, 38, 11)$ $(5, 54, 0, 43, 21)$
$(6, 43, 0, 13, 26)$ $(23, 37, 0, 6, 47)$ $(18, 25, 0, 7, 46)$ $(7, 21, 0, 34, 17)$ $(9, 23, 0, 42, 17)$
$(35, 49, 0, 10, 33)$ $(2, 11, 0, 45, 31)$ $(33, 38, 0, 3, 10)$.

引理 3.14 存在 $\mathrm{GDD}^*(15^4 : 4)$.

证明 所有的区组可以分成两个部分, 第一部分由 120 个区组构成:

$$\{(7+i, 9+i, 30+i, i, \infty_1) : 0 \leqslant i \leqslant 29\} \cup \{(7+i, 9+i, 30+i, i, \infty_2) : 30 \leqslant i \leqslant 59\}$$
$$\cup \{(5+i, 27+i, 30+i, i, \infty_3) : 0 \leqslant i \leqslant 29\} \cup \{(5+i, 27+i, 30+i, i, \infty_4) : 30 \leqslant i \leqslant 59\}.$$

第二部分的区组由下面的基区组在剩余类加群 Z_{60} 的作用下生成, 这里规定 ∞_l $(1 \leqslant l \leqslant 4)$ 在这个加法群的作用下保持不变.

$(\infty_1, 6, 0, 1, 51)$ $(\infty_1, 2, 0, 11, 41)$ $(0, 3, 10, \infty_1, 23)$ $(0, 14, 29, \infty_1, 54)$ $(0, 17, 38, \infty_1, 4)$
$(0, 18, 37, \infty_1, 4)$ $(\infty_2, 7, 0, 1, 58)$ $(\infty_2, 2, 0, 13, 38)$ $(0, 3, 17, \infty_2, 22)$ $(0, 9, 27, \infty_2, 46)$
$(0, 10, 31, \infty_2, 56)$ $(0, 15, 37, \infty_2, 3)$ $(\infty_3, 1, 0, 15, 30)$ $(\infty_3, 21, 0, 2, 45)$ $(0, 3, 9, \infty_3, 14)$
$(0, 7, 17, \infty_3, 35)$ $(0, 11, 34, \infty_3, 1)$ $(0, 13, 35, \infty_3, 4)$ $(\infty_4, 1, 0, 10, 47)$ $(\infty_4, 2, 0, 15, 6)$
$(0, 3, 14, \infty_4, 19)$ $(0, 6, 25, \infty_4, 43)$ $(0, 7, 33, \infty_4, 56)$ $(0, 17, 39, \infty_4, 8)$ $(1, 2, 0, 19, 38)$
$(1, 3, 0, 26, 7)$ $(1, 14, 0, 11, 45)$ $(1, 23, 0, 22, 7)$ $(0, 1, 27, 42, 49)$ $(1, 43, 0, 30, 11)$
$(1, 34, 0, 31, 41)$ $(1, 46, 0, 35, 6)$ $(0, 47, 1, 54, 32)$ $(1, 55, 0, 50, 7)$ $(2, 5, 0, 7, 41)$
$(2, 31, 0, 9, 19)$ $(2, 17, 0, 27, 10)$ $(2, 35, 0, 29, 11)$ $(2, 39, 0, 33, 11)$ $(2, 37, 0, 47, 5)$
$(2, 51, 0, 41, 10)$ $(0, 2, 43, 49, 22)$ $(3, 21, 0, 6, 45)$ $(13, 42, 0, 3, 53)$ $(3, 37, 0, 22, 9)$
$(3, 34, 0, 25, 19)$ $(3, 41, 0, 46, 9)$ $(3, 54, 0, 45, 14)$ $(5, 31, 0, 14, 41)$ $(15, 42, 0, 5, 50)$
$(5, 18, 0, 39, 14)$ $(23, 34, 0, 5, 46)$ $(5, 26, 0, 35, 17)$ $(5, 51, 0, 38, 11)$ $(5, 54, 0, 43, 9)$
$(6, 43, 0, 13, 26)$ $(23, 37, 0, 6, 47)$ $(18, 25, 0, 7, 46)$ $(7, 21, 0, 34, 17)$ $(9, 23, 0, 42, 17)$
$(35, 49, 0, 10, 33)$.

引理 3.15　对于 $s\in\{3,4\}$, 存在型为 $(15^4:s)$ 的 $\mathrm{CS}(3,K_4^{(3)}+e,60+s)$.

证明　所要的设计将构作在 $X=Z_{60}\cup\{\infty_1,\infty_2,\ldots,\infty_s\}$ 上, 它的柄为 $S=\{\infty_1,\infty_2,\ldots,\infty_s\}$, 组集合为 $\mathcal{G}=\{G_0,G_1,G_2,G_3\}$, 其中 $G_j=4Z_{15}+j$, $0\leqslant j\leqslant 3$. 具体的构造方法如下.

首先对于满足 $0\leqslant a<b\leqslant 3$ 的所有 a 和 b, 在集合 $G_a\cup G_b$ 上构造一个型为 $(15^2:0)$ 的 $\mathrm{CS}(3,K_4^{(3)}+e,30)$, 它的组集合是 $\{G_a,G_b\}$, 这样的设计根据引理 3.12 是存在的, 记它的区组集为 $\mathcal{T}_{a,b}$. 接着在集合 X 上构造一个组集为 $\mathcal{G}$, 柄为 S 的 $\mathrm{GDD}^*(15^4:s)$, 这个设计由引理 3.13 和 3.14 是存在的, 记它的区组集是 $\mathcal{B}$. 设 $\mathcal{A}=(\bigcup_{0\leqslant a<b\leqslant 3}\mathcal{T}_{a,b})\cup\mathcal{B}$. 可以验证 $\mathcal{A}$ 是所要构造设计的区组集.　□

引理 3.16　对于 $s\in\{3,4\}$, 存在 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;5+s,s)$.

证明　在例 1.1 中, 我们构造了一个 $MP(3,K_4^{(3)}+e,8)$, 可以验证它也构成一个洞为 $\{5,6,7\}$ 的 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;8,3)$. 下面构造一个 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;9,4)$, 取它的点集合是 $\{0,1,\ldots,8\}$, 洞为 $\{5,6,7,8\}$, 其区组列举如下:

$$
\begin{array}{llllll}
(1,7,2,4,0) & (4,6,3,7,0) & (2,8,0,5,1) & (1,5,3,7,2) & (2,4,6,8,0) & (0,7,2,6,3)\\
(0,3,1,2,8) & (0,4,1,6,7) & (0,4,3,8,7) & (0,6,3,5,8) & (0,4,5,7,2) & (1,2,5,6,4)\\
(1,6,3,8,2) & (1,5,4,8,7) & (2,5,3,4,1) & (0,1,7,8,2). & &
\end{array}
$$

引理 3.17　存在 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;13,3)$.

证明　所要的设计构作在 $\{0,1,\ldots,12\}$ 上, 取洞为 $\{10,11,12\}$. 其区组列举如下:

$$
\begin{array}{lllll}
(0,1,2,3,4) & (0,4,1,5,11) & (0,6,1,7,10) & (0,8,1,9,2) & (0,1,10,11,5)\\
(4,6,0,2,11) & (2,7,0,5,10) & (0,8,2,10,6) & (2,12,0,9,4) & (4,8,0,3,7)\\
(0,3,5,9,8) & (0,3,6,10,11) & (0,3,11,12,8) & (0,4,7,11,12) & (0,12,4,10,11)\\
(0,12,5,6,3) & (0,8,5,11,12) & (0,11,6,9,8) & (7,12,0,8,6) & (0,7,9,10,11)\\
(1,2,4,7,8) & (1,2,5,6,10) & (1,11,2,8,7) & (1,2,10,12,7) & (1,3,4,10,7)\\
(5,12,1,3,8) & (1,3,6,9,5) & (1,3,7,11,5) & (1,12,4,8,10) & (9,11,1,4,6)\\
(1,7,5,8,12) & (1,10,5,9,7) & (1,6,8,10,12) & (6,11,1,12,0) & (1,12,7,9,11)\\
(2,3,5,8,10) & (2,6,3,11,9) & (2,3,7,12,5) & (2,9,3,10,12) & (2,4,5,10,12)\\
(2,4,8,9,7) & (4,11,2,12,5) & (2,9,5,11,6) & (2,9,6,7,10) & (2,12,6,8,5)\\
(2,10,7,11,6) & (3,11,4,5,8) & (3,4,6,12,10) & (3,9,4,7,12) & (3,5,7,10,8)\\
(3,6,7,8,11) & (3,8,9,12,11) & (3,11,8,10,9) & (4,5,6,7,12) & (4,5,9,12,6)\\
(4,6,8,11,9) & (4,6,9,10,12). & & &
\end{array}
$$

引理 3.18　存在 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;14,4)$.

证明　所要的设计构作在 $\{0,1,\ldots,13\}$ 上, 取洞为 $\{10,11,12,13\}$. 其区组列举如下:

$$
\begin{array}{lllll}
(3,8,0,4,6) & (5,13,0,3,1) & (3,10,0,6,7) & (3,7,0,9,2) & (3,12,0,11,9)\\
(4,11,0,7,1) & (13,9,0,4,5) & (4,10,0,12,9) & (5,6,0,12,2) & (8,11,0,5,7)\\
(5,9,0,10,8) & (8,9,0,6,1) & (6,13,0,11,10) & (7,12,0,8,13) & (0,13,7,10,6)\\
(4,7,1,2,0) & (5,6,1,2,3) & (1,11,2,8,10) & (1,9,2,13,0) & (2,10,1,12,9)
\end{array}
$$

$(3,10,1,4,0)$	$(3,12,1,5,0)$	$(3,6,1,13,8)$	$(3,7,1,11,10)$	$(3,9,1,8,0)$
$(4,9,1,6,7)$	$(4,8,1,12,0)$	$(4,13,1,11,0)$	$(1,8,5,7,2)$	$(5,10,1,13,0)$
$(5,11,1,9,0)$	$(6,8,1,10,0)$	$(1,12,6,11,7)$	$(1,7,13,12,0)$	$(1,9,7,10,12)$
$(4,9,2,3,0)$	$(2,3,5,8,10)$	$(3,6,2,11,0)$	$(3,12,2,7,0)$	$(2,3,13,10,8)$
$(4,5,2,10,0)$	$(4,13,2,8,0)$	$(11,12,2,4,0)$	$(5,11,2,13,12)$	$(12,9,2,5,0)$
$(2,6,7,13,8)$	$(2,8,6,12,7)$	$(10,9,2,6,0)$	$(2,8,7,9,11)$	$(7,10,2,11,9)$
$(3,11,4,5,1)$	$(3,12,4,6,2)$	$(3,4,7,13,11)$	$(3,5,6,9,13)$	$(3,7,5,10,12)$
$(3,6,7,8,11)$	$(3,13,8,12,9)$	$(3,10,8,11,9)$	$(3,9,13,11,8)$	$(3,9,10,12,8)$
$(4,5,6,7,9)$	$(4,9,5,8,12)$	$(4,5,13,12,6)$	$(4,6,8,11,12)$	$(4,6,13,10,9)$
$(4,7,8,10,9)$	$(4,7,12,9,6)$	$(4,10,11,9,6)$	$(5,6,8,13,9)$	$(5,11,6,10,12)$
$(5,7,13,9,12)$	$(5,7,11,12,9)$.			

4 主要结果

本节将证明本文的主要结果. 下面总是用记号 $\dot\cup$ 表示多重集的并.

引理 4.1 (1) 对于任意正整数 $v\equiv 13 \pmod{20}$, 存在 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;v,3)$.

(2) 对于任意正整数 $v\equiv 14 \pmod{20}$, 存在 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;v,4)$.

证明 设 $v=20u+10+s$, 其中 u 是一个非负整数, $s\in\{3,4\}$. 当 $u=0$ 时, 由引理 3.17 和 3.18, 存在 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;10+s,s)$.

当 $u=1$ 时, 根据引理 3.7 和 3.8, 存在型为 $(10^3:s)$ 的$\mathrm{CS}(3,K_4^{(3)}+e,30+s)$. 于是利用已经构造的 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;10+s,s)$, 并利用构造 2.3, 可以得到需要构造的 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;30+s,s)$.

当 $u=2$ 时, 根据引理 3.10 和 3.11, 存在型为 $(10^5:s)$ 的$\mathrm{CS}(3,K_4^{(3)}+e,50+s)$. 于是利用已经构造的 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;10+s,s)$, 并利用构造 2.3, 可以得到需要构造的 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;50+s,s)$.

当 $u\geqslant 3$ 时, 根据引理 2.2, 存在型为 $(2^u:2)$ 的$\mathrm{CS}(3,\{4,6\},2u+2)$. 因为根据引理 2.4, 对于每个 $a=4,6$, 都存在型为 10^a 的 $\mathrm{GDD}(3,K_4^{(3)}+e,10a)$, 又根据引理 3.7, 3.8, 3.10 和 3.11, 对于每个 $b=3,5$, 都存在型为 $(10^b:s)$ 的 $(3,K_4^{(3)}+e,10b+s)$, 所以应用构造 2.5 可得型为 $(20^u:10+s)$ 的$\mathrm{CS}(3,K_4^{(3)}+e,20u+10+s)$. 因此, 如果能够构造出 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;30+s,10+s)$, 就可以利用构造 2.3, 得到需要构造的 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;20u+10+s,s)$.

这样下面只需构造 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;30+s,10+s)$. 根据引理 3.7 和 3.8, 存在型为 $(10^3:s)$ 的 $\mathrm{CS}(3,K_4^{(3)}+e,30+s)$. 于是利用已经构造的 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;10+s,s)$, 并利用构造 2.3, 可以得到需要构造的 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;30+s,10+s)$. □

引理 4.2 (1) 对于任意正整数 $v\equiv 3,8,18 \pmod{20}$, 存在 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;v,3)$.

(2) 对于任意正整数 $v\equiv 4,9,19 \pmod{20}$, 存在 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;v,4)$.

证明 设 $v=5u+s$, 其中 $u\equiv 0,1,3 \pmod 4$, $s\in\{3,4\}$. 当 $u=0$ 时, 所要构造的 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;s,s)$ 不含任何区组, 是平凡的情况. 当 $u=1,2$ 时, 由引理 3.16–3.18, 存在 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;5u+s,s)$.

当 $u\geqslant 3$ 且 $u\neq 8,12$ 时, 根据引理 2.1, 存在型为 $(1^u:1)$ 的 $\mathrm{CS}(3,\{4,5,6\},u+1)$. 因为根据引理 2.4 和 3.2, 对于每个 $a=4,5,6$, 都存在型为 5^a 的 $\mathrm{GDD}(3,K_4^{(3)}+e,5a)$, 又根据引理 3.3–3.6, 对于每

个 $b=3,4,5$, 都存在型为 $(5^b:s)$ 的 $\mathrm{CS}(3,K_4^{(3)}+e,5b+s)$, 所以应用构造 2.5 可得到型为 $(5^u:s)$ 的 $\mathrm{CS}(3,K_4^{(3)}+e,5u+s)$. 于是利用已经构造的 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;5+s,s)$, 并利用构造 2.3, 可以得到需要构造的 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;5u+s,s)$.

当 $u=8$ 时, 根据引理 3.9, 存在型为 $(10^4:s)$ 的 $\mathrm{CS}(3,K_4^{(3)}+e,40+s)$. 于是利用已经构造的 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;10+s,s)$, 并利用构造 2.3, 可以得到需要构造的 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;40+s,s)$.

当 $u=12$ 时, 根据引理 3.15, 存在型为 $(15^4:s)$ 的 $\mathrm{CS}(3,K_4^{(3)}+e,60+s)$. 于是利用已经构造的 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;15+s,s)$, 并利用构造 2.3, 可以得到需要构造的 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;60+s,s)$. □

结合引理 4.1 和 4.2 的结果, 可以得到下面的推论.

推论 4.3 (1) 对于任意正整数 $v\equiv 3 \pmod 5$, 存在 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;v,3)$.

(2) 对于任意正整数 $v\equiv 4 \pmod 5$, 存在 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;v,4)$.

引理 4.4 $S_\lambda(3,K_4^{(3)}+e,v)$ 存在的必要条件是 $\lambda v(v-1)(v-2)\equiv 0 \pmod{30}$ 且 $v\geqslant 5$. 这个必要条件除去 $(v,\lambda)\in\{(5,1),(6,1)\}$ 外也是充分的.

证明 通过计算 $S_\lambda(3,K_4^{(3)}+e,v)$ 中的区组数, 为确保这个数是整数, 可以得到必要条件 $\lambda v(v-1)(v-2)\equiv 0 \pmod{30}$. 又由引理 1.3, 不存在 $S(3,K_4^{(3)}+e,5)$ 和 $S(3,K_4^{(3)}+e,6)$. 下面证明充分性.

当 $v\equiv 0,1,2 \pmod 5$ 且 $v\geqslant 7$ 时, 由引理 1.3, 存在 $S(3,K_4^{(3)}+e,v)$. 将 $S(3,K_4^{(3)}+e,v)$ 中的每个区组复制 λ 份, $\lambda\geqslant 1$, 则得到一个 $S_\lambda(3,K_4^{(3)}+e,v)$. 当 $v\in\{5,6\}$ 且 $\lambda\in\{2,3\}$, 根据引理 3.1, 存在 $S_\lambda(3,K_4^{(3)}+e,v)$. 当 $v\in\{5,6\}$ 且 $\lambda\geqslant 4$, 此时, λ 总可以写成 $2r+3t$ 的形式, 其中 r 和 t 是非负整数. 于是只要将 $S_2(3,K_4^{(3)}+e,v)$ 中的每个区组复制 r 份, $S_3(3,K_4^{(3)}+e,v)$ 中的每个区组复制 t 份, 就可以得到一个 $S_\lambda(3,K_4^{(3)}+e,v)$.

因此, 为了完成充分性的证明, 现在只需考虑 $v\equiv 3,4 \pmod 5$ 且 $\lambda\equiv 0 \pmod 5$ 的情况. 下面首先将对任意 $v\equiv 3,4 \pmod 5$ 且 $v\geqslant 5$, 证明 $S_5(3,K_4^{(3)}+e,v)$ 的存在性.

当 $v\equiv 3 \pmod 5$ 时, 根据推论 4.3, 存在 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;v,3)$. 取 5 个 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;v,3)$, 分别设为 $(X,Y_i,\mathcal{B}_i)$, $1\leqslant i\leqslant 5$. 设 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 是 X 中 5 个不同的点. 不失一般性, 可以假设 $Y_1=\{x_1,x_2,x_3\}$, $Y_2=\{x_1,x_2,x_4\}$, $Y_3=\{x_1,x_3,x_4\}$, $Y_4=\{x_2,x_3,x_4\}$, $Y_5=\{x_3,x_4,x_5\}$. 可以验证 $(\dot\bigcup_{i=1}^5\mathcal{B}_i)\,\dot\cup\,\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\}$ 构成了所需构造的 $S_5(3,K_4^{(3)}+e,v)$ 的区组集.

当 $v\equiv 4 \pmod 5$ 时, 根据推论 4.3, 存在 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;v,4)$. 取 5 个 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;v,4)$, 分别设为 $(X,Y_i,\mathcal{B}_i)$, $1\leqslant i\leqslant 5$. 设 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 是 X 中 5 个不同的点. 不失一般性, 可以假设 $Y_1=Y_2=Y_3=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, $Y_4=\{x_1,x_2,x_3,x_5\}$, $Y_5=\{x_1,x_3,x_4,x_5\}$. 构造 4 个新区组 (x_2,x_4,x_1,x_3,x_5), (x_2,x_3,x_1,x_4,x_5), $(x_1,x_2,x_3,x_4,\ x_5)$ 和 (x_2,x_5,x_1,x_3,x_4). 记这 4 个新区组的集合是 $\mathcal{A}$. 可以验证 $(\dot\bigcup_{i=1}^5\mathcal{B}_i)\,\dot\cup\,\mathcal{A}$ 构成了所需构造的 $S_5(3,K_4^{(3)}+e,v)$ 的区组集.

最后, 为了证明 $\lambda\equiv 0 \pmod 5$ 的一般情况, 只需要将 $S_5(3,K_4^{(3)}+e,v)$ 中的每个区组复制 r 次, $r\geqslant 1$, 就可以得到需要构造的 $S_\lambda(3,K_4^{(3)}+e,v)$, 其中 $\lambda=5r\equiv 0 \pmod 5$. □

引理 4.5 对于任意正整数 λ 和任意整数 $v\equiv 3,4 \pmod 5$ 且 $v\geqslant 8$, 存在具有 $\lfloor\lambda v(v-1)(v-2)/30\rfloor$ 个区组的极大填充 $P_\lambda(3,K_4^{(3)}+e,v)$.

证明 当 $\lambda\equiv 0 \pmod 5$ 时, 欲构造的具有 $\lfloor\lambda v(v-1)(v-2)/30\rfloor$ 个区组的填充 $P_\lambda(3,K_4^{(3)}+e,v)$ 恰好是一个 $S_\lambda(3,K_4^{(3)}+e,v)$. 这种情况已经在引理 4.4 中讨论过. 因此, 下面总假设 $\lambda\not\equiv 0 \pmod 5$.

首先我们将证明当 $\lambda\in\{1,2,3,4\}$ 时, 对于任意整数 $v\equiv 3,4 \pmod 5$ 且 $v\geqslant 8$, 存在具有 $\lfloor\lambda v(v-1)(v-2)/30\rfloor$ 个区组的填充 $P_\lambda(3,K_4^{(3)}+e,v)$.

若 $v\equiv 3 \pmod 5$ 且 $\lambda\in\{1,2,3,4\}$. 根据推论 4.3, 存在 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;v,3)$. 将 $\mathrm{HS}(3,K_4^{(3)}+e;v,3)$

中的区组复制 λ 次, 就可以得到一个具有 $\lfloor \lambda v(v-1)(v-2)/30 \rfloor$ 个区组的填充 $P_\lambda(3, K_4^{(3)}+e, v)$, 它的余图含有 λ 条边.

若 $v \equiv 4 \pmod 5$. 当 $\lambda = 1$ 时, 根据推论 4.3, 存在 $\mathrm{HS}(3, K_4^{(3)}+e; v, 4)$. 它恰好是一个具有 $\lfloor v(v-1)(v-2)/30 \rfloor$ 个区组的填充 $P(3, K_4^{(3)}+e, v)$. 接下来, 取 4 个 $\mathrm{HS}(3, K_4^{(3)}+e; v, 4)$, 分别设为 $(X, Y_i, \mathcal{A}_i)$, $1 \leqslant i \leqslant 4$. 设 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 是 X 中的 5 个不同的点. 不失一般性, 可以假设 $Y_1 = Y_3 = Y_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}$. 令 $\mathcal{C}_2 = \{(x_2, x_4, x_1, x_3, x_5)\}$, $\mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_2 \cup \{(x_3, x_4, x_1, x_2, x_5)\}$, $\mathcal{C}_4 = \mathcal{C}_3 \cup \{(x_1, x_4, x_2, x_3, x_5)\}$. 则对于每一个 $\lambda \in \{2, 3, 4\}$, 可以验证 $(\dot{\bigcup}_{i=1}^{\lambda} \mathcal{A}_i) \mathbin{\dot\cup} \mathcal{C}_\lambda$ 构成了所需构造的填充 $P_\lambda(3, K_4^{(3)}+e, v)$ 的区组集, 它有 $\lfloor \lambda v(v-1)(v-2)/30 \rfloor$ 个区组, 它的余图根据 $\lambda = 2, 3, 4$, 分别含有 $3, 2, 1$ 条边.

最后, 为了证明 $\lambda \geqslant 6$ 且 $\lambda \not\equiv 0 \pmod 5$ 的情况, 记 $\lambda = 5r + t$, 其中 $r \geqslant 1$, $1 \leqslant t \leqslant 4$. 设 $(X, \mathcal{B}_1)$ 是一个 $S_{5r}(3, K_4^{(3)}+e, v)$, $(X, \mathcal{B}_2)$ 是一个具有 $\lfloor tv(v-1)(v-2)/30 \rfloor$ 个区组的填充 $P_t(3, K_4^{(3)}+e, v)$. 可以验证 $(X, \mathcal{B}_1 \mathbin{\dot\cup} \mathcal{B}_2)$ 构成了具有 $\lfloor \lambda v(v-1)(v-2)/30 \rfloor$ 个区组的填充 $P_\lambda(3, K_4^{(3)}+e, v)$. 由于一个填充 $P_\lambda(3, K_4^{(3)}+e, v)$ 最多含有 $\lfloor \lambda v(v-1)(v-2)/30 \rfloor$ 个区组, 因此这里构造的填充都是极大填充. □

定理 1.4 的证明 综合引理 4.4 和 4.5 的结论, 再注意到不存在 $S(3, K_4^{(3)}+e, 5)$ 和 $S(3, K_4^{(3)}+e, 6)$, 下面只需证明 $d(3, K_4^{(3)}+e, 5) = 1$ 和 $d(3, K_4^{(3)}+e, 6) = 3$ 即可. 在 Z_5 上可以构造具有 1 个区组的填充 $P(3, K_4^{(3)}+e, 5)$ 如下: $(0, 1, 2, 3, 4)$. 在 Z_6 上可以构造具有 3 个区组的填充 $P(3, K_4^{(3)}+e, 6)$ 如下: $(1, 3, 0, 2, 4)$, $(5, 0, 1, 4, 3)$, $(3, 4, 2, 5, 0)$. □

引理 4.6 对于任意正整数 λ 和任意整数 $v \equiv 3, 4 \pmod 5$ 且 $v \geqslant 8$, 存在具有 $\lceil \lambda v(v-1)(v-2)/30 \rceil$ 个区组的极小覆盖 $C_\lambda(3, K_4^{(3)}+e, v)$.

证明 当 $\lambda \equiv 0 \pmod 5$ 时, 欲构造的具有 $\lceil \lambda v(v-1)(v-2)/30 \rceil$ 个区组的覆盖 $C_\lambda(3, K_4^{(3)}+e, v)$ 恰好是一个 $S_\lambda(3, K_4^{(3)}+e, v)$. 这种情况已经在引理 4.4 中讨论过. 因此, 下面总假设 $\lambda \not\equiv 0 \pmod 5$.

首先我们将证明当 $\lambda \in \{1, 2, 3, 4\}$ 时, 对于任意整数 $v \equiv 3, 4 \pmod 5$ 且 $v \geqslant 8$, 存在具有 $\lceil \lambda v(v-1)(v-2)/30 \rceil$ 个区组的覆盖 $C_\lambda(3, K_4^{(3)}+e, v)$.

若 $v \equiv 3 \pmod 5$. 根据推论 4.3, 存在 $\mathrm{HS}(3, K_4^{(3)}+e; v, 3)$. 取 4 个 $\mathrm{HS}(3, K_4^{(3)}+e; v, 3)$, 分别设为 $(X, Y_i, \mathcal{A}_i)$, $1 \leqslant i \leqslant 4$. 设 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 是 X 中的 5 个不同的点. 不失一般性, 可以假设 $Y_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y_2 = \{x_1, x_2, x_4\}$, $Y_3 = \{x_1, x_3, x_4\}$, $Y_4 = \{x_3, x_4, x_5\}$. 令 $\mathcal{C} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\}$. 则对于每一个 $\lambda \in \{1, 2, 3, 4\}$, 可以验证 $(\dot{\bigcup}_{i=1}^{\lambda} \mathcal{A}_i) \mathbin{\dot\cup} \mathcal{C}$ 构成了所需构造覆盖 $C(3, K_4^{(3)}+e, v)$ 的区组集, 它有 $\lceil \lambda v(v-1)(v-2)/30 \rceil$ 个区组, 它的溢图根据 $\lambda = 1, 2, 3, 4$, 分别含有 $4, 3, 2, 1$ 条边.

若 $v \equiv 4 \pmod 5$. 当 $\lambda = 1$ 时, 根据推论 4.3, 存在 $\mathrm{HS}(3, K_4^{(3)}+e; v, 4)$, 将其设为 $(X, Y, \mathcal{A})$. 设 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 是 X 中的 5 个不同的点. 不失一般性, 假设 $Y = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. 令 $\mathcal{C} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\}$. 可以验证 $\mathcal{A} \mathbin{\dot\cup} \mathcal{C}$ 构成了所需构造覆盖 $C(3, K_4^{(3)}+e, v)$ 的区组集, 它有 $\lceil v(v-1)(v-2)/30 \rceil$ 个区组, 它的溢图仅含 1 条边. 当 $\lambda \in \{2, 3, 4\}$ 时, 只需将 $C(3, K_4^{(3)}+e, v)$ 中的每一个区组复制 λ 次, 就可以得到一个具有 $\lceil \lambda v(v-1)(v-2)/30 \rceil$ 个区组的覆盖 $C_\lambda(3, K_4^{(3)}+e, v)$, 它的溢图根据 $\lambda = 2, 3, 4$, 分别含有 $2, 3, 4$ 条边.

最后, 为了证明 $\lambda \geqslant 6$ 且 $\lambda \not\equiv 0 \pmod 5$ 的情况, 记 $\lambda = 5r + t$, 其中 $r \geqslant 1$, $1 \leqslant t \leqslant 4$. 设 $(X, \mathcal{B}_1)$ 是一个 $S_{5r}(3, K_4^{(3)}+e, v)$, $(X, \mathcal{B}_2)$ 是一个具有 $\lceil tv(v-1)(v-2)/30 \rceil$ 个区组的覆盖 $C_t(3, K_4^{(3)}+e, v)$. 可以验证 $(X, \mathcal{B}_1 \mathbin{\dot\cup} \mathcal{B}_2)$ 构成了具有 $\lceil \lambda v(v-1)(v-2)/30 \rceil$ 个区组的覆盖 $C_\lambda(3, K_4^{(3)}+e, v)$. 由于一个覆盖 $C_\lambda(3, K_4^{(3)}+e, v)$ 最少含有 $\lceil \lambda v(v-1)(v-2)/30 \rceil$ 个区组, 因此这里构造的覆盖都是极小覆盖. □

定理 1.5 的证明 综合引理 4.4 和 4.6 的结论, 再注意到不存在 $S(3, K_4^{(3)}+e, 5)$ 和 $S(3, K_4^{(3)}+e, 6)$,

下面只需证明 $c(3, K_4^{(3)}+e, 5)=3$ 和 $c(3,\ K_4^{(3)}+e, 6)=5$ 即可. 在 Z_5 上可以构造具有 3 个区组的覆盖 $C(3, K_4^{(3)}+e, 5)$ 如下: $(0,1,2,3,4)$, $(0,1,3,4,2)$, $(0,1,2,4,3)$. 在 Z_6 上可以构造具有 5 个区组的覆盖 $C(3, K_4^{(3)}+e, 6)$ 如下: $(1,3,0,2,4)$, $(5,0,1,4,3)$, $(3,4,2,5,0)$, $(0,4,3,5,1)$, $(1,2,4,\ 5,0)$. □

参考文献

1 Berge C. Hypergraphs: Combinatorics of Finite Sets. Amsterdam: North Holland, 1989
2 Beth T, Jungnickel D, Lenz H. Design Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1999
3 Ji L. On the 3BD-closed set $B_3(\{4,5,6\})$. J Combin Design, 2004, 12: 92–102
4 Adams P, Bryant D, Buchanan M. A survey on the existence of G-designs. J Combin Design, 2008, 16: 373–410
5 Bryant D, El-Zanati S. Graph decompositions. In: Colbourn C J, Dinitz J H, eds. CRC Handbook of Combinatorial Designs. New York: CRC Press, 2006, 477–486
6 Gordon D, Stinson D R. Coverings. In: Colbourn C J, Dinitz J H, eds. CRC Handbook of Combinatorial Designs. New York: CRC Press, 2006, 365–373
7 Stinson D R, Wei R, Yin J. Packings. In: Colbourn C J, Dinitz J H, eds. CRC Handbook of Combinatorial Designs. New York: CRC Press, 2006, 550–556
8 Feng T, Chang Y. Decompositions of the 3-uniform hypergraphs $K_v^{(3)}$ into hypergraphs of a certain type. Sci China Ser A, 2007, 50: 1035–1044
9 Wu Y, Chang Y. On the maximum packing problem of $MP_\lambda(3, K_4^{(3)}-e, v)$. Ars Combin, in press
10 Wu Y, Chang Y. Determination of the packing number $D_\lambda(3, W_4^{(3)}, v)$. Sci China Ser A, 2009, 52: 2537–2548
11 Wu Y, Chang Y. On the covering problem $c_\lambda(3, W_4^{(3)}, v)$. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2012, 28: 631–638
12 Feng T, Chang Y. Decompositions of 3-uniform hypergraph $K_v^{(3)}$ into hypergraph $K_4^{(3)}+e$. Utilitas Math, in press
13 Mohácsy H, Ray-Chaudhuri D K. Candelabra systems and designs. J Statist Plann Inference, 2002, 106: 419–448
14 Hartman A. The fundamental construction for 3-designs. Discrete Math, 1994, 124: 107–132

Packings and coverings of complete 3-uniform hypergraph

FENG Tao, CHAI Zhao & CHANG YanXun

Abstract　Let Γ be a set of simple t-uniform hypergraphs. A $P_\lambda(t,\Gamma,v)$ (resp. $C_\lambda(t,\Gamma,v)$) is a pair $(X,\mathcal{B})$, where X is the vertex set of $\lambda K_v^{(t)}$ and $\mathcal{B}$ is a collection of sub-hypergraphs (called *blocks*) of $\lambda K_v^{(t)}$, such that each block is isomorphic to one hypergraph in Γ, and each edge of $\lambda K_v^{(t)}$ is contained in at most (resp. at least) λ blocks of $\mathcal{B}$. Given t,v,λ,Γ, the packing number $d_\lambda(t,\Gamma,v)$ is the maximum number of blocks in any $P_\lambda(t,\Gamma,v)$, and the covering number $c_\lambda(t,\Gamma,v)$ is the minimum number of blocks in any $C_\lambda(t,\Gamma,v)$. In this paper, we determine $d_\lambda(3, K_4^{(3)}+e, v)$ and $c_\lambda(3, K_4^{(3)}+e, v)$ completely.

Keywords　$\boldsymbol{t}$**-**$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\Gamma},\boldsymbol{\lambda})$ **packing,** $\boldsymbol{t}$**-**$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\Gamma},\boldsymbol{\lambda})$ **covering, packing number, covering number, group divisible** $(\boldsymbol{\Gamma},\boldsymbol{t})$**-design, candelabra** $(\boldsymbol{\Gamma},\boldsymbol{t})$**-system**

MSC(2010)　**05C70, 05B05**

doi:　**10.1360/012012-143**