自反子空间格的表示和运算

董瑗菊^{①*}, 袁巍^②, 侯成军^③, 陈广锋^①

① 西安文理学院数学系, 西安 710065;

② 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190;

③ 曲阜师范大学运筹所, 日照 276826

E-mail: daj1965@163.com, wyuan@math.ac.cn, cjhou@mail.qfnu.edu.cn, chgfeng@126.com

收稿日期: 2011-12-17; 接受日期: 2012-01-18; * 通信作者

西安市科技计划 (批注号: CXY1134WL03) 和国家自然科学基金 (批准号: 10971117) 资助项目

摘要 证明了 von Neumann 代数的子空间格的自反性和 KS- 性都不依赖于该 von Neumann 代数的正规忠实 $*$ - 表示; 引入了 von Neumann 代数及所含子空间格的半自由积运算, 证明了两子空间格的半自由积同构于它们的直和.

关键词 von Neumann 代数 Kadison-Singer 代数 自由积 KS- 包含

MSC (2010) 主题分类 46L10, 47L75

1 引言

von Neumann 在建立了自伴算子的谱理论以后, 于 1929 年引入了“算子环”的概念, 即后来被人们所称的 von Neumann 代数. 该类代数是 Hilbert 空间上对伴随运算封闭以及在强算子拓扑下闭的算子代数. 三十年后, Kadison 和 Singer 引入了 von Neumann 代数的三角子代数 (见 [1]), 此被认为是非自伴算子代数的最早发展. 通过五十多年的发展, 非自伴算子代数理论已取得了很大的进展, 套代数和自反 (算子) 代数等相继产生; 时至今日, 套代数已发展成为一个较为成熟的理论. 但相对于 C^* 代数和 von Neumann 代数, 非自伴代数缺乏广泛的应用和更为深刻的理论, 其中一个主要原因可以在 Kadison 和 Singer 的后续文章 [2] 中看到. 众所周知, 代数之间的运算是代数的分解和分类理论中不可缺少的工具, 人们也只有在有效的运算下才可以用简单的代数来构造复杂的代数, 如 C^* 代数和 von Neumann 代数理论中的代数直和、张量积、交叉积和自由积等都是自伴代数理论中的重要运算; 但是, 在非自伴代数研究中缺少类似的有效运算, 而通常的代数直和与张量积等概念在自反代数类中也常常不自封.

最近, 在文献 [3-8] 中, 我们研究了一类新的非自伴代数, 即 Kadison-Singer 代数. 这类代数是自反的, 所以它们可以由其对应的自反子空间格来完全决定; 与此同时, 这类代数和它们所对应的子空间格生成的 von Neumann 代数又密切相关, 这使得我们可以利用 von Neumann 代数的结构和运算的性质来研究自反子空间格的相应理论, 再用所得的子空间格间的运算诱导出非自伴代数之间的运算. 显然, 采用这种途径来定义和研究自反算子代数间的运算首先要面临的问题是子空间格在“多大程度”上决定了它所对应的自反代数. 本文首先研究子空间格的自反性与其生成 von Neumann 代数的表示之间的关系, 证明一类子空间格 (包含了 Kadison-Singer 格) 的自反性不依赖于它所生成 von Neumann 代

数的表示. 这样的表示与格的单纯表示有很大不同, 甚至我们可以找到一个格在一种表示下是自反的 (从而是强算子拓扑下闭的), 而在另一种表示下不一定是强算子闭的. 最后我们定义了 von Neumann 代数之间的一种和自由积有关的新运算, 证明了该运算自然诱导出的子空间格间的运算对应了格与格之间的直积; 从拓扑角度来看, 这样的格运算能保持很好的几何结构.

本文用到的记号都是标准的, 可参考 [9] 和 [10].

2 自反代数和自反格

设 $\mathcal{H}$ 是一个复 Hilbert 空间, 记 $\mathcal{H}$ 上有界线性算子的全体所形成的代数为 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. 若令 $\mathcal{S}$ 为 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的一个非空子集, 记 $\mathcal{S}$ 中所有算子的公共不变 (闭) 子空间或对应的正交投影形成的集合为 $\text{Lat } \mathcal{S}$, 则 $\text{Lat } \mathcal{S}$ 是一个格, 并称之为 $\mathcal{S}$ 的不变子空间格. 反之, 设 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中一些正交投影组成的集合, 记 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中以 $\mathcal{L}$ 中的所有投影为不变子空间的算子形成的代数为 $\text{Alg } \mathcal{L}$. 易见, $\text{Alg } \mathcal{L}$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中的包含恒等算子的弱算子闭子代数. 如果 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的子代数 $\mathfrak{A}$ 满足 $\mathfrak{A} = \text{Alg Lat } \mathfrak{A}$, 则称 $\mathfrak{A}$ 是自反代数. 相应地, 如果 (投影) 格 $\mathcal{L}$ 满足 $\mathcal{L} = \text{Lat Alg } \mathcal{L}$, 则称 $\mathcal{L}$ 为自反格 (见 [11]). 如果 $\mathcal{L}$ 是由两两交换的投影所形成的子空间格, 则称 $\mathcal{L}$ 为交换子空间格, 简称 CSL 格 (见 [12]); 当 $\mathcal{L}$ 是全序子空间格时, 则称 $\mathcal{L}$ 为套 (见 [9]), 此时 $\text{Alg } \mathcal{L}$ 也称为套代数. 套代数是自反代数的特例, 和有限维矩阵代数中的上三角代数类似, 是研究较多的自反代数. 作为子空间格, 套的结构比较简单, 其西等价分类和相似分类都有完善的结果; 因此, 套代数的研究也相当成熟 (见 [9, 13]). von Neumann 代数是自反代数的极端情形, 但人们一般不把它纳入到非自伴代数领域. 除了套代数以外, 非自伴代数中还没有其他代数得到更为很深入的研究.

最近, Ge 和 Yuan 引入并研究了一类新的非自伴代数, 他们称之为 Kadison-Singer 代数 (见 [4, 5]). 这类代数具有 von Neumann 代数和套代数 (或三角代数) 的特点, 是一类结构丰富的算子代数. 现在, 我们简单回顾一下 Kadison-Singer 代数的概念. 称 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的一个自反子代数 $\mathfrak{A}$ 为 Kadison-Singer (算子) 代数, 简称为 KS-代数, 如果 $\mathfrak{A}$ 满足以下性质: 对于 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中的任一包含了 $\mathfrak{A}$ 的自反子代数 $\mathcal{B}$, 若 $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}^* = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^*$, 则有 $\mathcal{B} = \mathfrak{A}$; 此时, 称 $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^*$ 为 KS-代数 $\mathfrak{A}$ 的对角子代数. 当 KS-代数 $\mathfrak{A}$ 的对角子代数为因子时, 则称此类 KS-代数为 KS-因子. 相应地, 如果 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 被自反格 $\mathcal{L}$ 极小生成, 则称 $\mathcal{L}$ 为 $\mathcal{M}$ 的一个 Kadison-Singer 格, 简称 KS-格. 容易看出, 投影格 $\mathcal{L}$ 是 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 的 KS-格当且仅当 $\mathcal{L}$ 是生成 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 的自反格, 且 $\text{Alg } \mathcal{L}$ 是一个 KS-代数. 因此, KS-代数的结构完全由其对应的 KS-格来决定. 又因为 KS-格和它所生成的 von Neumann 代数密切相关, 所以这类非自伴代数与 von Neumann 代数的结构紧密相联. 当 $\mathcal{L}$ 是一个生成了 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 的 KS-格时, 我们称 “ $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ ” 为一个 **Kadison-Singer 包含**, 简称 **KS-包含**. 下一节, 我们将证明这一包含关系不依赖于它们在 Hilbert 空间上的表示, 此为非自伴代数新运算研究的出发点. 容易看到, 如果 $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{M}_2$ 是两个 KS-包含, 则 $(\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2) \subset (\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2)$ 也是一个 KS-包含. 人们自然会问, 这样的运算是否可以推广到张量积和自由积上. 从 von Neumann 代数张量积的特点可以看到, 张量积后的生成元个数有可能减少, 所以一般来说, KS-格 (从而 KS-代数) 对张量积没有好的性质. 对于自由积运算, 从生成元的角度来看, 如果我们能够定义格的自由积运算 $\mathcal{L}_1 * \mathcal{L}_2$ 的话, 那么 $\mathcal{L}_1 * \mathcal{L}_2$ 在 $\mathcal{M}_1 * \mathcal{M}_2$ 中的极小生成性有可能保持.

3 KS-包含的表示

本节中, 我们将证明任一 KS-包含 $\mathcal{L} \subset \mathfrak{A}$ 不依赖于它们在 Hilbert 空间上的表示, 即若 von

Neumann 代数 $\mathfrak{A}$ “作用在” Hilbert 空间 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 上, 则 $\mathcal{L}$ 在 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ 里是个 KS- 格当且仅当它在 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ 里是个 KS- 格. 这样的结果在文献 [14] 中出现过, 但那里的证明并不完整.

引理 3.1 假设 $\mathfrak{A}$ 是一个作用在 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的 von Neumann 代数, $\mathcal{L}$ 是 $\mathfrak{A}$ 中的一个投影格. 令 P' 为交换子 $\mathfrak{A}'$ 中的非零投影. 若 P' 在 $\mathfrak{A}'$ 内的中心支撑 $C_{P'}$ 为 I , 并且 $P'\mathcal{L}$ 在 $\mathcal{B}(P'\mathcal{H})$ 中是自反的, 则对任一非零投影 $Q' \in \mathfrak{A}'$, 只要 $P' \preceq Q'$, 就有 $Q'\mathcal{L}$ 在 $\mathcal{B}(Q'\mathcal{H})$ 中也是自反的.

证明 因为投影格的自反性在酉等价下是不变的, 所以我们可以假设 $P' \leq Q'$. 此时, 若把 P' 看成是 $(Q'\mathfrak{A})' = Q'\mathfrak{A}'Q' \subset \mathcal{B}(Q'\mathcal{H})$ 中的投影, 则我们还可以假设 $Q' = I$. 在所有这些假设下, 我们只需证明 $\mathcal{L}$ 在 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中自反即可.

对任意投影 $E \in \mathcal{L}$, 作分解 $E = EP' + E(I - P')$, 记 $E_1 = EP'$, $E_2 = E(I - P')$. 由定义直接可得, $T_1 \in \text{Alg}(P'\mathcal{L})$ 当且仅当对所有的 $E \in \mathcal{L}$, 总有 $(P' - E_1)T_1E_1 = 0$ 成立. 任意给定 $F \in \text{Lat Alg } \mathcal{L} \subset \mathfrak{A}$, 对所有 $T \in \text{Alg } \mathcal{L}$, 则有 $(I - F)TF = 0$. 因为 P' 和 F 交换, 所以 $(P' - P'F)P'TP'F = 0$. 对任给的 $T_1 \in \text{Alg}(P'\mathcal{L})$, 取 T_1 到 $\mathcal{H}$ 上的一个有界扩张 T 使得 $TP' = P'T$, $TP'|_{P'\mathcal{H}} = T_1$ 以及 $T(I - P') = 0$. 不难验证 $T \in \text{Alg } \mathcal{L}$, 因此 $(P' - P'F)PT_1FP' = 0$; 这就证明了 $FP'|_{P'\mathcal{H}} \in \text{Lat Alg } P'\mathcal{L} = P'\mathcal{L}$. 又因为 $C_{P'} = I$, 所以映射

$$\mathfrak{A} \rightarrow P'\mathfrak{A} : A \mapsto AP'|_{P'\mathcal{H}}$$

是个 $*$ 同构, 故 F 属于 $\mathcal{L}$. 由 F 的任意性可得, $\mathcal{L}$ 是自反的. $\square$

注记 3.1 事实上, 我们可以证明一个更一般的结论: 在引理中, 若设 $P'\mathcal{L}$ 自反, $P' \preceq Q'$ 且 $C_{P'} = C_{Q'}$, 则 $Q'\mathcal{L}$ 也是自反的.

在以下部分, 我们用 $\sum_{i \in J} \oplus \mathcal{H}_i$ 表示一族 Hilbert 空间 $\{\mathcal{H}_i\}_{i \in J}$ 的 (Hilbert 空间) 直和, 并将每个 $\mathcal{H}_i$ 看成该直和空间的子空间; 用 $\sum_{i \in J} \oplus T_i$ 表示有界线性算子族 $\{T_i\}_{i \in J}$ 的直和, 其中 $T_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_i)$ ($i \in J$), 且 $\sup\{\|T_i\| : i \in J\} < \infty$. 通过计算, 很容易验证下面的引理:

引理 3.2 设 J 和 Λ 为两个指标集, 令 $\mathcal{H} = \sum_{i \in J} \oplus \mathcal{H}_i$ 为 Hilbert 空间族 $\{\mathcal{H}_i\}_{i \in J}$ 的直和; 对每个 $i \in J$, 设 $\{P_{i\alpha} : \alpha \in \Lambda\}$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_i)$ 中的投影族, 且使得 $\mathcal{L} = \{\sum_{i \in J} \oplus P_{i\alpha} : \alpha \in \Lambda\}$ 构成 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的一个子空间格. 对每个 i , 若记 E_i 为 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{H}_i$ 上的正交投影, 则

$$\text{Alg } \mathcal{L} = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid (E_i - P_{i\alpha})AP_{j\alpha} = 0, \forall \alpha \in \Lambda, i, j \in J\}.$$

对每个 $i \in J$, 以及对任意给定的 $n_i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, 作 Hilbert 空间的张量积 $\mathcal{H}_i^{\otimes n_i}$. 在上述引理中, 如果我们用 $\mathcal{H}_i^{\otimes n_i}$ 代替 $\mathcal{H}_i$, 用 $P_{i\alpha} \otimes I_{n_i}$ 代替 $P_{i\alpha}$, 则引理的结论仍成立. 记 $ex = \{n_i\}_{i \in J}$, $\mathcal{H}^{ex} = \sum_{i \in J} \oplus \mathcal{H}_i^{\otimes n_i}$, 格 $\mathcal{L}$ 被推广后记为:

$$\mathcal{L}^{ex} = \left\{ \sum_{i \in J} \oplus (P_{i\alpha} \otimes I_{n_i}) : \alpha \in \Lambda \right\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}^{ex}).$$

引理 3.3 在上述符号下, 子空间格 $\mathcal{L} = \{\sum_{i \in J} \oplus P_{i\alpha} : \alpha \in \Lambda\}$ 在 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中自反当且仅当 $\mathcal{L}^{ex} = \{\sum_{i \in J} \oplus (P_{i\alpha} \otimes I_{n_i}) : \alpha \in \Lambda\}$ 在 $\mathcal{B}(\mathcal{H}^{ex})$ 中自反.

证明 记 $B(l_{n_i}^2)$ 为 Hilbert 空间 $\mathbb{C}^{n_i}$ 上有界线性算子的全体 (当 n_i 有限时, $B(l_{n_i}^2) = M_{n_i}(\mathbb{C})$). 易见, $\sum_{i \in J} \oplus (I \otimes B(l_{n_i}^2)) \subseteq (\mathcal{L}^{ex})'$. 因此, 当 $Q^{ex} \in \text{Lat Alg } \mathcal{L}^{ex}$ 时, 存在 Q_i 使得 $Q^{ex} = \sum_{i \in J} \oplus (Q_i \otimes I_{n_i})$. 此时, 若记 $Q = \sum_{i \in J} \oplus Q_i$, 则有 $Q \in \text{Lat Alg } \mathcal{L}$.

反之, 如果设 $Q \in \text{Lat Alg } \mathcal{L}$, 则存在投影 Q_i 使得 $Q = \sum_{i \in J} \oplus Q_i$. 我们需要证明, $Q^{ex} = \sum_{i \in J} \oplus (Q_i \otimes I_{n_i}) \in \text{Lat Alg } \mathcal{L}^{ex}$. 由引理 3.2 知, 由 $Q = \sum_{i \in J} \oplus Q_i \in \text{Lat Alg } \mathcal{L}$ 可得: 对任意 $i, j \in J, \alpha \in \Lambda$,

只要 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_j, \mathcal{H}_i)$ 满足 $(I - P_{i\alpha})AP_{j\alpha} = 0$, 则

$$(I - Q_i)AQ_j = 0, \quad i, j \in J.$$

当把 $\sum_{i \in J} \oplus (P_{i\alpha} \otimes I_{n_i})$ 看成是 $\mathcal{L}^{ex}$ 中的投影时, 引理 3.2 告诉我们 $Q^{ex} = \sum_{i \in J} \oplus (Q_i \otimes I_{n_i}) \in \text{Lat Alg } \mathcal{L}^{ex}$. 引理证毕. $\square$

设 $\mathfrak{A}$ 是一个 von Neumann 代数, 我们称 $\mathfrak{A}$ 中的非零投影 E 为 “首一的”(monic), 如果存在 $\mathfrak{A}$ 中的投影 $E_1, \dots, E_k$ 使得

$$E_1 \sim E_2 \sim \dots \sim E_k \sim E, \quad E_1 + E_2 + \dots + E_k = C_E,$$

其中 C_E 为 E 在 $\mathfrak{A}$ 中的中心支撑. 下面的引理是文献 [10] 中的命题 8.2.1, 随后的几个引理都是该结果的推广.

引理 3.4 有限 von Neumann 代数中任一非零投影都是该代数中首一投影的 (有限或无限) 和.

引理 3.5 设 $\mathfrak{A}$ 是一个半有限的 von Neumann 代数, 则 $\mathfrak{A}$ 中存在一簇两两互相等价、互相正交的有限投影 $E_\alpha, \alpha \in \Lambda$, 使得 $\sum_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha$ 属于 $\mathfrak{A}$ 的中心 $\mathcal{C}$.

证明 由 von Neumann 代数的分类理论, 我们仅需要考虑 $\mathfrak{A}$ 是 I_∞ 型或 II_∞ 型的情形. 由于这两种情形的证明方法类似, 我们不妨设 $\mathfrak{A}$ 是 II_∞ 型的 von Neumann 代数. 任取 $\mathfrak{A}$ 中的非零有限投影 E , 设 C_E 为 E 在 $\mathfrak{A}$ 内的中心支撑 (此时, C_E 一定是个无限投影). 设 $\{E_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 为一个包含 E 且满足条件 $E_\alpha \sim E, \alpha \in \Lambda$, 的极大正交投影簇. 令 $F = C_E - \sum_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha$, 则 $E \not\lesssim F$. 若 $F = 0$, 则引理的结论成立. 若 $F \neq 0$, 由文献 [10] 中的定理 6.2.7, 存在非零中心投影 $P (\leq C_E)$ 使得 $PF \prec PE \sim PE_\alpha$. 由此, 亦得 PF 为有限投影. 因为 $\mathfrak{A}$ 是 II_∞ 型的, 所以 $\mathfrak{A}$ 的非零中心投影 P 一定是个无限投影. 又因为 $P - \sum_{\alpha \in \Lambda} PE_\alpha (= PF)$ 为有限投影, 所以投影 $\sum_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha P$ 是无限的, 进而 $\sum_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha P \sim P$. 故存在 $\mathfrak{A}$ 中的部分等距算子 V 使得 $VV^* = P$ 和 $V^*V = \sum_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha P$ 成立. 此时, $\{VPE_\alpha V^* : \alpha \in \Lambda\}$ 为 $\mathfrak{A}$ 中的一簇两两等价又两两正交的有限投影, 且其和为 $\mathfrak{A}$ 的中心投影 P . 引理证毕. $\square$

引理 3.6 设 $\mathfrak{A}$ 是个 III 型 von Neumann 代数, P 为 $\mathfrak{A}$ 中的非零投影, 则 $\mathfrak{A}$ 中存在非零投影 Q 以及非零投影的正交簇 $\{Q_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, 使得 $Q \leq P$ 和 $C_Q = Q + \sum_\alpha Q_\alpha$ 成立, 其中 C_Q 是 Q 在 $\mathfrak{A}$ 中的中心支撑, $Q_\alpha \sim Q, \alpha \in \Lambda$.

证明 可用 $C_P \mathfrak{A}$ 替代 $\mathfrak{A}$, 因此不妨设 $C_P = I$. 因为 P 是纯无限的, 所以我们可以把 P 分解成 $\mathfrak{A}$ 中两个非零投影的和: $P = P_1 + P_2$, 其中 $P \sim P_1 \sim P_2$. 用类似于上面引理的证明方法, 在 $\mathfrak{A}$ 中取包含了 P_1 和 P_2 且满足 $P_\alpha \sim P$ 的极大正交的投影簇 $\{P_\alpha : \alpha \in \tilde{\Lambda}\}$. 如果 $\sum_\alpha P_\alpha = I$, 那么取 $Q = P_1$, 取 $\{Q_\alpha : \alpha \in \Lambda\} = \{P_\alpha : \alpha \in \tilde{\Lambda}\} \setminus \{P_1\}$. 否则, 由极大性可得, $P_1 \not\lesssim (I - \sum_\alpha P_\alpha)$, 从而存在中心投影 E 使得 $(I - \sum_\alpha P_\alpha)E \prec P_1 E$. 故

$$EP_2 \lesssim EP_2 + E \left(I - \sum_\alpha P_\alpha \right) \lesssim E(P_1 + P_2) \sim EP_1 \sim EP_2.$$

因此, $EP_1 \sim EP_2 + E(I - \sum_\alpha P_\alpha)$. 令 $Q = EP_1$, 则 $Q \leq P$, 且

$$C_Q = Q + \left[E \left(I - \sum_\alpha P_\alpha \right) + EP_2 \right] + \sum_\alpha \{EP_\alpha : P_\alpha \neq P_1, P_2\}.$$

引理证毕. $\square$

引理 3.7 设 $\mathfrak{A}$ 是个半有限的 von Neumann 代数, P 为 $\mathfrak{A}$ 中的一非零投影, 则 $\mathfrak{A}$ 中存在投影 Q 以及正交的非零投影簇 $\{Q_\alpha : \alpha \in J\}$, 使得 $Q \leq P$ 和 $C_Q = Q + \sum_\alpha Q_\alpha$ 成立, 其中 C_Q 是 Q 在 $\mathfrak{A}$ 中的中心支撑, $Q_\alpha \sim Q, \alpha \in J$.

证明 不妨假设 P 的中心支撑 C_P 为 I . 由引理 3.5, $\mathfrak{A}$ 中存在非零中心投影 E 可表示成一簇两两正交且两两等价的有限投影 $\{E_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 的和. 若用 EP 替代 P , 则我们可再假设 $E = I$, 从而 $I = \sum_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha$, 其中 E_α 为有限投影, $E_{\alpha_1} \sim E_{\alpha_2} (\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda)$. 利用此等价投影簇, 我们可构造 $\mathfrak{A}$ 中的矩阵单位 $\{E_{\alpha, \beta} : \alpha, \beta \in \Lambda\}$ 使得 $E_{\alpha, \alpha} = E_\alpha$.

如果存在某个投影 E_α 和中心投影 F 使得 $FE_\alpha \preceq FP$, 则取 $Q \leq FP$ 使得 $Q \sim FE_\alpha$. 因为 FE_α 有限, 所以可取酉算子 $U \in \mathfrak{A}$ 使得 $Q = U^*FE_\alpha U$. 由 $\sum_{\beta \in \Lambda} FE_\beta = F$ 可得:

$$C_Q = F = U^*FE_\alpha U + \sum_{\beta \neq \alpha} U^*FE_\beta U = Q + \sum_{\beta \neq \alpha} U^*FE_\beta U.$$

如果没有这样的中心投影 F , 那么我们可以假设存在 $\alpha \in \Lambda$ 使得 $P \prec E_\alpha$. 此时, P 为有限投影; 取酉算子 $V \in \mathfrak{A}$ 使得 $P \leq U^*E_\alpha U$. 不妨设 $U = I$, 这样可以沿用上面的记号来代替 $U^* \cdot U$, 可有 $P \leq E_\alpha$, 从而 $P \in E_\alpha \mathfrak{A} E_\alpha$. 由引理 3.4, P 包含了 $E_\alpha \mathfrak{A} E_\alpha$ 中的一个首一投影 Q , 所以存在正交的投影集 $\{Q_i\}_{1 \leq i \leq n}$ 使得 $Q_i \sim Q$ 和 $E_\alpha C_Q = Q + \sum_i Q_i$ 成立. 因此

$$C_Q = \sum_\beta E_{\beta, \alpha} E_\alpha C_Q E_{\alpha, \beta} = \left(Q + \sum_i Q_i \right) + \sum_{\beta \neq \alpha} E_{\beta, \alpha} \left(Q + \sum_i Q_i \right) E_{\alpha, \beta}.$$

引理得证. $\square$

因为任意 von Neumann 代数都是半有限的和纯无限的 (即 III 型的) von Neumann 代数的直和, 所以我们有下面的推论.

推论 3.1 设 $\mathfrak{A}$ 是个 von Neumann 代数, P 为 $\mathfrak{A}$ 中的非零投影, 则 $\mathfrak{A}$ 中存在 P 的非零子投影 Q 以及正交的非零投影簇 $\{Q_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, 使得 $C_Q = Q + \sum_\alpha Q_\alpha$ 成立, 其中 C_Q 是 Q 在 $\mathfrak{A}$ 中的中心支撑, $Q_\alpha \sim Q, \alpha \in \Lambda$.

由此推论和 Zorn 引理, 我们可得下面的定理.

定理 3.1 设 $\mathfrak{A}$ 是个 von Neumann 代数, P 为 $\mathfrak{A}$ 中的任一非零投影, 则 $\mathfrak{A}$ 中存在 P 的子投影族 $\{Q_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 满足如下性质:

- (i) 中心支撑族 $\{C_{Q_\alpha} : \alpha \in \Lambda\}$ 两两正交, 且 P 的中心支撑 $C_P = \sum_{\alpha \in \Lambda} C_{Q_\alpha}$;
- (ii) 对于每个 $\alpha \in \Lambda$, 都存在投影族 $\{Q_{\alpha, i} : i \in J_\alpha\}$ 使得 $C_{Q_\alpha} = Q_\alpha + \sum_{i \in J_\alpha} Q_{\alpha, i}$, 其中对每个 $\alpha \in \Lambda$ 和 $i \in J_\alpha$, 有 $Q_{\alpha, i} \sim Q_\alpha$.

接下来我们证明本节的主要定理.

定理 3.2 设 $\mathfrak{A}$ 为作用在 Hilbert 空间 $\mathcal{H}_1$ 上的 von Neumann 代数, φ 为 $\mathfrak{A}$ 到 Hilbert 空间 $\mathcal{H}_2$ 上的一个忠实正规的 $*$ 表示. 若 $\mathcal{L}$ 为 $\mathfrak{A}$ 中的一个投影格, 则 $\mathcal{L}$ 在 $\mathcal{H}_1$ 上自反当且仅当 $\varphi(\mathcal{L})$ 在 $\mathcal{H}_2$ 上自反.

证明 我们仅证明: 当 $\mathcal{L}$ 在 $\mathcal{H}_1$ 上自反时, $\varphi(\mathcal{L})$ 在 $\mathcal{H}_2$ 上也是自反的. 由 von Neumann 代数的表示理论, 存在 Hilbert 空间 $\mathcal{K}$ 和投影 $P' \in \mathfrak{A}' \otimes B(\mathcal{K}) = (\mathfrak{A} \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{K}})' (\subseteq B(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}))$, 以及存在 $P'(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K})$ 到 $\mathcal{H}_2$ 上的酉算子 U 满足:

$$\varphi(A) = U(A \otimes I_{\mathcal{K}})P'|_{P'(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K})}U^*, \quad A \in \mathfrak{A}.$$

容易验证, $\mathcal{L}$ 在 $\mathcal{H}_1$ 上的自反性和 $\mathcal{L}$ 扩充到 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}$ 上的自反性等价. 又子空间格的自反性在酉等价下保持不变, 因此要证明 $\varphi(\mathcal{L})$ 的自反性, 我们只需证明由 P' 诱导的“限制”也保持自反性, 即当把 $\mathfrak{A}$ 看成是作用在 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}$ 上的 von Neumann 代数时, $\mathcal{L} (\subset \mathfrak{A} \subseteq B(\mathcal{H}))$ 在 $\mathcal{H}$ 上的自反性可以诱导出 $P'\mathcal{L} (\subset P'\mathfrak{A}|_{P'\mathcal{H}})$ 在 $P'(\mathcal{H})$ 上的自反性, 这里的 $P' \in \mathfrak{A}'$, 且可以设 $C_{P'} = I$.

由定理 3.1 (注意: 这里的 $\mathfrak{A}'$ 相当于定理 3.1 中的 $\mathfrak{A}$), $\mathfrak{A}'$ 中存在 P' 的中心支撑互相正交的子投影族 $\{Q_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 使得 $\sum_{\alpha \in \Lambda} C_{Q_\alpha} = I$, 且对每个 Q_α , $\mathfrak{A}'$ 中存在投影族 $\{Q_{\alpha,i} : i \in J_\alpha\}$ 使得 $C_{Q_\alpha} = Q_\alpha + \sum_{i \in J_\alpha} Q_{\alpha,i}$, 其中对每个 $i \in J_\alpha$, 有 $Q_{\alpha,i} \sim Q_\alpha$.

令 $Q' = \sum_{\alpha} Q_\alpha \leq P'$. 由引理 3.1 可知, $Q'\mathcal{L} (\subset Q'\mathfrak{A}|_{Q'\mathcal{H}})$ 的自反性可诱导 $P'\mathcal{L}$ 的自反性. 因此, 我们仅证明 $Q'\mathcal{L}$ 的自反性. 记 $\mathcal{H}_\alpha = C_{Q_\alpha}(\mathcal{H})$, 则 $\mathcal{H} = \sum_{\alpha \in \Lambda} \oplus \mathcal{H}_\alpha$. 因为 $Q_{\alpha,i} \sim Q_\alpha$, 所以可取 $\mathfrak{A}'$ 中的部分等距算子 $W_{\alpha,i}$ 使得 $W_{\alpha,i}W_{\alpha,i}^* = Q_\alpha$, $W_{\alpha,i}^*W_{\alpha,i} = Q_{\alpha,i}$. 定义

$$V_\alpha : \mathcal{H}_\alpha \rightarrow Q_\alpha \mathcal{H} \oplus \left(\sum_{i \in J_\alpha} \oplus Q_{\alpha,i} \mathcal{H} \right), \quad \xi \mapsto Q_\alpha \xi \oplus \left(\sum_{i \in J_\alpha} \oplus W_{\alpha,i} \xi \right),$$

则 V_α 是 $\mathcal{H}_\alpha$ 到 $Q_\alpha \mathcal{H} \oplus (\sum_{i \in J_\alpha} \oplus Q_{\alpha,i} \mathcal{H})$ 上的酉算子. 令

$$V = \sum_{\alpha \in \Lambda} \oplus V_\alpha,$$

则 V 是 $\mathcal{H}$ 到 $\sum_{\alpha \in \Lambda} \oplus (Q_\alpha \mathcal{H} \oplus (\sum_{i \in J_\alpha} \oplus Q_{\alpha,i} \mathcal{H}))$ 上的酉算子.

用 $V\mathfrak{A}V^*$ 和 $V\mathcal{L}V^*$ 分别替代 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathcal{L}$, 我们不妨设 $\mathcal{H} = \sum_{\alpha \in \Lambda} \oplus (Q_\alpha \mathcal{H} \oplus (\sum_{i \in J_\alpha} \oplus Q_{\alpha,i} \mathcal{H}))$. 此时, 对任意 $E \in \mathcal{L}$, 有 $E = \sum_{\alpha \in \Lambda} \oplus (E_\alpha \oplus (\sum_{i \in J_\alpha} \oplus E_{\alpha,i}))$, $Q' = \sum_{\alpha \in \Lambda} \oplus (I \oplus (\sum_{i \in J_\alpha} \oplus 0))$, 其中 $E_\alpha = Q_\alpha E|_{Q_\alpha \mathcal{H}}$, $E_{\alpha,i} = Q_{\alpha,i} E|_{Q_{\alpha,i} \mathcal{H}}$. 由引理 3.3, $\mathcal{L}$ 的自反性蕴含了 $Q'\mathcal{L}$ 的自反性. 定理证毕. $\square$

推论 3.2 设 $\mathcal{L}$ 是 von Neumann 代数 $\mathfrak{A}$ 的一个 KS-格, φ 为 $\mathfrak{A}$ 在 Hilbert 空间 $\mathcal{K}$ 上的一个忠实的、正规的 $*$ 表示, 则 $\varphi(\mathcal{L})$ 是 von Neumann 代数 $\varphi(\mathfrak{A})$ 的 KS-格.

证明 由定理 3.2, $\varphi(\mathcal{L})$ 是个自反格. 若它不是一个 KS-格, 则存在 $\varphi(\mathcal{L})$ 的自反子格 $\mathcal{L}_0$ 使得 $\mathcal{L}_0$ 生成 von Neumann 代数 $\varphi(\mathfrak{A})$, 进而 $\varphi^{-1}(\mathcal{L}_0)$ 生成 von Neumann 代数 $\mathfrak{A}$. 上面的定理蕴含了 $\varphi^{-1}(\mathcal{L}_0)$ 为 $\mathcal{L}$ 的是自反子格, 此与 $\mathcal{L}$ 是个 KS-格矛盾. 因此, $\varphi(\mathcal{L})$ 为 KS-格. 推论证毕. $\square$

4 von Neumann 代数诱导的格运算

von Neumann 代数理论中常见的运算有直和、张量积、半直积和自由积等. 容易验证, 若设 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 分别是 von Neumann 代数 $\mathfrak{A}_1$ 和 $\mathfrak{A}_2$ 中的投影格, 则 (von Neumann) 代数直和 $\mathfrak{A}_1 \oplus \mathfrak{A}_2$ 自然诱导了 $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ 上的投影格结构, 并且 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 的自反性蕴含了 $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ 的自反性; 进一步地, 它们所对应的自反代数也具有直和关系. 但是, 这样的直和运算在研究自反代数结构时意义不是很大. 非自伴代数的张量积虽是人们很关心的问题 (见 [1, 2]), 但这方面的研究并没有很系统的结果, 其主要原因是张量积运算常常改变了代数的特点, 比如, 三角代数或套代数的张量积不能保持三角性或套代数的特点. 同样地, 研究非自伴算子代数的自由积也会遇到类似的问题. 下面我们将研究一种“变形的”约化 (reduced) 自由积.

设 $\mathfrak{A}_1$ 和 $\mathfrak{A}_2$ 为两个 von Neumann 代数, ρ_1 和 ρ_2 分别是它们上的忠实的正规态 (faithful normal state). 记 $\mathcal{H}_i$ 是由 $(\mathfrak{A}_i, \rho_i)$ 作 GNS 构造得到的 Hilbert 空间, 令 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. 设 I_1 和 I_2 分别为 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 上的恒等算子, 定义 $\mathcal{B}_1 = \mathfrak{A}_1 \oplus \mathbb{C}I_2$, $\mathcal{B}_2 = \mathbb{C}I_1 \oplus \mathfrak{A}_2$. 显然, $\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$ 为 $\mathcal{H}$ 上的两个 von

Neumann 代数. 我们再把 ρ_1 和 ρ_2 分别扩充到 $\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$ 上:

$$\begin{aligned}\tau_1(A_1 + \lambda I_2) &= \frac{1}{2}\rho_1(A_1) + \frac{1}{2}\lambda, \quad A_1 \in \mathfrak{A}_1, \quad \lambda \in \mathbb{C}; \\ \tau_2(\lambda I_1 + A_2) &= \frac{1}{2}\rho_2(A_2) + \frac{1}{2}\lambda, \quad A_2 \in \mathfrak{A}_2, \quad \lambda \in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

易见, τ_i 为 $\mathcal{B}_i$ 上的忠实的正规态, $i = 1, 2$.

定理 4.1 在上述记号下, 设 $\mathcal{L}_i$ 是由 $\mathfrak{A}_i$ 中的一些投影组成的格, 且 $0, I_i \in \mathcal{L}_i$, $i = 1, 2$. 令 $\mathfrak{A} = (\mathcal{B}_1, \tau_1) * (\mathcal{B}_2, \tau_2)$ 为 $\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$ 的约化自由积, 则 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 在 $\mathfrak{A}$ 中生成的子空间格 (自然地) 同构于 $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$, 且格的结构由下面关系给出

$$\begin{aligned}(P_1, P_2) \wedge (Q_1, Q_2) &= (P_1 \wedge Q_1, P_2 \wedge Q_2), \\ (P_1, P_2) \vee (Q_1, Q_2) &= (P_1 \vee Q_1, P_2 \vee Q_2), \quad P_1, Q_1 \in \mathcal{L}_1, \quad P_2, Q_2 \in \mathcal{L}_2.\end{aligned}$$

证明 令 $\tau = \tau_1 * \tau_2$. 由自由积的定义, 对任意投影 P 属于 $\mathcal{L}_1$ 或 $\mathcal{L}_2$, 我们都有 $\tau(P) \leq \frac{1}{2}$. 注意到, 相对于 τ , $\mathfrak{A}_1$ 和 $\mathfrak{A}_2$ (从而 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$) 是自由独立的, 所以我们可以定义 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 到 $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$ 中的嵌入: 当 $P \in \mathcal{L}_1$, 令 $P \mapsto (P, 0)$; 或 $P \in \mathcal{L}_2$ 时, 令 $P \mapsto (0, P)$. 由自由投影的性质, 很容易验证在这样的嵌入下, $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$ 上诱导出的格结构满足定理中的要求. 定理证毕. $\square$

定义 4.1 在上述记号下, 称 $\mathfrak{A} = (\mathcal{B}_1, \tau_1) * (\mathcal{B}_2, \tau_2)$ 为 $(\mathfrak{A}_1, \rho_1)$ 和 $(\mathfrak{A}_2, \rho_2)$ 的半自由积 (semi-free product), 并记为 $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_1, \rho_1) \natural (\mathfrak{A}_2, \rho_2)$ 或简记为 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \natural \mathfrak{A}_2$, 记 $\mathcal{L}_1 \natural \mathcal{L}_2$ 为 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 在 $\mathfrak{A}$ 中生成的子空间格.

因为 von Neumann 代数的约化自由积依赖于正规态的选择, 所以我们定义的半自由积也依赖于态的选取. 当考虑有限 von Neumann 代数时, 我们可以假设态为迹态 (tracial state). 在以后的文章中我们将研究自反子空间格的半自由积的自反性. 特别地, 考虑当 $\mathcal{L}_1 \subset \mathfrak{A}_1$ 和 $\mathcal{L}_2 \subset \mathfrak{A}_2$ 为两个 KS- 包含时, $\mathcal{L}_1 \natural \mathcal{L}_2 \subset \mathfrak{A}_1 \natural \mathfrak{A}_2$ 是否也是一个 KS- 包含的问题.

参考文献

- Kadison R, Singer I. Triangular operator algebras. Fundamentals and hyper-reducible theory. Amer J Math, 1960, 82: 227–259
- Kadison R, Singer I. Triangular operator algebras — Another chapter. In: Contemp Math, 120. Providence, RI: Amer Math Soc, 1991, 63–76
- 董爱菊. 一类对角非交换的三角代数. 中国科学 A 辑, 2008, 38: 897–903
- Ge L, Yuan W. Kadison-Singer algebras, I: Hyperfinite case. Proc Natl Acad Sci USA, 2010, 107: 1838–1843
- Ge L, Yuan W. Kadison-Singer algebras, II: General case. Proc Natl Acad Sci USA, 2010, 107: 4840–4844
- 侯成军. 一类 Kadison-Singer 代数的上同调. 中国科学 A 辑, 2010, 40: 169–182
- Hou C, Yuan W. Kadison-Singer lattices in finite von Neumann algebras. Math Ann, 2011, DOI: 10.1007/s00208-011-0695-7
- Wang L, Yuan W. On a new class of Kadison-Singer algebras. Expo Math, 2011, 29: 126–132
- Davidson K. Nest Algebras. Longman Scientific & Technical, π Pitman Research Notes in Mathematics Series, 191. New York: Longman, 1988
- Kadison R, Ringrose J. Fundamentals of the Operator Algebras, vols. I and II. Orlando: Academic Press, 1983 and 1986
- Halmos P. Reflexive lattices of subspaces. J London Math Soc, 1971, 4: 257–263
- Arveson B. Operator algebras and invariant subspaces. Ann of Math, 1974, 100: 433–532
- Larson D. Nest algebras and similarity transformations. Ann of Math, 1985, 121: 409–427

- 14 Ravichandran M. Kadison-Singer algebras with applications to von Neumann algebras. PhD dissertation. Durham: University of New Hampshire, 2009
- 15 Ringrose J. On some algebras of operators, II. Proc London Math Soc, 1966, 16: 385–402

Representations and operations on reflexive subspace lattices

DONG AiJu, YUAN Wei, HOU ChengJun & CHEN GuangFeng

Abstract We show that the reflexivity of a subspace lattice in a von Neumann algebra is preserved under *-isomorphism of the von Neumann algebra. A new operation, semi free product, of von Neumann algebras is introduced to study subspace lattices. Under this operation, the new subspace lattice is isomorphic to the direct product of the corresponding subspace lattices.

Keywords von Neumann algebra, Kadison-Singer algebra, free product, KS-inclusion

MSC(2010) 46L10, 47L75

doi: 10.1360/012011-999