



出生率与年龄段有关的生灭分枝树

王汉兴^{①*}, 傅云斌^{②①}, 颜云志^①, 卢桂林^①, 胡细^③, 于娜^④

① 上海立信会计学院数学与信息学院, 上海 201600;

② 上海大学理学院数学系, 上海 200444;

③ 上海工程技术大学, 上海 201600;

④ 上海电力大学, 上海 201300

E-mail: whxlqq@163.com, fuyunbin2012@163.com, yanyz@lixin.edu.cn, luguilin@gmail.com, xih_xih@163.com, mathyuna@163.com

收稿日期: 2012-09-29; 接受日期: 2013-01-07; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 60872060)、上海市自然科学基金 (批准号: 12ZR1421000)、上海市教委创新项目基金 (批准号: 12ZZ193) 和国家自然科学基金青年基金 (批准号: 11101265) 资助项目

摘要 本文基于生灭过程的生灭演化机理, 将生物繁衍过程描述为有向随机图过程 – 随机分枝树, 建立了出生率与年龄段有关的生灭分枝树演化模型. 本文研究了任一节点在不同年龄及临死时刻的出度分布、虚出度分布和拟出度分布, 并证明了拟出度过程是随机时刻终止的 Poisson 过程, 讨论了首生年龄及相对出生年龄的分布, 给出了任一节点成为孤立节点的概率.

关键词 随机图 生灭过程 分枝树

MSC (2010) 主题分类 60G05, 68R10

1 引言

在 G-W 分枝过程中, 假定每个粒子独立同分布地产生后代, 并且假定所有粒子寿命都是一个单位时间. 为更客观地描述生物人口模型, G-W 分枝模型已被拓广到许多不同的分枝模型. 李应求和胡杨利等人^[1-3] 研究了随机环境中随机游动上的分枝系统和依赖年龄的分枝过程, 依赖年龄的分枝过程由 Bellman 和 Harris^[4-6] 引入. 物理学家和数学家们为了研究随机介质相关问题提出了随机环境中的分枝过程^[7,8], 许多学者做了相关研究^[1-3,9-14]. 但其研究的主要问题集中于种群规模 (人口数) 和种群最终灭绝概率等问题, 忽视了生物种群内部结构和个体之间的关系 (如年龄结构和辈分结构等), 导致其应用的局限性. 自 20 世纪 60 年代由 Erdős 和 Rényi^[15] 建立随机图理论以来, 随机图 (网络) 演化理论已广泛渗透到自然科学和社会科学的不同研究领域, 涌现出不少图值过程 (或网络演化) 的文献^[16-19]. 从网络演化的视角重新审视经典的生物繁衍模型亦成必然, 特别是受到 Capobianco 和 Frank^[16] 的启发, 基于生灭过程的生灭演化机理, 本文构建了一类出生率与年龄段有关的生灭分枝树演化模型. 本文主要研究了任一节点在不同年龄及临死时刻的出度分布、虚出度分布和拟出度分布, 并证明了拟出度过程是随机时刻终止的 Poisson 过程, 讨论了首生年龄及相对出生年龄的分布, 给出了任一节点成为孤立节点的概率.

英文引用格式: Wang H X, Fu Y B, Yan Y Z, et al. Birth-death branching tree with age-dependent birth-rate (in Chinese). Sci Sin Math, 2013, 43: 383–398, doi: 10.1360/012012-477

2 模型描述

设一种群是由不同生物个体 (节点) 组成的网络, 该网络演化基于如下基本假设条件:

- (1) 该种群中各个节点是同质且相互独立的;
- (2) 常数 $\alpha > 0$ 表示该种群节点的死亡率;
- (3) 将节点年龄按照出生率分为 M 个年龄段 $[S_{m-1}, S_m)$, $1 \leq m \leq M$, 其中 $0 = S_0 < S_1 < \dots < S_{M-1} < S_M = +\infty$, 常数 $\beta_m > 0$, $1 \leq m \leq M$, 表示节点在年龄段 $[S_{m-1}, S_m)$ 的出生率;
- (4) 任一节点在活着的条件下, 它在未来不同时段内的繁殖行为是条件独立的;
- (5) 任一节点在活着的条件下, 在未来时段内死亡和繁殖行为是条件独立的;
- (6) 除了初始节点外, 一个节点属于该种群当且仅当存在唯一一个属于该种群的节点为其父节点;
- (7) 在 $t = 0$ 时刻, 该网络当且仅当有一个初始节点 (该条件并非本质的, 只是为了叙述的方便).

基于上述基本假设条件, 出生率与年龄段有关的分枝树演化模型叙述如下. 设 i 是网络中任一节点, 在 $t (\geq 0)$ 时刻其年龄为 $s \geq 0$, $\exists m, 1 \leq m \leq M$, 使得 $s \in [S_{m-1}, S_m)$, 对充分小的 $\Delta t > 0$, 节点 i 在活着的条件下, 于 $[t, t + \Delta t)$ 时段内死亡的条件概率为 $\alpha \Delta t + o(\Delta t)$, 于 $[t, t + \Delta t)$ 时段内生产 1 个子节点的条件概率为 $\beta_m \Delta t + o(\Delta t)$, 而生产多个子节点的条件概率是 $o(\Delta t)$. 在该网络中, 如果 j 是 i 的子节点, 则称在 i 和 j 之间存在一条从始端 i 指向终端 j 的有向链边. 当父、子节点都活着时, 则它们之间的链边为有向实线链边, 当父、子节点中至少有一者死亡时, 则它们之间的链边为有向虚线链边. 死亡节点, 称为虚节点, 否则为实节点 (用虚线圆表示虚节点, 而用实线圆表示实节点).

如此, 在 $t \geq 0$ 时刻, 由节点 (实节点和虚节点) 和有向链边 (实的和虚的) 构成一个有向随机图 (树) $G_t(\cdot)$, 而节点的繁衍过程即是一个随机图过程 $\{G_t(\cdot), t \geq 0\}$. 该模型, 其出生率与年龄段有关而死亡率与年龄段无关, 简称为出生率与年龄段有关的生灭分枝树, 记为 $\{G_t(\alpha; \beta_r, 1 \leq r \leq M) : t \geq 0\}$.

注 1 模型 $\{G_t(\alpha; \beta_r, 1 \leq r \leq M) : t \geq 0\}$ 的一个特款是 $\{G_t(\alpha, \beta) : t \geq 0\}$, 其出生率不依赖于年龄段、是一个常数的情形. 此时, 模型 $\{G_t(\alpha, \beta) : t \geq 0\}$ 是一个 Markov 随机树过程, 即取值为树 (一个孤立节点也视为一个树) 的 Markov 链; 在 t 时刻活着的节点数 $Z(t)$ 是一个非负整值随机变量, 且 $\{Z(t) : t \geq 0\}$ 是一个线性生灭过程. 然而, 取值为树的随机过程 $\{G_t(\alpha; \beta_r, 1 \leq r \leq M) : t \geq 0\}$ 不是 Markov 过程; 而且在 t 时刻活着的节点数不构成一个生灭过程, 也不是 Markov 的. 但是, 通过扩维状态空间, 可以证明扩维后的过程是个 Markov 过程, 而 $\{G_t(\alpha; \beta_r, 1 \leq r \leq M) : t \geq 0\}$ 是其边沿过程, 即有下面存在性定理.

由模型的定义知, $\forall t \geq 0$, 在 $(0, t]$ 时段内出生的子节点数是有限的, 且在同一时刻不会同时出生两个或两个以上的子节点, 所以, 初始节点 (规定它为节点 1) 以及它的所有后代节点依出生时刻的先后顺序可以编号为 $1, 2, \dots, n, \dots$

$\forall n \geq 1$, 记

$$\begin{aligned} \vec{n} &= (1, 2, \dots, n); \\ \vec{f}(n) &= (f_1, f_2, \dots, f_n) : f_1 = 0, 1 \leq f_k \leq k-1, 2 \leq k \leq n; \\ \vec{i}(n) &= (i_1, i_2, \dots, i_n) : i_k \in \{0, 1\}, 1 \leq k \leq n; \\ \vec{b}(n) &= (b_1, b_2, \dots, b_n) : b_i \in R_+, 1 \leq i \leq n \text{ 且 } 0 = b_1 < b_2 < \dots < b_n, \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中, $\vec{n}$ 是节点标号向量; $\vec{f}(n)$ 是节点间的邻接关系 (父子关系) 向量; $f_1 = 0$ 表示初始节点无父节点; $f_k = j, 1 \leq j \leq k-1$ 表示节点 j 是节点 k 的父节点, $2 \leq k \leq n$; $\vec{i}(n)$ 是节点的生死状态向量: $i_k = 1$ 表示节点 k 活着, $i_k = 0$ 表示节点 k 已死亡, $1 \leq k \leq n$; $\vec{b}(n)$ 是节点出生时刻向量: $b_1 = 0$ 表示在 0

时刻有一个初始节点, b_j 表示第 j 个节点出生于时刻 b_j , $2 \leq j \leq n$, $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$ 表示在同一时刻没有两个或两个以上的节点出生.

记

$$\bar{F}_n = \{\vec{f}(n) : \vec{f}(n) \text{ 满足 (2.1)}\}, \quad \bar{E}_n = \{\vec{i}(n) : \vec{i}(n) \text{ 满足 (2.1)}\}, \quad \bar{B}_n = \{\vec{b}(n) : \vec{b}(n) \text{ 满足 (2.1)}\},$$

$$C_{3 \times n} = (\vec{n}, \vec{f}(n), \vec{i}(n)), \quad S_n^{(3)} = \{\vec{n}\} \times \bar{F}_n \times \bar{E}_n,$$

$$C_{4 \times n} = (\vec{n}, \vec{f}(n), \vec{i}(n), \vec{b}(n)), \quad S_n = \{\vec{n}\} \times \bar{F}_n \times \bar{E}_n \times \bar{B}_n, \quad S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n.$$

$$\text{对 } \forall C_{4 \times n} = (\vec{n}, \vec{f}(n), \vec{i}(n), \vec{b}(n)), \text{ 记 } I(C_{4 \times n}) = \{k : i_k = 1\}.$$

对 $\forall k \in I(C_{4 \times n})$, 记

$$D_k(C_{4 \times n}) = \{C_{4 \times (n+1)} = (\overrightarrow{n+1}, \vec{f}(n+1), \vec{r}(n+1), \vec{b}(n+1)) : \\ \vec{b}(n+1) = (\vec{b}(n), b_{n+1}), \vec{f}(n+1) = (\vec{f}(n), f_{n+1}), f_{n+1} = k, r_j \leq i_j, 1 \leq j \leq n\}.$$

给定 $C_{4 \times n} = (\vec{n}, \vec{f}(n), \vec{i}(n), \vec{b}(n))$ 及 $b_n \leq s < t$, 在 S_{n+1} 上定义函数 $f_n(s, t, C_{4 \times (n+1)} | C_{4 \times n}) : \forall C_{4 \times (n+1)} = (\overrightarrow{n+1}, \vec{f}(n+1), \vec{r}(n+1), \vec{b}(n+1))$,

$$f_n^{(k)}(s, t, C_{4 \times (n+1)} | C_{4 \times n}) = \tilde{I}_{D_k(C_{4 \times n})}(C_{4 \times (n+1)}) \left(\prod_{\substack{j \in I(C_{4 \times n}) \\ j \neq k, r_j = 0}} \int_s^t e^{-[\lambda(y-b_j) - \lambda(s-b_j)]} \alpha e^{-\alpha(y-s)} dy \right) \\ \times \left(\prod_{\substack{j \in I(C_{4 \times n}) \\ j \neq k, r_j = 1}} e^{-[\lambda(t-b_j) - \lambda(s-b_j)]} e^{-\alpha(t-s)} \right) \\ \times \lambda(b_{n+1} - b_k) g_1(t, b_k, r_k) \cdot g_2(t, b_{n+1}, r_{n+1}),$$

$$f_n(s, t, C_{4 \times (n+1)} | C_{4 \times n}) = \sum_{k \in I(C_{4 \times n})} f_n^{(k)}(s, t, C_{4 \times (n+1)} | C_{4 \times n}),$$

其中 $\tilde{I}_A(\cdot)$ 为示性函数, $\lambda(t) = \sum_{r=1}^M \beta_r(t \wedge S_r - t \wedge S_{r-1})$ (参见引理 3 或定理 2),

$$g_1(t, b_k, r_k) = \begin{cases} e^{-\alpha(t-s)} e^{-[\lambda(t-b_k) - \lambda(s-b_k)]}, & r_k = 1, \\ e^{-[\lambda(b_{n+1}-b_k) - \lambda(s-b_k)]} \int_{b_{n+1}}^t e^{-[\lambda(y-b_k) - \lambda(b_{n+1}-b_k)]} \alpha e^{-\alpha(y-s)} dy, & r_k = 0, \end{cases}$$

$$g_2(t, b_k, r_{n+1}) = \begin{cases} e^{-\alpha(t-b_{n+1})} e^{-\lambda(t-b_{n+1})}, & r_{n+1} = 1, \\ \int_{b_{n+1}}^t e^{-\lambda(y-b_{n+1})} \alpha e^{-\alpha(y-b_{n+1})} dy, & r_{n+1} = 0, \end{cases}$$

$f_n(s, t, C_{4 \times (n+1)} | C_{4 \times n})$ 的直观含义是由 s 时刻的状态 $C_{4 \times n}$ 转移到 t 时刻的状态 $C_{4 \times (n+1)}$ 时第 $n+1$ 个节点出生时刻的条件概率密度函数.

设 db_{n+1} 是 $(s, t]$ 上的 Lebesgue 测度, 对给定的 $\vec{b}(n)$, 且 $b_n \leq s$, 则 $\delta_{\{\vec{b}(n)\}} \times db_{n+1}$ 是 $(\bar{B}_{n+1}, \mathcal{B}(\bar{B}_{n+1}))$ 上的测度. 设 $\mu_{n+1}(\cdot)$ 是 $(S_{n+1}^{(3)}, \mathcal{B}(S_{n+1}^{(3)}))$ 上的计数测度. 记 $\nu_{n+1}(\cdot) = \mu_{n+1} \times (\delta_{\{\vec{b}(n)\}} \times db_{n+1})(\cdot)$, 则 $\nu_{n+1}(\cdot)$ 是 $(S_{n+1}, \mathcal{B}(S_{n+1}))$ 上的测度. 令 $\forall D_{n+1} \in \mathcal{B}(S_{n+1})$,

$$Q_n(s, t, D_{n+1} | C_{4 \times n}) = \int_{D_{n+1}} f_n(s, t, C_{4 \times (n+1)} | C_{4 \times n}) \nu_{n+1}(dC_{4 \times (n+1)}),$$

则 $\forall 0 \leq s < t$, $C_{4 \times n} \in S_n$, $Q_n(s, t, \cdot | C_{4 \times n})$ 是 $(S_{n+1}, \mathcal{B}(S_{n+1}))$ 上的一个测度, 对 $\forall 0 \leq s < t$, 及 $D_{n+1} \in \mathcal{B}(S_{n+1})$, $Q_n(s, t, D_{n+1} | \cdot)$ 是 $(S_n, \mathcal{B}(S_n))$ 上的一个可测函数.

记

$$A_{2 \times n} = \begin{pmatrix} \vec{n} \\ \vec{f}(n) \end{pmatrix}, \quad B_{2 \times n} = \begin{pmatrix} \vec{i}(n) \\ \vec{b}(n) \end{pmatrix}, \quad C_{4 \times n} = \begin{pmatrix} A_{2 \times n} \\ B_{2 \times n} \end{pmatrix}.$$

设分枝树 $G_t(\alpha; \beta_r, 1 \leq r \leq M)$ 中节点数为 $N(t)$, 则 $G_t(\alpha; \beta_r, 1 \leq r \leq M)$ 可表示为

$$G_t(\alpha; \beta_r, 1 \leq r \leq M) = A_{2 \times N(t)}.$$

$B_{2 \times N(t)}$ 表示 $G_t(\alpha; \beta_r, 1 \leq r \leq M)$ 中 $N(t)$ 个节点的出生时刻及生死状况的矩阵, 记

$$X_t = \begin{pmatrix} A_{2 \times N(t)} \\ B_{2 \times N(t)} \end{pmatrix} = C_{4 \times N(t)}.$$

定理 (存在性) $\{X_t : t \geq 0\}$ 是一个以 S 为状态空间的非时齐 Markov 过程, 其转移函数为 (2.2), 且 $\{G_t(\alpha; \beta_r, 1 \leq r \leq M) : t \geq 0\}$ 是其边沿过程.

根据模型定义, $\{X_t : t \geq 0\}$ 满足 Markov 性是明显的. 下面求 $\{X_t : t \geq 0\}$ 的转移函数.

$\forall D \in \mathcal{B}(S)$, $0 \leq s < t$, $n \geq 1$, $C_{4 \times n} = (\vec{n}, \vec{f}(n), \vec{i}(n), \vec{b}(n)) \in S_n$, 下式中 $D_m \in \mathcal{B}(S_m)$,

$$\begin{aligned} P(X(t) \in D | X(s) = C_{4 \times n}) &= \sum_{m=1}^{\infty} P(X(t) \in D, N(t) = m | X(s) = C_{4 \times n}) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} P(X(t) \in D_m | X(s) = C_{4 \times n}) \\ &= P(X(t) \in D_n | X(s) = C_{4 \times n}) \\ &\quad + \sum_{m=n+1}^{\infty} P(X(t) \in D_m | X(s) = C_{4 \times n}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

下面分别求出上述和式中的各项. 记 $\hat{D}_n = \{\vec{r}(n) : (\vec{n}, \vec{f}(n), \vec{r}(n), \vec{b}(n)) \in D_n\}$, 那么

$$\begin{aligned} P(X(t) \in D_n | X(s) = C_{4 \times n}) &= \sum_{\vec{r}(n) \in \hat{D}_n} \prod_{j \in I(C_{4 \times n})} \int_s^t e^{-[\lambda(y-b_j)-\lambda(s-b_j)]} \alpha e^{-\alpha(y-s)} dy \\ &\quad \times \prod_{\substack{j \in I(C_{4 \times n}) \\ r_j=1}} e^{-[\lambda(t-b_j)-\lambda(s-b_j)]} e^{-\alpha(t-s)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

记 $m = n + k$, $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} P(X(t) \in D_m | X(s) = C_{4 \times n}) &= P(X(t) \in D_{n+k} | X(s) = C_{4 \times n}) \\ &= \int_{S_{n+1}} \cdots \int_{S_{n+k-1}} \int_{D_{n+k}} Q_n(s, b_{n+1}, dC_{4 \times (n+1)} | C_{4 \times n}) \cdots \\ &\quad \times Q_{n+k-2}(b_{n+k-2}, b_{n+k-1}, dC_{4 \times (n+k-1)} | C_{4 \times (n+k-2)}) \\ &\quad \times Q_{n+k-1}(b_{n+k-1}, t, dC_{4 \times (n+k)} | C_{4 \times (n+k-1)}), \end{aligned} \quad (2.4)$$

将 (2.3) 和 (2.4) 代入 (2.2) 即得到 $\{X_t: t \geq 0\}$ 的转移函数.

不难证 S 是可分完备距离空间 $\mathbb{R}^\infty$ 的一个 Borel 子集, 由 Markov 过程存在性定理^[20] 即可得到 $\{X_t: t \geq 0\}$ 存在性证明, 而 $\{G_t(\alpha; \beta_r, 1 \leq r \leq M): t \geq 0\}$ 是其边沿过程, 其存在性是明显的.

生灭分枝树 $\{G_t(\alpha; \beta_r, 1 \leq r \leq M): t \geq 0\}$ 中各个节点是同质的, 本文将以任一节点 i 为代表展开讨论.

定义 1 已知节点 i 的出生时刻为 t_b , 死亡时刻为 t_d , 则 $t_d - t_b$ 称为节点 i 的寿命, 记为 Y_i .

定义 2 已知节点 i 的出生时刻为 t_b , 设 $t \geq t_b$, 则 $t - t_b$ 称为节点 i 在 t 时刻的年龄.

考虑到子节点可能会死亡, 下面给出“度”的定义.

定义 3 已知节点 i 出生时刻为 t_b , 设 $t \geq t_b$, 在时刻 t 以节点 i 为始端的实线链边数目, 称为节点 i 在 t 时刻的出度或在年龄 $t - t_b$ 的出度; 在时刻 t 以节点 i 为始端的虚线链边数目, 称为节点 i 在 t 时刻的虚出度或在年龄 $t - t_b$ 的虚出度; 在时刻 t 以节点 i 为始端的链边 (包括实的和虚的) 数目, 称为节点 i 在 t 时刻的拟出度或在年龄 $t - t_b$ 的拟出度. 在时刻 t 以节点 i 为终端的实线链边数目, 称为节点 i 在 t 时刻的入度或在年龄 $t - t_b$ 的入度; 在时刻 t 以节点 i 为终端的虚线链边数目, 称为节点 i 在 t 时刻的虚入度或在年龄 $t - t_b$ 的虚入度.

3 度分布与拟出度过程

引理 1 设 i 是分枝树 $\{G_t(\alpha; \beta_r, 1 \leq r \leq M): t \geq 0\}$ 中的任一节点, 则节点 i 的寿命 Y_i 服从均值为 $\frac{1}{\alpha}$ 的指数分布.

节点 i 的寿命的分布函数和概率密度函数分别记为 $F_{Y_i}(\cdot)$ 和 $f_{Y_i}(\cdot)$.

定理 1 设 i 是生灭分枝树 $\{G_t(\alpha; \beta_r, 1 \leq r \leq M): t \geq 0\}$ 中的任一节点, X_1 表示节点 i 死亡时刻的拟出度 (即死亡前生产的子节点数), 则 X_1 的分布为 $\forall k \geq 0$,

$$P(X_1 = k) = \sum_{m=1}^M \int_{S_{m-1}}^{S_m} \sum_{k_1 + \dots + k_m = k} \prod_{j=1}^{m-1} \frac{[\beta_j(S_j - S_{j-1})]^{k_j} e^{-\beta_j(S_j - S_{j-1})}}{k_j!} \\ \times \frac{[\beta_m(t - S_{m-1})]^{k_m} e^{-\beta_m(t - S_{m-1})}}{k_m!} \alpha e^{-\alpha t} dt.$$

证明 不妨假设节点 i 的出生时刻为 $t_b = 0$, 由全概率公式得 $\forall k \geq 0$,

$$P(X_1 = k) = \int_0^{+\infty} P(X_1 = k | Y_i = t) f_{Y_i}(t) dt = \sum_{m=1}^M \int_{S_{m-1}}^{S_m} P(X_1 = k | Y_i = t) f_{Y_i}(t) dt. \quad (3.1)$$

当 $t \in [S_{m-1}, S_m)$ 时, 将每个年龄段 $[S_{r-1}, S_r), 1 \leq r \leq m-1$ 都等分成 n 个小区间,

$$\left[S_{r-1} + \frac{j-1}{n}(S_r - S_{r-1}), S_{r-1} + \frac{j}{n}(S_r - S_{r-1}) \right), \quad 1 \leq j \leq n,$$

亦将年龄段 $[S_{m-1}, t)$ 等分成 n 个小区间,

$$\left[S_{m-1} + \frac{j-1}{n}(t - S_{m-1}), S_{m-1} + \frac{j}{n}(t - S_{m-1}) \right), \quad 1 \leq j \leq n.$$

记 $\epsilon_n(r) = \frac{S_r - S_{r-1}}{n}, 1 \leq r \leq m-1, \epsilon_n(t) = \frac{t - S_{m-1}}{n}$, 由分枝树的定义知, 节点 i 在小区间段 $[S_{r-1} + (j-1)\epsilon_n(r), S_{r-1} + j\epsilon_n(r))$ 内生产一个子节点的概率是 $\beta_r(\epsilon_n(r)) + o(\epsilon_n(r))$, 而生产多个节点的概率

为 $o(\epsilon_n(r))$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq r \leq m-1$; 节点 i 在小区间段 $[S_{m-1} + (j-1)\epsilon_n(t), S_{m-1} + j\epsilon_n(t))$ 内生产一个子节点的概率是 $\beta_m(\epsilon_n(t)) + o(\epsilon_n(t))$, 而生产多个节点的概率为 $o(\epsilon_n(t))$, $1 \leq j \leq n$. 所以当 $t \in [S_{m-1}, S_m)$ 时,

$$P(X_1 = k | Y_i = t) = \sum_{k_1 + \dots + k_m = k} \prod_{r=1}^{m-1} \binom{n}{k_r} (\beta_r(\epsilon_n(r)) + o(\epsilon_n(r)))^{k_r} (1 - \beta_r(\epsilon_n(r)) + o(\epsilon_n(r)))^{n-k_r} \\ \times \binom{n}{k_m} (\beta_m(\epsilon_n(t)) + o(\epsilon_n(t)))^{k_m} (1 - \beta_m(\epsilon_n(t)) + o(\epsilon_n(t)))^{n-k_m}.$$

令 $n \rightarrow +\infty$, 并注意到 $\epsilon_n(r) \rightarrow 0$, $\epsilon_n(t) \rightarrow 0$. 于是取极限得

$$P(X_1 = k | Y_i = t) = \sum_{k_1 + \dots + k_m = k} \prod_{r=1}^{m-1} \frac{[\beta_r(S_r - S_{r-1})]^{k_r} e^{-\beta_r(S_r - S_{r-1})}}{k_r!} \frac{[\beta_m(t - S_{m-1})]^{k_m} e^{-\beta_m(t - S_{m-1})}}{k_m!}.$$

将上式代入 (3.1) 即得定理的证明. 定理证毕. $\square$

推论 1 设 i 是分枝树 $\{G_t(\alpha; \beta) : t \geq 0\}$ 中的任一节点, X_1 表示节点 i 死亡时刻的拟出度, 则 X_1 服从参数为 $\frac{\beta}{\alpha + \beta}$ 的几何分布, 即

$$P(X_1 = k) = \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta} \right)^k \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

推论 2 (1) 设 A 表示分枝树 $\{G_t(\alpha; \beta_r, 1 \leq r \leq M) : t \geq 0\}$ 中的任一节点 i 在其存活期内一直是分枝树的“叶”(即在存活期内从未生产子节点), 则

$$P(A) = \sum_{m=1}^M \prod_{j=1}^{m-1} e^{-\beta_j(S_j - S_{j-1})} [e^{-(\beta_m + \alpha)S_{m-1}} - e^{-(\beta_m + \alpha)S_m}] \frac{\alpha}{\beta_m + \alpha} e^{\beta_m S_{m-1}};$$

(2) $\{G_t(\alpha; \beta) : t \geq 0\}$ 中任一节点 i 在其存活期内一直是分枝树的“叶”的概率为 $\frac{\alpha}{\alpha + \beta}$.

定义 4 设 $\lambda(t)$, $t \geq 0$ 是一个单调不减的连续函数, 并且 $\lambda(0) = 0$, 若 $\exists T > 0$, 使得 $T = \inf\{t_0 : \lambda(t) = \lambda(t_0), t \geq t_0\}$, 则称 $\lambda(t)$ 为在 T 终止上升的单调不减连续函数. 特别地, 当 $\lambda > 0$, $T > 0$, 定义 $\bar{\lambda}(t) = \lambda \cdot (t \wedge T)$, 则 $\bar{\lambda}(t)$ 是一个在 T 终止上升的单调不减连续函数.

定义 5 设 $\lambda(t)$ 是一个在时刻 T 终止上升的单调不减连续函数, $\{N(t) : t \geq 0\}$ 是一个以 $\lambda(t)$ 为其强度函数的 Poisson 过程, 则称其为在 T 时刻终止的 (非时齐) Poisson 过程, 简称 T -终止 Poisson 过程; 若 $\{N(t) : t \geq 0\}$ 是一个以 $\bar{\lambda}(t)$ 为其强度函数的 Poisson 过程, 则称它为在 T 时刻终止的时齐 Poisson 过程, 简称 T -终止时齐 Poisson 过程.

引理 2 设 $\lambda(t)$ 是严格单调增加的连续函数, $T(\omega)$ 是 (Ω, F, P) 上的随机变量, $P(T(\omega) > 0) = 1$. 令 $\hat{\lambda}(t, \omega) = \lambda(t \wedge T(\omega))$, 则对几乎所有的 $\omega \in \Omega$, $\hat{\lambda}(t, \omega) = \lambda(t \wedge T(\omega))$ 是在 $T(\omega)$ 终止上升的单调不减连续函数.

定义 6 设 $\lambda(t)$ 是严格单调增加函数, $T(\omega)$ 是 (Ω, F, P) 上的随机变量, 且 $P(T(\omega) > 0) = 1$, $\{N(t) : t \geq 0\}$ 是点过程. 若在 $T(\omega) = T$ 条件下, 点过程 $\{N(t) : t \geq 0\}$ 是以 $\lambda(t \wedge T)$ 为强度函数的 Poisson 过程, 则称点过程 $\{N(t) : t \geq 0\}$ 是在随机时刻 $T(\omega)$ 终止的强度函数为 $\lambda(t)$ 的 Poisson 过程, 简称为随机终止的 Poisson 过程.

定义 7 设 i 是 $\{G_t(\alpha; \beta_r, 1 \leq r \leq M) : t \geq 0\}$ 中的任一节点, $N(t)$ 表示节点 i 在年龄 t 前已生产的子节点数, 即节点 i 在年龄 t 时刻的拟出度, 称 $\{N(t) : t \geq 0\}$ 为节点 i 的拟出度过程.

下面将证明分枝树 $\{G_t(\alpha; \beta_r, 1 \leq r \leq M) : t \geq 0\}$ 中的任一节点的拟出度过程是随机终止的 Poisson 过程, 其随机终止时刻为节点 i 的寿命 $Y_i(\omega)$.

引理 3 $\forall t \geq 0$, 令 $\lambda(t) = \sum_{r=1}^M \beta_r(t \wedge S_r - t \wedge S_{r-1})$, 则 $\lambda(t)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的严格单调增加连续函数.

定理 2 设 i 是 $\{G_t(\alpha; \beta_r, 1 \leq r \leq M) : t \geq 0\}$ 中的任一节点, 则节点 i 的拟出度过程 $\{N(t) : t \geq 0\}$ 是在随机时刻 Y_i 终止的、强度函数为 $\lambda(t)$ 的 Poisson 过程, 其中

$$\lambda(t) = \sum_{r=1}^M \beta_r(t \wedge S_r - t \wedge S_{r-1}), \quad t \geq 0.$$

证明 由分枝树的定义知, 在 $Y_i = y > 0$ 的条件下, $\forall 0 \leq s < t \leq y, \forall k \geq 0$,

$$P(N(t) - N(s) = k \mid Y_i = y) = \frac{(\lambda(t) - \lambda(s))^k}{k!} e^{-(\lambda(t) - \lambda(s))}.$$

由引理 3 知, $\lambda(t)$ 是一个严格单调增加连续函数, 而且 $P(Y_i > 0) = 1$. 于是由定义 6 知, $\{N(t) : t \geq 0\}$ 是在随机时刻 Y_i 终止的、强度函数为 $\lambda(t)$ 的 Poisson 过程. 定理证毕. $\square$

定理 3 设 i 是 $\{G_t(\alpha; \beta_r, 1 \leq r \leq M) : t \geq 0\}$ 中的任一节点, $N(t)$ 表示节点 i 在年龄 t 时刻的拟出度, X_1 是节点 i 在死亡时刻的拟出度, 则

$$(1) N(t) \text{ 分布列为 } P(N(t) = k) = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^k(t \wedge y)}{k!} e^{-\lambda(t \wedge y)} \alpha e^{-\alpha y} dy, \quad k \geq 0.$$

$$(2) X_1 \text{ 分布列为 } P(X_1 = k) = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^k(y)}{k!} e^{-\lambda(y)} \alpha e^{-\alpha y} dy, \quad k \geq 0.$$

证明 (1) 由定理 2 和全概率公式得

$$P(N(t) = k) = \int_0^{+\infty} P(N(t) = k \mid Y_i = y) f_{Y_i}(y) dy = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^k(t \wedge y)}{k!} e^{-\lambda(t \wedge y)} \alpha e^{-\alpha y} dy, \quad k \geq 0.$$

(2) 由定理 2 及定理 3(1) 得

$$P(X_1 = k) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^k(t \wedge y)}{k!} e^{-\lambda(t \wedge y)} \alpha e^{-\alpha y} dy = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^k(y)}{k!} e^{-\lambda(y)} \alpha e^{-\alpha y} dy, \quad k \geq 0.$$

定理证毕. $\square$

定理 1 曾给出过 X_1 的分布列, 而定理 3(2) 用更为简洁的表达式再一次给出了 X_1 的分布列.

引理 4 设 i 是 $\{G_t(\alpha; \beta_r, 1 \leq r \leq M) : t \geq 0\}$ 中的任一节点, $\xi(S_{r-1}, S_{r-1} + a)$ 表示节点 i 在其年龄段 $[S_{r-1}, S_{r-1} + a)$ ($0 < a \leq S_r - S_{r-1}$) 生产的且在 $S_{r-1} + a$ 仍活着的子节点数. 记 $\lambda_r = \frac{\beta_r}{\alpha}$, $F(a) = 1 - e^{-\alpha a}$, 则 $\xi(S_{r-1}, S_{r-1} + a)$ 的条件分布列为如下 Poisson 分布:

$$P(\xi(S_{r-1}, S_{r-1} + a) = k \mid Y_i > S_{r-1} + a) = \frac{(\lambda_r F(a))^k}{k!} e^{-\lambda_r F(a)}, \quad k \geq 0.$$

证明 首先记

$$P_k(a) = P(\xi(S_{r-1}, S_{r-1} + a) = k \mid Y_i > S_{r-1} + a), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

显然 $P_k(0) = \delta_{k0}$. $\forall 0 < a \leq S_r - S_{r-1}$, 取充分小正数 Δt , 由分枝树定义及全概率公式得

$$P_0(a + \Delta t) = (1 - \beta_r \Delta t + o(\Delta t)) P_0(a) + (\alpha \Delta t + o(\Delta t)) (1 - \beta_r \Delta t + o(\Delta t)) P_1(a),$$

$$P_k(a + \Delta t) = (1 - \beta_r \Delta t + o(\Delta t)) (1 - k \alpha \Delta t + o(\Delta t)) P_k(a)$$

$$\begin{aligned}
& + (1 - \beta_r \Delta t + o(\Delta t))[(k+1)\alpha \Delta t + o(\Delta t)]P_{k+1}(a) \\
& + (\beta_r \Delta t + o(\Delta t))[1 - (k-1)\alpha \Delta t + o(\Delta t)]P_{k-1}(a), \quad k \geq 1.
\end{aligned}$$

整理可得

$$\begin{aligned}
P'_0(a) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{P_0(a + \Delta t) - P_0(a)}{\Delta t} = -\beta_r P_0(a) + \alpha P_1(a), \\
P'_k(a) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{P_k(a + \Delta t) - P_k(a)}{\Delta t} = (-\beta_r - k\alpha)P_k(a) + (k+1)\alpha P_{k+1}(a) + \beta_r P_{k-1}(a), \quad k \geq 1.
\end{aligned}$$

设 $u(x, a)$ 是分布列 $\{P_k(a), k \geq 0\}$ 的概率母函数, 即 $u(x, a) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(a)x^k$, 因此,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(x, a)}{\partial a} &= \sum_{k=0}^{\infty} P'_k(a)x^k \\
&= -\beta_r P_0(a) + \alpha P_1(a) + \sum_{k=1}^{\infty} [(-\beta_r - k\alpha)P_k(a) + (k+1)\alpha P_{k+1}(a) + \beta_r P_{k-1}(a)]x^k,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} [(-\beta_r - k\alpha)P_k(a)]x^k &= \beta_r u(x, a) - \beta_r P_0(a) - \alpha x \frac{\partial u(x, a)}{\partial x}, \\
\sum_{k=1}^{\infty} [(k+1)\alpha P_{k+1}(a)]x^k &= \alpha \frac{\partial u(x, a)}{\partial x} - \alpha P_1(a), \\
\sum_{k=1}^{\infty} [\beta_r P_{k-1}(a)]x^k &= \beta_r x u(x, a).
\end{aligned}$$

综合上述式子可整理得概率母函数满足如下方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, a)}{\partial a} + \alpha(x-1) \frac{\partial u(x, a)}{\partial x} = \beta_r(x-1)u(x, a), \\ u(x, 0) = 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

由于非负随机变量的概率母函数唯一确定分布列, 方程 (3.2) 的解 $u(x, a) = e^{-(1-x)\frac{\beta_r}{\alpha}F(a)}$ 是以 $\frac{\beta_r}{\alpha}F(a)$ 为参数的 Poisson 分布的概率母函数, 所以分布列 $\{P_k(a), k \geq 0\}$ 就是以 $\frac{\beta_r}{\alpha}F(a)$ 为参数的 Poisson 分布. 引理证毕. $\square$

引理 5 设 i 是 $\{G_t(\alpha; \beta_r, 1 \leq r \leq M) : t \geq 0\}$ 中的任一节点, 设 $b \geq S_r$, $\eta(r, b)$ ($1 \leq r \leq M-1$) 表示节点 i 在年龄段 $[S_{r-1}, S_r)$ 生产的且在时刻 b 仍活着的子节点数, 则 $\eta(r, b)$ 的条件分布列为如下 Poisson 分布:

$$P_k(r, b) = P(\eta(r, b) = k \mid Y_i > S_r) = \frac{\lambda^k(\alpha, b, r)}{k!} e^{-\lambda(\alpha, b, r)},$$

其中 $k \geq 0$, $\lambda(\alpha, b, r) = \lambda_r F(S_r - S_{r-1})e^{-\alpha(b-S_r)}$, $\lambda_r = \frac{\beta_r}{\alpha}$.

证明 由引理 4 及分枝树模型中的独立性假设条件得

$$\begin{aligned}
P_k(r, b) &= P(\eta(r, b) = k \mid Y_i > S_r) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} P(\eta(r, b) = k \mid \xi(S_{r-1}, S_r) = n, Y_i > S_r) P(\xi(S_{r-1}, S_r) = n \mid Y_i > S_r)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[\lambda_r F(S_r - S_{r-1})]^n}{n!} e^{-\lambda_r F(S_r - S_{r-1})} \binom{n}{k} (\beta_r (e^{-\alpha(b-S_r)})^k (1 - e^{-\alpha(b-S_r)})^{n-k}) \\
&= \frac{\lambda^k(\alpha, b, r)}{k!} e^{-\lambda(\alpha, b, r)},
\end{aligned}$$

其中 $k \geq 0$, $\lambda(\alpha, b, r) = \lambda_r F(S_r - S_{r-1}) e^{-\alpha(b-S_r)}$, $\lambda_r = \frac{\beta_r}{\alpha}$. 引理证毕. $\square$

引理 6 设 $t > S_r$ 且 $b \geq S_r$, 则 $P(\eta(r, b) = k \mid Y_i > S_r) = P(\eta(r, b) = k \mid Y_i > t)$, $1 \leq r \leq M-1$.

证明 由模型中独立性假设和指数分布的无后效性即得到引理的证明. $\square$

引理 7 设 $b \in [S_{r-1}, S_r)$, $1 \leq r \leq M$, 那么在 $Y_i > b$ 的条件下, 随机事件 $\eta(1, b), \eta(2, b), \dots, \eta(r-1, b), \xi(S_{r-1}, b)$ 是条件独立的, 记号如引理 4 和 5 所示.

证明 由模型中的独立性假设即得到引理的证明. $\square$

定理 4 设 i 是 $\{G_t(\alpha; \beta_r, 1 \leq r \leq M) : t \geq 0\}$ 中任一节点, 节点 i 在年龄 b 时刻的出度记为 $\eta(b)$, 当 $b \in [S_{m-1}, S_m)$, $1 \leq m \leq M$, 那么在 $Y_i > b$ 的条件下, $\eta(b)$ 的条件分布是参数为 $\Lambda(\alpha, b, m)$ 的 Poisson 分布, 其中

$$\Lambda(\alpha, b, m) = \sum_{r=1}^{m-1} \lambda(\alpha, b, r) + \lambda_m F(b - S_{m-1}).$$

证明 显然 $\eta(b) = \sum_{r=1}^{m-1} \eta(r, b) + \xi(S_{m-1}, b)$. 由引理 7 知, 在 $Y_i > b$ 的条件下, $\eta(1, b), \eta(2, b), \dots, \eta(m-1, b), \xi(S_{m-1}, b)$ 是条件独立的. 由引理 5 和 6 知, $\eta(r, b)$, $1 \leq r \leq m-1$ 关于 $Y_i > b$ 的条件分布列是参数为 $\lambda(\alpha, b, r)$ 的 Poisson 分布. 由引理 4 知, $\xi(S_{m-1}, b)$ 服从参数为 $\lambda_m F(b - S_{m-1})$ 的 Poisson 分布. 于是由 Poisson 分布的可加性立得, $\eta(b)$ 服从参数为 $\Lambda(\alpha, b, m)$ 的 Poisson 分布, 其中 $\Lambda(\alpha, b, m) = \sum_{r=1}^{m-1} \lambda(\alpha, b, r) + \lambda_m F(b - S_{m-1})$. 定理证毕. $\square$

推论 3 设 i 是 $\{G_t(\alpha; \beta) : t \geq 0\}$ 中的任一节点, 在 $Y_i > b$ 条件下, 在年龄 b 时刻的出度 $\tilde{\eta}(b)$ 的条件分布是服从参数为 $\lambda F(b)$ 的 Poisson 分布, 即

$$P(\tilde{\eta}(b) = k \mid Y_i > b) = \frac{(\lambda F(b))^k}{k!} e^{-\lambda F(b)}, \quad k \geq 0,$$

其中 $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$, $F(b) = 1 - e^{-\alpha b}$.

证明 由引理 4 或定理 4 易得该推论的证明. $\square$

引理 8 在 $\{G_t(\alpha; \beta_r, 1 \leq r \leq M) : t \geq 0\}$ 中, 设 $a > 0$ 且 $b \geq S_{r-1} + a$, $\zeta_b(S_{r-1}, S_{r-1} + a)$ 表示节点 i 在年龄段 $[S_{r-1}, S_{r-1} + a)$ 生产的而在年龄 b 前已死亡的子节点数, 则在 $Y_i > b$ 的条件下, $\zeta_b(S_{r-1}, S_{r-1} + a)$ 条件分布列是以 $\lambda(r, a, b, \alpha)$ 为参数的 Poisson 分布, 其中

$$\lambda(r, a, b, \alpha) = \beta a \left[1 - \frac{e^{-\alpha(b-a)} - e^{-\alpha b}}{\alpha a} \right].$$

证明 设 $a > 0$ 且 $b \geq S_{r-1} + a$, $\eta(S_{r-1}, S_{r-1} + a)$ 表示节点 i 在年龄段 $[S_{r-1}, S_{r-1} + a)$ 生产的子节点数, 由全概率公式有

$$\begin{aligned}
&P(\zeta_b(S_{r-1}, S_{r-1} + a) = k \mid Y_i > b) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} P(\zeta_b(S_{r-1}, S_{r-1} + a) = k, \eta(S_{r-1}, S_{r-1} + a) = n \mid Y_i > b) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} P(\zeta_b(S_{r-1}, S_{r-1} + a) = k \mid \eta(S_{r-1}, S_{r-1} + a) = n, Y_i > b) P(\eta(S_{r-1}, S_{r-1} + a) = n \mid Y_i > b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \left(\int_0^a \frac{e^{-\alpha(b-s)}}{a} ds \right)^{n-k} \left(1 - \int_0^a \frac{e^{-\alpha(b-s)}}{a} ds \right)^k \frac{(\beta_r a)^n}{n!} e^{-\beta_r a} \\
&= \frac{[\lambda(r, a, b, \alpha)]^k}{k!} e^{-\lambda(r, a, b, \alpha)},
\end{aligned}$$

其中 $\lambda(r, a, b, \alpha) = \beta_r a [1 - \frac{e^{-\alpha(b-a)} - e^{-\alpha b}}{a\alpha}]$. 引理证毕. $\square$

引理 9 设 i 是分枝树 $\{G_t(\alpha; \beta_r, 1 \leq r \leq M) : t \geq 0\}$ 中的任一节点, 当 $S_{m-1} \leq b < S_m$ 时, $\zeta_b(S_{r-1}, S_r)$, $1 \leq r \leq m-1$, 及 $\zeta_b(S_{m-1}, b)$ 关于 $Y_i > b$ 是条件独立的.

证明 由分枝树模型定义中条件独立性假设条件即得到引理的证明. $\square$

定理 5 设 i 是 $\{G_t(\alpha; \beta_r, 1 \leq r \leq M) : t \geq 0\}$ 中的任一节点, $\forall b > 0$, $\zeta_b(0, b)$ 表示节点 i 在年龄 b 时刻的虚出度, 即在年龄段 $[0, b)$ 内死亡的子节点数, 当 $b \in [S_{m-1}, S_m)$, $1 \leq m \leq M$ 时, 在 $Y_i > b$ 条件下, $\zeta_b(0, b)$ 服从参数为 Λ_m 的 Poisson 分布, 其中

$$\Lambda_m = \sum_{r=1}^{m-1} \lambda(r, S_r - S_{r-1}, b, \alpha) + \lambda(m, b - S_{m-1}, b, \alpha).$$

证明 记 $P_r(\cdot) = \{P_r(k) : k \geq 0\}$ 表示 $\zeta_b(S_{r-1}, S_r)$ 关于 $Y_i > b$ 的条件分布列, $1 \leq r \leq m-1$; $P_m(\cdot) = \{P_m(k) : k \geq 0\}$ 表示 $\zeta_b(S_{m-1}, b)$ 关于 $Y_i > b$ 的条件分布列. 显然

$$\zeta_b(0, b) = \sum_{r=1}^{m-1} \zeta_b(S_{r-1}, S_r) + \zeta_b(S_{m-1}, b),$$

那么有

$$P(\zeta_b(0, b) = k \mid Y_i > b) = P\left(\sum_{r=1}^{m-1} \zeta_b(S_{r-1}, S_r) + \zeta_b(S_{m-1}, b) = k \mid Y_i > b\right).$$

由引理 9 知, $P(\zeta_b(0, b) = k \mid Y_i > b) = *_{r=1}^m P_r(k)$, 其中 $*_{r=1}^m P_r(k)$ 表示分布列 $P_r(\cdot)$, $1 \leq r \leq m$ 的卷积. 又由引理 8 知, $P_r(\cdot)$, $1 \leq r \leq m-1$ 是服从参数为 $\lambda(r, S_r - S_{r-1}, b, \alpha)$ Poisson 分布, 而 $P_m(\cdot)$ 服从参数为 $\lambda(m, b - S_{m-1}, b, \alpha)$ 的 Poisson 分布, 于是由 Poisson 分布的可加性即得定理的证明. 定理证毕. $\square$

4 首生年龄、相对出生年龄及孤立节点

定义 8 在分枝树中, 节点 i 生产第一个子节点的年龄, 称为节点 i 的首生年龄.

定理 6 设 $\{G_t(\alpha; \beta_r, 1 \leq r \leq M) : t \geq 0\}$ 的任一节点 i 的首生年龄记为 Y , 则 $\forall t > 0$, Y 关于 $\{N(t) = 1, Y_i > t\}$ 的条件分布函数为

$$F_Y(s \mid N(t) = 1, Y_i > t) = \begin{cases} 0, & s < 0, \\ \frac{\lambda(s)}{\lambda(t)}, & 0 \leq s \leq t, \\ 1, & s > t, \end{cases}$$

其中 $\lambda(t) = \sum_{r=1}^M \beta_r(t \wedge S_r - t \wedge S_{r-1})$, $t \geq 0$.

证明 对 $0 \leq s \leq t$, 有

$$F_Y(s \mid N(t) = 1, Y_i > t) = P(Y \leq s \mid N(t) = 1, Y_i > t)$$

$$= \frac{P(Y \leq s, N(t) = 1, Y_i > t)}{P(N(t) = 1, Y_i > t)} = \frac{\lambda(s)}{\lambda(t)},$$

其中 $\lambda(t) = \sum_{r=1}^M \beta_r(t \wedge S_r - t \wedge S_{r-1})$, $t \geq 0$. 定理证毕. $\square$

定义 9 在分枝树 $\{G_t(\alpha; \beta_r, 1 \leq r \leq M) : t \geq 0\}$ 中, 设节点 j 是节点 i 的子节点, 节点 i 生产子节点 j 时的年龄为 ξ_j , 则存在 r , 使得 $\xi_j \in [S_{r-1}, S_r)$, $1 \leq r \leq M$. 记 $\eta_j = \xi_j - S_{r-1}$, 称 η_j 为节点 j 的相应于父节点年龄段的相对出生年龄, 简称为节点 j 的相对出生年龄.

定理 7 设 i 是分枝树 $\{G_t(\alpha; \beta_r, 1 \leq r \leq M) : t \geq 0\}$ 中的任一节点, $\forall 0 < a < S_r - S_{r-1}$, $1 \leq r \leq M$, $\eta(S_{r-1}, S_{r-1} + a)$ 表示节点 i 在年龄段 $(S_{r-1}, S_{r-1} + a)$ 生产的子节点数. $\forall t \geq S_{r-1} + a$, 在 $\{\eta(S_{r-1}, S_{r-1} + a) = n, Y_i > t\}$ 的条件下, n 个子节点的相对出生年龄 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 的顺序统计量 $\eta_{(1)}, \eta_{(2)}, \dots, \eta_{(n)}$ 关于 $\{\eta(S_{r-1}, S_{r-1} + a) = n, Y_i > t\}$ 条件分布与 n 个区间 $[0, a]$ 上的均匀分布的独立随机变量的顺序统计量的分布一致, 即条件概率密度为

$$f(s_1, s_2, \dots, s_n) = \frac{n!}{a^n}, \quad 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n < a.$$

证明 设 $\forall 0 < a < S_r - S_{r-1}$, $\forall 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n < s_{n+1} = a$, 取 $\delta_j > 0$, 充分地小使得 $s_j + \delta_j < s_{j+1}$, $j = 1, 2, \dots, n$. A 表示事件: 在 $[s_j, s_j + \delta_j]$ 中恰有一个子节点出生, $1 \leq j \leq n$, 而在 $[0, a]$ 的之外的时段无节点出生. 那么

$$\begin{aligned} & P(s_j \leq \eta_{(j)} \leq s_j + \delta_j, j = 1, 2, \dots, n \mid \eta(S_{r-1}, S_{r-1} + a) = n, Y_i > t) \\ &= \frac{P(A)}{P(\eta(S_{r-1}, S_{r-1} + a) = n, Y_i > t)} = \frac{n!}{a^n} \delta_1 \delta_2 \dots \delta_n. \end{aligned}$$

从而顺序统计量 $\eta_{(1)}, \eta_{(2)}, \dots, \eta_{(n)}$ 关于 $\{\eta(S_{r-1}, S_{r-1} + a) = n, Y_i > t\}$ 的条件概率密度为

$$f(s_1, s_2, \dots, s_n) = \frac{n!}{a^n}, \quad 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n < a.$$

而函数 $\frac{n!}{a^n}$ 恰好是 n 个 $[0, a]$ 上的均匀分布的独立随机变量的顺序统计量的联合概率密度函数. 定理证毕. $\square$

直观地, 在 $\{\eta(S_{r-1}, S_{r-1} + a) = n, Y_i > t\}$ 的条件下, n 个子节点的相对出生年龄 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 视为不排顺序的随机变量时, 它们是相互独立且服从 $[0, a]$ 上的均匀分布.

推论 4 设 i 是 $\{G_t(\alpha; \beta) : t \geq 0\}$ 中的任一节点, $N(a)$ 表示节点 i 在年龄 a 时的拟出度, $\forall t \geq a$, 在已知 $\{N(a) = n, Y_i > t\}$ 的条件下, n 个子节点出生时, 其母节点 i 的年龄分别是 ξ_j , $1 \leq j \leq n$, 则它们的顺序统计量 $\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \dots, \xi_{(n)}$ 的条件联合密度函数为

$$\tilde{f}(s_1, s_2, \dots, s_n) = \frac{n!}{a^n}, \quad 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n < a.$$

定理 8 设 $b \geq a \geq 0$, i 是 $\{G_t(\alpha; \beta_r, 1 \leq r \leq M) : t \geq 0\}$ 中的任一节点, 节点 i 在年龄段 $[0, a)$ 内生产的子节点在其年龄 b 时刻死光的事件记为 A , 则 $\exists m, 1 \leq m \leq M$, 使得当 $a \in [S_{m-1}, S_m)$, A 关于 $Y_i > b$ 的条件概率为

$$P(A \mid Y_i > b) = \exp\{-\lambda_m e^{-\alpha b} [e^{\alpha(a-S_{m-1})} - 1]\} \exp\left\{-\sum_{r=1}^{m-1} \lambda_r e^{-\alpha b} [e^{\alpha(S_r-S_{r-1})} - 1]\right\}.$$

证明 设 $A_r, 1 \leq r \leq m-1$ 表示节点 i 在 $[S_{r-1}, S_r)$ 年龄段内生产的子节点在其年龄 b 时刻死光的事件, A_m 表示节点 i 在 $[S_{m-1}, a)$ 年龄段内生产的子节点在其年龄 b 时刻死光的事件. 由模型的独立性假设知, $A_1, A_2, \dots, A_m$ 关于 $Y_i > b$ 条件独立的. 于是有

$$\begin{aligned} P(A | Y_i > b) &= P\left(\bigcap_{j=1}^m A_j | Y_i > b\right) = \prod_{j=1}^m P(A_j | Y_i > b) \\ &= \prod_{r=1}^m \exp\{-\lambda_r e^{-\alpha b} [e^{\alpha(S_r - S_{r-1})} - 1]\} \exp\{-\lambda_m e^{-\alpha b} [e^{\alpha(a - S_{m-1})} - 1]\} \\ &= \exp\{-\lambda_m e^{-\alpha b} [e^{\alpha(a - S_{m-1})} - 1]\} \exp\left\{-\sum_{r=1}^{m-1} \lambda_r e^{-\alpha b} [e^{\alpha(S_r - S_{r-1})} - 1]\right\}. \end{aligned}$$

定理证毕. $\square$

推论 5 设 i 是 $\{G_t(\alpha; \beta) : t \geq 0\}$ 中的任一节点且 $b \geq a \geq 0$, i 在其年龄段 $[0, a)$ 内出生的子节点在其年龄 b 时刻死光的事件记为 A , 则 A 关于 $Y_i > b$ 的条件概率为

$$P(A | Y_i > b) = \exp\{-\lambda e^{-\alpha b} [e^{\alpha a} - 1]\}, \quad \lambda = \frac{\beta}{\alpha}.$$

引理 10 设 i 是 $\{G_t(\alpha; \beta_r, 1 \leq r \leq M) : t \geq 0\}$ 中的任一节点, 设 $a > 0, b \geq S_{r-1} + a, a \leq S_r - S_{r-1}, 1 \leq r \leq M$, B 表示随机事件: 节点 i 在其年龄段 $[S_{r-1}, S_{r-1} + a)$ 内出生的子节点在其年龄 b 时仍都是活着. 则在 $Y_i > b$ 的条件下, B 的条件概率为

$$P(B | Y_i > b) = \exp\{-\chi(r, \alpha, b, a)\},$$

其中 $\chi(r, \alpha, b, a) = \lambda_r e^{-\alpha b} (e^{\alpha b} - e^{\alpha a} + 1)$, $\lambda_r = \frac{\beta_r}{\alpha}, 1 \leq r \leq M$.

证明 设 $\eta(S_{r-1}, S_{r-1} + a)$ 表示节点 i 在其年龄段 $[S_{r-1}, S_{r-1} + a)$ 内生产的子节点数. 那么由全概率公式、定理 2 和 7 得

$$\begin{aligned} P(B | Y_i > b) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(B, \eta(S_{r-1}, S_{r-1} + a) = k | Y_i > b) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(B | \eta(S_{r-1}, S_{r-1} + a) = k, Y_i > b) P(\eta(S_{r-1}, S_{r-1} + a) = k | Y_i > b) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^a \frac{e^{-\alpha(b-s)}}{a} ds \right)^k \frac{(\beta_r a)^k}{k!} e^{-\beta_r a} \\ &= \exp\{-\lambda_r e^{-\alpha b} (e^{\alpha b} - e^{\alpha a} + 1)\} \\ &= e^{-\chi(r, \alpha, b, a)}, \end{aligned}$$

其中 $\chi(r, \alpha, b, a) = \lambda_r e^{-\alpha b} (e^{\alpha b} - e^{\alpha a} + 1)$. 引理证毕. $\square$

定理 9 设 $b \geq a \geq 0$, i 是 $\{G_t(\alpha; \beta_r, 1 \leq r \leq M) : t \geq 0\}$ 中的任一节点, 节点 i 在年龄段 $[0, a)$ 内生产的子节点在其年龄 b 时刻活着的事件记为 B , 则 $\exists m, 1 \leq m \leq M$, 使得当 $a \in [S_{m-1}, S_m)$, B 关于 $Y_i > b$ 的条件概率为

$$P(B | Y_i > b) = \exp\{-\chi(m, \alpha, b, a - S_{m-1})\} \exp\left\{-\sum_{r=1}^{m-1} \chi(r, \alpha, b, S_r - S_{r-1})\right\}.$$

证明 设 $B_r, 1 \leq r \leq m-1$ 表示节点 i 于其年龄段 $[S_{r-1}, S_r)$ 内出生的子节点在其年龄 b 时刻仍都活着, B_m 表示节点 i 于其年龄段 $[S_m, a)$ 内出生的子节点在其年龄 b 时刻仍都活着. 由模型的条件独立性假设知, $B_1, B_2, \dots, B_m$ 关于 $Y_i > b$ 条件独立. 于是有

$$\begin{aligned} P(B | Y_i > b) &= P\left(\bigcap_{r=1}^m B_r | Y_i > b\right) = \prod_{r=1}^m P(B_r | Y_i > b) \\ &= \exp\{-\chi(m, \alpha, b, a - S_{m-1})\} \exp\left\{-\sum_{r=1}^{m-1} \chi(r, \alpha, b, S_r - S_{r-1})\right\}. \end{aligned}$$

记号如引理 10 所示. 定理证毕. $\square$

推论 6 设 i 是 $\{G_t(\alpha; \beta) : t \geq 0\}$ 中的任一节点, 且 $b \geq a \geq 0$, 节点 i 在年龄段 $[0, a)$ 内生产的子节点在其年龄 b 时刻活着的事件记为 B , 则 B 关于 $Y_i > b$ 的条件概率为

$$P(B | Y_i > b) = \exp\{-\chi(\alpha, \beta, b, a)\},$$

其中 $\chi(\alpha, \beta, b, a) = \frac{\beta}{\alpha} e^{-\alpha b} (e^{\alpha b} - e^{\alpha a} + 1)$.

定理 10 设 i 是 $\{G_t(\alpha; \beta) : t \geq 0\}$ 中的任一节点, 节点 i 的出生时刻记为 t_b 且 $b \geq a \geq 0$, i 在其时间段 $[t_b, t_b + a)$ 内出生的子节点在其年龄 b 时刻死光的事件记为 A , 则

$$P(A) = \exp\{-\gamma(\alpha, \beta, a, b)\} (1 - e^{-\alpha b}) + e^{\psi(\alpha, \beta, b)} \int_1^{e^{\alpha a}} e^{-\psi(\alpha, \beta, b)t} \frac{1}{t^2} dt,$$

其中 $\gamma(\alpha, \beta, a, b) = \frac{\beta}{\alpha} e^{-\alpha(b-a)} - e^{-\alpha b}$, $\psi(\alpha, \beta, b) = \frac{\beta}{\alpha} e^{-\alpha b}$.

证明 设 $N(a)$ 是节点 i 在年龄段 $[0, a)$ 生产的子节点数, 则 $N(a) = N(a \wedge Y_i)$. 因此,

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(A, N(a) = k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A, N(a \wedge Y_i) = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} P(A, N(a \wedge s) = k) f_{Y_i}(s) ds \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} P(N(a \wedge s) = k) P(A | N(a \wedge s) = k) f_{Y_i}(s) ds \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{[\beta \cdot (a \wedge s)]^k}{k!} e^{-\beta \cdot (a \wedge s)} \left(\int_0^{a \wedge s} \frac{1 - e^{-\alpha(b-t)}}{a \wedge s} ds \right)^k f_{Y_i}(s) ds \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{[\beta \cdot (a \wedge s)]^k}{k!} e^{-\beta \cdot (a \wedge s)} \left(1 - \frac{e^{-\alpha(b-a \wedge s)} - e^{-\alpha b}}{\alpha(a \wedge s)} \right)^k f_{Y_i}(s) ds \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\frac{\beta}{\alpha}} (e^{-\alpha(b-a \wedge s)} - e^{-\alpha b}) \alpha e^{-\alpha s} ds \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\frac{\beta}{\alpha}} (e^{-\alpha(b-s)} - e^{-\alpha b}) \alpha e^{-\alpha s} ds + \int_0^{\infty} e^{-\frac{\beta}{\alpha}} (e^{-\alpha(b-a)} - e^{-\alpha b}) \alpha e^{-\alpha s} ds \\ &= \exp\{-\gamma(\alpha, \beta, a, b)\} (1 - e^{-\alpha b}) + e^{\psi(\alpha, \beta, b)} \int_1^{e^{\alpha a}} e^{-\psi(\alpha, \beta, b)t} \frac{1}{t^2} dt, \end{aligned}$$

其中 $\gamma(\alpha, \beta, a, b) = \frac{\beta}{\alpha} e^{-\alpha(b-a)} - e^{-\alpha b}$, $\psi(\alpha, \beta, b) = \frac{\beta}{\alpha} e^{-\alpha b}$. 定理证毕. $\square$

定理 11 设 i 是 $\{G_t(\alpha; \beta) : t \geq 0\}$ 中的任一节点, 且 $b \geq a \geq 0$, 节点 i 在年龄段 $[0, a)$ 内生产的子节点在其年龄 b 时刻活着的事件记为 B , 则

$$P(B) = \exp\{-\varphi(\alpha, \beta, a, b)\}(1 - e^{-\alpha b}) + e^{-\psi(\alpha, \beta, b)} \int_1^{e^{\alpha a}} e^{\psi(\alpha, \beta, b)t} \left(\frac{1}{t}\right)^{2+\frac{\beta}{\alpha}} dt,$$

其中 $\varphi(\alpha, \beta, a, b) = \frac{\beta}{\alpha}[\alpha a - e^{-\alpha(b-a)} + e^{-\alpha b}]$, $\psi(\alpha, \beta, b) = \frac{\beta}{\alpha}e^{-\alpha b}$.

证明 设 $N(a)$ 是节点 i 在即在年龄段 $[0, a)$ 生产的子节点数, 则 $N(a) = N(a \wedge Y_i)$. 因此,

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(B, N(a) = k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A, N(a \wedge Y_i) = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} P(B, N(a \wedge s) = k) f_{Y_i}(s) ds \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} P(N(a \wedge s) = k) P(B | N(a \wedge s) = k) f_{Y_i}(s) ds \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{[\beta \cdot (a \wedge s)]^k}{k!} e^{-\beta \cdot (a \wedge s)} \left(\int_0^{a \wedge s} \frac{e^{-\alpha(b-t)}}{a \wedge s} ds \right)^k f_{Y_i}(s) ds \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{[\beta \cdot (a \wedge s)]^k}{k!} e^{-\beta \cdot (a \wedge s)} \left(\frac{e^{-\alpha(b-a \wedge s)} - e^{-\alpha b}}{\alpha(a \wedge s)} \right)^k f_{Y_i}(s) ds \\ &= \exp\{-\varphi(\alpha, \beta, a, b)\}(1 - e^{-\alpha b}) + e^{-\psi(\alpha, \beta, b)} \int_1^{e^{\alpha a}} e^{\psi(\alpha, \beta, b)t} \left(\frac{1}{t}\right)^{2+\frac{\beta}{\alpha}} dt, \end{aligned}$$

其中 $\varphi(\alpha, \beta, a, b) = \frac{\beta}{\alpha}[\alpha a - e^{-\alpha(b-a)} + e^{-\alpha b}]$, $\psi(\alpha, \beta, b) = \frac{\beta}{\alpha}e^{-\alpha b}$. 定理证毕. $\square$

定义 10 设 i 是 $\{G_t(\alpha; \beta_r, 1 \leq r \leq M) : t \geq 0\}$ 中的任一节点, 若在时刻 $t \geq 0$, 实节点 i 的父节点和所有子节点都已死光, 则称实节点 i 在时刻 t 是一孤立节点.

定理 12 设 i 是 $\{G_t(\alpha; \beta_r, 1 \leq r \leq M) : t \geq 0\}$ 中的任一节点, 在其年龄为 $b \in [S_{m-1}, S_m)$ 的时刻, 它是孤立节点的概率为

$$p_I = (1 - e^{-\alpha b})e^{-\Lambda(\alpha, b, m)}, \quad 1 \leq m \leq M,$$

其中 $\Lambda(\alpha, b, m) = \sum_{r=1}^{m-1} \lambda(\alpha, b, r) + \lambda_m F(b - S_{m-1})$, $\lambda(\alpha, b, r) = \lambda_r F(S_r - S_{r-1})e^{-\alpha(b-S_r)}$, $\lambda_r = \frac{\beta_r}{\alpha}$, $F(t) = 1 - e^{-\alpha t}$.

证明 首先由定理 4 知, 在节点 i 的年龄为 b 的时刻, 当 $b \in [S_{m-1}, S_m)$ 时, 节点 i 生产的子节点死光的概率为 $e^{-\Lambda(\alpha, b, m)}$. 然后由指数分布的无记忆性知, 节点 i 的父节点自生产了子节点 i 后, 在时段 $(t_b, t_b + b]$ 内死亡的概率为 $1 - e^{-\alpha b}$. 最后由分枝树模型的各节点的独立性假设条件得

$$p_I = (1 - e^{-\alpha b})e^{-\Lambda(\alpha, b, m)}, \quad 1 \leq m \leq M.$$

定理证毕. $\square$

定理 13 设 i 是 $\{G_t(\alpha; \beta_r, 1 \leq r \leq M) : t \geq 0\}$ 中的任一节点, 则节点 i 在其年龄为 $b \in [S_{m-1}, S_m)$ 的未来年龄段 $[b, b+t], b+t \in [S_{k-1}, S_k)$, 一直是孤立节点的概率为

$$p_I(t) = (1 - e^{-\alpha b})e^{-\Lambda(\alpha, b, m)}e^{-B(m, k)}e^{-\alpha t}, \quad 1 \leq m \leq M,$$

其中

$$B(m, k) = \sum_{m+1}^{k-1} \beta_r(S_r - S_{r-1}) + \beta_m(S_m - a) + \beta_k(b - S_{k-1}).$$

证明 假设节点 i 寿命为 Y_i , D 表示节点 i 在未来年龄段 $[b, b+t]$ 一直是孤立节点的事件, D_1 表示节点 i 在其年龄为 b 的时刻是孤立节点的事件, D_2 表示节点 i 寿命大于 $b+t$ 的事件, D_3 表示节点 i 在年龄段 $[b, b+t]$ 不生产子节点的事件. 那么

$$P(D) = P(D_1 D_2 D_3) = P(D_1) P(D_2 | D_1) P(D_3 | D_1 D_2).$$

由定理 12 知, $P(D_1) = (1 - e^{-\alpha b})e^{-\Lambda(\alpha, b, m)}$. 由分枝树模型的独立性假设及指数分布的无记忆性得 $P(D_2 | D_1) = e^{-\alpha t}$. 由定理 2 和独立性假设条件得 $P(D_3 | D_1 D_2) = e^{-B(m, k)}$, 其中

$$B(m, k) = \sum_{m+1}^{k-1} \beta_r(S_r - S_{r-1}) + \beta_m(S_m - a) + \beta_k(b - S_{k-1}).$$

于是得

$$p_I(t) = P(D) = (1 - e^{-\alpha b})e^{-\Lambda(\alpha, b, m)}e^{-B(m, k)}e^{-\alpha t}, \quad 1 \leq m \leq M.$$

定理证毕. □

推论 7 设 i 是 $\{G_t(\alpha; \beta) : t \geq 0\}$ 中的任一节点, 则节点 i 年龄为 b 时刻是一孤立节点的概率为

$$p_I = (1 - e^{-\alpha b})e^{-\lambda F(b)},$$

其中 $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$, $F(b) = 1 - e^{-\alpha b}$.

推论 8 设 i 是 $\{G_t(\alpha; \beta) : t \geq 0\}$ 中的任一节点, 则节点 i 年龄为 b 的未来年龄段 $[b, b+t]$ 一直是一个孤立节点的概率为

$$p_I = (1 - e^{-\alpha b})e^{-\lambda F(b)}e^{-\beta t}e^{-\alpha t}.$$

致谢 感谢审稿人为本文提供的修改建议.

参考文献

- 1 李应求, 李旭, 刘全升. 随机环境中随机游动上的随机分枝系统. 中国科学 A 辑, 2007, 37: 341–347
- 2 李应求, 刘全升. 随机环境中依赖年龄的分枝过程. 中国科学 A 辑, 2008, 38: 799–818
- 3 胡杨利, 吴庆平, 李应求. 随机环境中依赖年龄的分枝过程的爆炸问题. 数学学报, 2010, 53: 1027–1034
- 4 Harris T E. The Theory of Branching Processes. Berlin: Springer-Verlag, 1963
- 5 Athreya K B, Ney P E. Branching Processes. Berlin: Springer-Verlag, 1972
- 6 Bellman R, Harris T. On age-dependent binary branching processes. Ann of Math (2), 1952, 55: 280–295
- 7 Smith W L, Wilkinson W E. On branching processes in random environments. Ann Math Statist, 1969, 40: 814–827
- 8 Athreya K B, Karlin S. On branching processes with random environments: (I), (II). Ann Math Statist, 1971, 42: 1499–1520; 1843–1858
- 9 胡迪鹤. 随机环境中的马尔可夫过程. 北京: 高等教育出版社, 2011
- 10 王汉兴. 随机环境中多物种分枝紧邻游动. 科学通报, 1995, 40: 586–589
- 11 Wang H X, Dai Y L. Population-size-dependent branching processes in Markovian random environments. Chinese Sci Bull, 1998, 43: 635–638
- 12 Wang H X. Extinction of P-S-D branching processes in random environments. Appl Prob, 1999, 36: 146–154
- 13 Wang H X, Fang D F. Asymptotic behaviour for P-S-D branching processes in Markovian random environments. Appl Prob, 1999, 36: 611–619

- 14 Wang H X, Zhao F, Lu J Y. A note on asymptotic behavior of Galton-Watson branching processes in random environments. J Shanghai Univ, 2006, 10: 95–99
- 15 Erdős P, Rényi A. On the evolution of random graphs. Publ Math Inst Hung Acad Sci. 1960, 5: 17–61
- 16 Capobianco M, Frank O. Graph evolution by stochastic additions of points and times. Discrete Math, 1983, 46: 133–143
- 17 Neveu J. Arbres et processus de Galton-Watson. Ann Inst H Poincaré Probab Statist, 1986, 22: 199–207
- 18 Lyons R, Peres Y. Probability on Trees and Networks. Cambridge: Cambridge University Press, 2008
- 19 Le Gall J F. Random trees and applications. Probab Surv, 2005, 2: 245–311
- 20 Kallenberg O. Foundations of Modern Probability. New York: Springer, 1997

Birth-death branching tree with age-dependent birth-rate

WANG HanXing, FU YunBin, YAN YunZhi, LU GuiLin, HU Xi & YU Na

Abstract Based on the biological reproduction mechanism, the process of biological reproduction is described as an evolution of random directed graph–birth-death branching tree with age-dependent birth rate. The distributions of out-degree, virtual out-degree and quasi-out-degree of a node at any age are studied. It is proved that the quasi out-degree process is a Poisson process to be terminated at a random time. The distributions of the first-production-age and the relative-birth-age of a node are studied. The probability of a node being isolated is obtained.

Keywords random graph, birth-death processes, branching tree

MSC(2010) 60G05, 68R10

doi: 10.1360/012012-477