



小曲率平面弯曲弹复方程

赵军*, 殷璟, 马瑞, 马丽霞

燕山大学机械工程学院, 秦皇岛 066004

* E-mail: zhaojun@ysu.edu.cn

收稿日期: 2010-11-08; 接受日期: 2011-03-29

国家自然科学基金(批准号: 50805126)和河北省自然科学基金(批准号: E2009000389)资助项目

摘要 从具有初始曲率的小曲率平面弯曲的应变分析入手, 借助经典弹塑性理论的卸载规律和应变的可叠加性对平面弯曲弹复问题进行了系统的理论研究, 理论推导过程建立在广泛适用的基本假设基础之上, 所得结果可统一为平面弯曲几何约束方程和弹复方程, 并能成功地蜕化为直梁平面弯曲和纯弯曲的情况. 扩径矫圆工艺属于平面弯曲中的先弯后拉过程, 应用平面弯曲弹复方程对扩径矫圆工艺进行解析分析并与实验相比较, 结果十分吻合. 该理论分析结果具有很高的预测精度, 完全满足工程应用的需要.

关键词

平面弯曲
几何约束方程
弹复方程
扩径矫圆

在文献[1]中, 平面弯曲的定义是: 当作用在梁上的所有外力都在纵向对称平面内时, 梁的轴线变形后也将是位于这个对称平面内的曲线, 这种弯曲称为平面弯曲. 事实上, 对于非对称截面梁, 当施加合适的约束时, 也能使其弯曲变形位于过形心的纵向平面内, 故也应称为平面弯曲. 平面弯曲是弯曲问题中最基本、最常见的情况. 在工程实际中有许多弯曲成形问题都属于平面弯曲, 其中不仅包括直梁的平面弯曲, 还包括曲梁的平面弯曲; 不仅包括对称截面梁的平面弯曲, 还包括非对称截面梁的平面弯曲. 按受力情况, 平面弯曲包含纯弯曲、轴向拉力下的弯曲和轴向压力下的弯曲. 在实际情况中, 真正的纯弯曲问题并不多见, 一般都是拉力下的弯曲或压力下的弯曲. 例如: 铝合金型材拉弯成形工艺、大型直缝焊管 JCOE 成形工艺和 UOE 成形工艺、大型管件扩径矫圆工艺、大型管件径向加载管端矫圆工艺等等, 均属于轴向拉力下的弯曲或轴向压力下的弯曲问题.

随着科学技术和工艺的飞速发展以及产品制造业竞争的日趋激烈, 对弯曲成形弹复的准确预测和

精确控制成为亟需解决的关键问题. 在过去的几十年间, 世界各国对平面弯曲弹复问题, 尤其是型材拉弯成形工艺方面做了大量的研究工作^[2~4]. El-Megharbel 等人^[5]估算了 7075 铝板的拉弯回弹量和截面内残余应力的分布. El-Domiaty 等人^[6, 7]对 U 形截面梁的拉弯进行了分析, 研究梁的材料性能和截面几何形状对成形载荷和弯曲回弹的影响. Elsharkawy 等人^[8]建立了 T 形型材拉弯的数学模型. 张秉璋^[9]采用网格试验法研究分析了飞机框类型材在横压纵拉弯曲时的变形过程和变形特点. 官英平^[10, 11]分析了板料在拉力下弯曲的应力状态, 提出了用能量法计算回弹角的方法. 杜颂等人^[12, 13]按塑性变形体积不变条件, 利用增量理论, 由差分方程分别计算了宽板和窄板拉弯时的应力分布, 并分析了加载历史对其影响规律. 钱志平等人^[14]对导轨型材拉弯回弹进行了研究, 研究中将卸载后的角度回弹分为两部分, 即弯矩卸载产生的回弹和拉力卸载产生的回弹, 推导了汽车车门中导轨零件成形的回弹计算公式. 随着有限元分析软件的快速发展, 数值模拟方法被广泛应用于型

材拉弯及弹复规律的研究中. 金朝海等人^[15]和刁可山等人^[16]采用 Pamstamp2000 有限元软件对中空矩形截面铝型材拉弯成形过程进行了数值模拟和实验研究. 谢兰生等人^[17]采用 Marc 有限元软件对两种不同截面的铝型材分别在 6 种不同拉弯过程进行了数值模拟, 探讨成形工艺、弯曲半径与型材截面形状对拉弯回弹的影响. 文献分析表明, 迄今为止, 对于平面弯曲弹复问题尚未形成完善的理论分析体系和统一、公认的理论分析结果.

小曲率平面弯曲是指弯曲半径与坯料厚度之比大于 10 的情况, 该情况下由加载弯矩所产生的应变可近似为线性分布^[18]. 本文从分析曲梁的小曲率平面弯曲变形特点出发, 根据经典弹塑性理论的卸载规律和应变可叠加性, 分别推导出曲梁不同加载和变形情况下的几何约束方程和弹复方程, 并在定义的符号系统下, 给出了平面弯曲几何约束方程和平面弯曲弹复方程的统一表达式. 将直梁和曲梁各种平面弯曲情况下弹复前后的几何关系用统一的形式表示, 具有重要的理论意义和实际应用价值. 应用平面弯曲弹复方程对扩径矫圆工艺过程进行解析分析, 实验结果显示理论分析结果正确且精度较高, 为工程应用奠定了理论基础.

1 概念定义和基本假设

本文的研究对象为梁式板、管材、棒材以及各种异形截面型材的平面弯曲弹复问题. 为表达准确、方便, 给出如下概念定义: 将在弯曲平面内, 被弯曲对象的长度尺寸远大于其截面高度尺寸的梁式板、管材、棒材、型材等统称为梁; 将能够完整反映梁的截面几何信息, 沿梁的截面形心线所截取的长度尺寸无穷小的一段梁称为微梁段, 如图 1 所示; 截面形心曲线在一个空间平面内的曲梁称为平面曲梁, 本文研究的对象是小曲率平面曲梁^[19], 即初始弯曲半径与坯料厚度之比大于 5 的情况; 施加于平面曲梁上的所有外载荷的综合作用仅导致该梁产生在初始截面形心曲线所在空间平面内的弯曲变形称为曲梁平面弯曲; 而直梁平面弯曲是指施加于直梁上的所有外载荷的综合作用导致该梁变形后截面形心曲线在一个空间平面内的弯曲; 直梁平面弯曲与曲梁平面弯曲统称为平面弯曲; 在平面弯曲问题中, 截面形心曲线所在的空间平面称为弯曲平面.

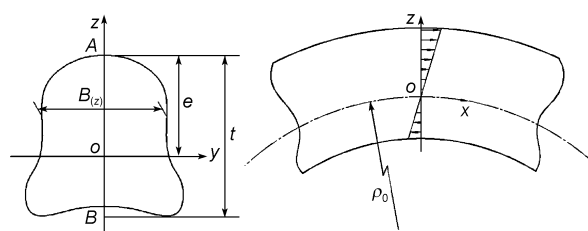


图 1 材料截面形状与初始曲率半径 ρ_0

为表述清晰、方便起见, 推导以对称截面梁为例. 图 1 为某任意对称截面微梁段截面几何形状与初始曲率半径示意图. 以微梁段截面几何形心 O 点为坐标原点, 以微梁段截面和弯曲平面为两个坐标平面, 建立 $oxyz$ 直角坐标系; 截面最外、最内层纤维与 z 轴的交点分别为 A 点和 B 点, 截面高度为 t , A 点距 y 轴的距离为 e ; $B(z)$ 为截面各处的宽度, 为坐标 z 的函数; x 轴与微梁段截面形心线相重合, ρ_0 为截面几何中心层的初始曲率半径.

本文采用以下基本假设.

- 1) 平截面假设: 梁的任意截面弯曲后仍保持为平面, 且截面不发生畸变, 即平面弯曲时应变中性层的移动是由轴向力引起的, 且变形前后截面几何中心层不移动;
- 2) 单向应力状态假设: 变形过程中, 梁的任意质点上的应力—应变状态近似为单向拉伸或单向压缩, 且忽略截面尺寸的变化;
- 3) 常规弹塑性材料模型假设: 被弯曲的梁是连续均质的弹塑性体, 且弹性变形为线弹性, 符合 Hooke 定律, 塑性变形满足稳定材料条件和经典弹塑性理论的卸载规律.

由于研究对象是小曲率平面曲梁, 为方便研究曲梁平面弯曲弹复问题, 本文对微梁段的初始曲率 $1/\rho_0$ 用初始当量应变 ε_0 来予以考虑, 且 ε_0 满足以下关系:

$$\varepsilon_0 = \frac{z}{\rho_0}, \quad e - t \leq z \leq e. \quad (1)$$

进而引入微梁段当量应变 ε_{eq} 的概念, 即考虑初始挠曲在内的微梁段线素长度的相对变化量为当量应变 ε_{eq} , 其值为截面真实应变 ε_r 与初始当量应变 ε_0 之代数和, 即

$$\varepsilon_{eq} = \varepsilon_r + \varepsilon_0. \quad (2)$$

平面弯曲的分类如图 2 所示. 直梁是曲梁的一个特例, 而拉弯与压弯完全类似, 因此本文将对曲梁平

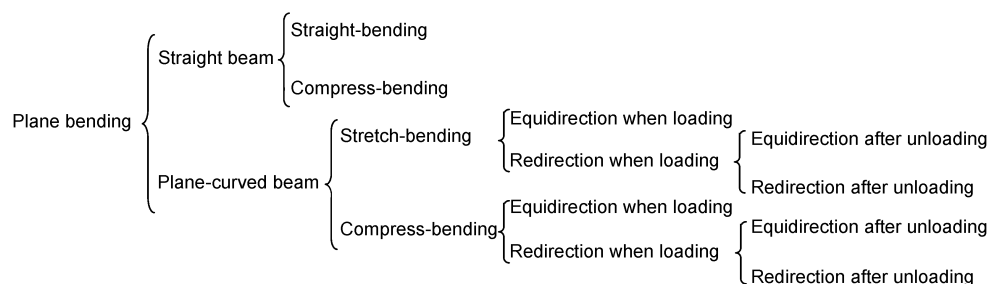


图2 平面弯曲的分类

面拉弯弹复问题进行详细分析, 以此为例推导出平面弯曲几何约束方程和弹复方程。

2 曲梁平面拉弯弹复分析

2.1 同向拉弯弹复分析

2.1.1 加载后应变分析

对微梁段施加轴向拉力 T 和与初始挠曲方向同向的弯矩 M , 使之产生弹塑性弯曲应变 ε , 其当量应变分布如图3所示。设截面几何中心层曲率半径为 ρ , 拉弯当量应变中性层曲率半径为 ρ_ε , 拉弯当量应变中性层可能处于型材截面以外。沿拉弯当量应变中性层设定 $x_1 o_1 z_1$ 坐标系, 根据基本假设1), 有

$$\frac{z_1}{\rho_\varepsilon} = \varepsilon + \varepsilon_0,$$

因为
则

$$z_1 = z + \rho - \rho_\varepsilon,$$

$$\varepsilon = z \left(\frac{1}{\rho_\varepsilon} - \frac{1}{\rho_0} \right) + \frac{\rho - \rho_\varepsilon}{\rho_\varepsilon}, \quad e - t \leq z \leq e. \quad (3)$$

2.1.2 卸载弹复后残余应变分析

卸载弹复后截面的残余当量应变仍呈线性分布,

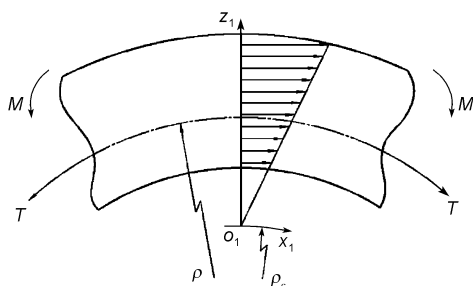


图3 加载后当量应变

设残余的塑性应变为 ε_p , 弹复后截面几何中心层曲率半径为 ρ_p , 当量应变中性层曲率半径为 ρ_{ep} , 如图4所示。沿残余当量应变中性层设定 $x_2 o_2 z_2$ 坐标系, 根据基本假设1), 有

$$\frac{z_2}{\rho_{ep}} = \varepsilon_p + \varepsilon_0,$$

因为

$$z_2 = z + \rho_p - \rho_{ep},$$

则

$$\varepsilon_p = z \left(\frac{1}{\rho_{ep}} - \frac{1}{\rho_0} \right) + \frac{\rho_p - \rho_{ep}}{\rho_{ep}}, \quad e - t \leq z \leq e. \quad (4)$$

2.1.3 反向加载弹性变形应变分析

将如图1所示初始微梁段视为完全弹性体, 并对其施加与拉力 T 和弯矩 M 大小相等、方向相反的力 T_e 和弯矩 M_e , 使之产生弹性应变 ε_e 。设此时截面几何中心层曲率半径为 ρ_e , 弹性压弯当量应变中性层曲率半径为 ρ_{ee} , 如图5所示。

当反向加载弹性变形使微梁段的挠曲方向与初始挠曲方向相同时, 如图5(a)所示。沿反向加载弹性当量应变中性层设定 $x_3 o_3 z_3$ 坐标系, 根据基本假设1), 有

$$\frac{z_3}{\rho_{ee}} = \varepsilon_e + \varepsilon_0,$$

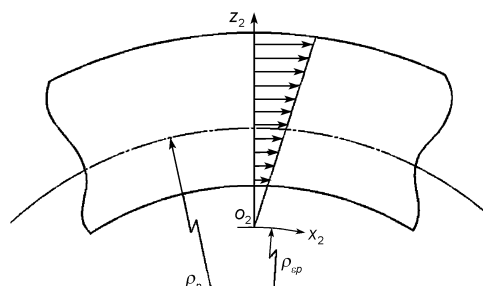


图4 卸载后当量应变

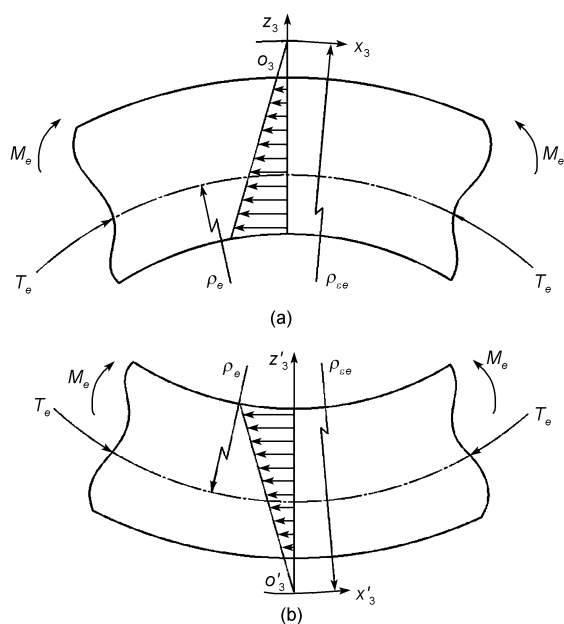


图5 反向加载弹性变形当量应变

(a) 微梁段的挠曲方向与初始挠曲方向相同; (b) 微梁段的挠曲方向与初始挠曲方向相反

$$\frac{z_3}{\rho_{ee}} = \varepsilon_e + \varepsilon_0,$$

因为

$$z_3 = z + \rho_e - \rho_{ee},$$

则

$$\varepsilon_e = z \left(\frac{1}{\rho_{ee}} - \frac{1}{\rho_0} \right) + \frac{\rho_e - \rho_{ee}}{\rho_{ee}}, \quad e-t \leq z \leq e. \quad (5)$$

当反向加载弹性变形使微梁段的挠曲方向与初始挠曲方向相反时, 如图 5(b)所示. 沿反向加载弹性当量应变中性层设定 $x'_3 z'_3$ 坐标系, 根据基本假设 1), 有

$$-\frac{z'_3}{\rho_{ee}} = \varepsilon'_e + \varepsilon_0,$$

因为

$$z'_3 = z + \rho_{ee} - \rho_e,$$

则

$$\varepsilon'_e = -z \left(\frac{1}{\rho_{ee}} + \frac{1}{\rho_0} \right) + \frac{\rho_e - \rho_{ee}}{\rho_{ee}}, \quad e-t \leq z \leq e. \quad (6)$$

2.1.4 几何约束方程和弹复方程

根据基本假设 3, 微梁段卸载弹复的弹性应变等价于对初始微梁段施加与其弹塑性加载时大小相等、方向相反的载荷, 并使其产生完全弹性变形时的应

变. 再根据小变形理论的应变可叠加性质可知, 微梁段卸载弹复后的残余应变可等效为弹塑性加载时产生的应变与反向加载弹性应变的叠加.

对于反向加载弹性变形使微梁段的挠曲方向与初始挠曲方向相同的情况, 有

$$\varepsilon_p = \varepsilon + \varepsilon_e. \quad (7)$$

将(3)~(5)式代入(7)式化简, 得

$$z \left(\frac{1}{\rho_{ep}} - \frac{1}{\rho_e} - \frac{1}{\rho_{ee}} + \frac{1}{\rho_0} \right) = \frac{\rho}{\rho_e} + \frac{\rho_e}{\rho_{ee}} - \frac{\rho_p}{\rho_{ep}} - 1. \quad (8)$$

上式在定义域内恒成立的充分必要条件是

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_{ep}} - \frac{1}{\rho_e} - \frac{1}{\rho_{ee}} + \frac{1}{\rho_0} = 0, \\ \frac{\rho}{\rho_e} + \frac{\rho_e}{\rho_{ee}} - \frac{\rho_p}{\rho_{ep}} = 1. \end{cases} \quad (9)$$

设微梁段材料的弹性模量为 E , 则根据基本假设 2) 和 3), 初始微梁段反向加载弹性变形产生的截面应力 σ_e 的分布可由(10)式表示

$$\sigma_e = E\varepsilon_e = zE \left(\frac{1}{\rho_{ee}} - \frac{1}{\rho_0} \right) + E \left(\frac{\rho_e}{\rho_{ee}} - 1 \right), \quad e-t \leq z \leq e. \quad (10)$$

截面应力对截面面积的积分为截面受力 T_e , 截面应力以几何中心层取矩对截面面积的积分为截面弯矩 M_e . 设 A 为微梁段截面的面积, I_y 为截面惯性矩, 应用平面图形的几何性质和微梁段截面平衡条件由(10)式可求得

$$\begin{cases} T_e = \int_A \sigma_e dA = EA \left(\frac{\rho_e}{\rho_{ee}} - 1 \right), \\ M_e = \int_A \sigma_e \cdot z dA = EI_y \left(\frac{1}{\rho_{ee}} - \frac{1}{\rho_0} \right). \end{cases} \quad (11)$$

微梁段的卸载弹复平衡方程可表达为

$$\begin{cases} T + T_e = 0, \\ M + M_e = 0. \end{cases} \quad (12)$$

由(9), (11), (12)式联合求解, 得

$$\rho_p = \frac{\rho - \frac{T}{EA} \rho_e}{1 - \frac{M}{EI_y} \rho_e}. \quad (13)$$

对于反向加载弹性变形使微梁段的挠曲方向与

初始挠曲方向相反的情况, 有

$$\varepsilon_p = \varepsilon + \varepsilon'_e, \quad (14)$$

将(3), (4), (6)式代入(14)式化简, 得

$$z \left(\frac{1}{\rho_{\varepsilon p}} - \frac{1}{\rho_{\varepsilon}} + \frac{1}{\rho_{\varepsilon e}} + \frac{1}{\rho_0} \right) = \frac{\rho}{\rho_{\varepsilon}} + \frac{\rho_e}{\rho_{\varepsilon e}} - \frac{\rho_p}{\rho_{\varepsilon p}} - 1. \quad (15)$$

上式在定义域内恒成立的充分必要条件是

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_{\varepsilon p}} - \frac{1}{\rho_{\varepsilon}} + \frac{1}{\rho_{\varepsilon e}} + \frac{1}{\rho_0} = 0, \\ \frac{\rho}{\rho_{\varepsilon}} + \frac{\rho_e}{\rho_{\varepsilon e}} - \frac{\rho_p}{\rho_{\varepsilon p}} = 1. \end{cases} \quad (16)$$

同理可求得

$$\begin{cases} T'_e = \int_A \sigma_e dA = EA \left(\frac{\rho_e}{\rho_{\varepsilon e}} - 1 \right) = -T, \\ M'_e = \int_A \sigma_e z dA = -EI_y \left(\frac{1}{\rho_{\varepsilon e}} + \frac{1}{\rho_0} \right) = -M. \end{cases} \quad (17)$$

由(16)和(17)式联合求解, 得

$$\rho_p = \frac{\rho - \frac{T}{EA} \rho_{\varepsilon}}{1 - \frac{M}{EI_y} \rho_{\varepsilon}}. \quad (18)$$

(9)和(16)式可统一为

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_{\varepsilon p}} - \frac{1}{\rho_{\varepsilon}} \pm \frac{1}{\rho_{\varepsilon e}} + \frac{1}{\rho_0} = 0, \\ \frac{\rho}{\rho_{\varepsilon}} + \frac{\rho_e}{\rho_{\varepsilon e}} - \frac{\rho_p}{\rho_{\varepsilon p}} = 1. \end{cases} \quad (19)$$

(19)式被称为同向拉弯几何约束方程, (13)和(18)式完全相同, 称为同向拉弯弹复方程.

2.2 反向拉弯几何约束方程和弹复方程

与同向拉弯的分析推导过程相类似, 反向拉弯是对微梁段施加轴向拉力 T 和与初始挠曲方向相反

的弯矩 M , 但受初始曲率的影响, 反向拉弯会出现加载后的挠曲方向与初始挠曲方向相同、卸载后的挠曲方向与初始挠曲方向相反、加载后的挠曲方向与初始挠曲方向相反而卸载后的挠曲方向与初始挠曲方向相同 3 种情况. 此处推导过程不多赘述, 只给出以上 3 种情况的推导结果.

反向拉弯几何约束方程可统一为

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_{\varepsilon p}} \mp \frac{1}{\rho_{\varepsilon}} \mp \frac{1}{\rho_{\varepsilon e}} \pm \frac{1}{\rho_0} = 0, \\ \frac{\rho}{\rho_{\varepsilon}} + \frac{\rho_e}{\rho_{\varepsilon e}} - \frac{\rho_p}{\rho_{\varepsilon p}} = 1, \end{cases} \quad (20)$$

反向拉弯弹复方程可统一为

$$\pm \rho_p = \frac{\rho - \frac{T}{EA} \rho_{\varepsilon}}{1 \mp \frac{M}{EI_y} \rho_{\varepsilon}}. \quad (21)$$

其中不同情况时, 可能产生的符号变化如表 1 所示.

3 平面弯曲几何约束方程和弹复方程的统一表述及其推论

3.1 符号系统

前面的推导都是基于应变和微梁段平面弯曲弹复前后的几何关系而建立的, 因此几何约束方程和弹复方程都是曲率半径的表达式. 如果定义一个符号系统, 将各种情况下的几何约束方程和弹复方程改写为关于曲率的表达式, 则可将其表达形式进一步统一、简化, 使其应用更加方便, 更易明确体现出平面弯曲弹复方程的物理意义.

定义竖直向上方向为 z 坐标轴正向, 反之为负. 定义平面弯曲弹塑性加载时的弯矩用 M 表示, M 为代数量, 其值由微梁段截面上的应力以几何中心层取矩对截面面积积分确定, 当弯矩 M 使直梁微梁段凸

表 1 几何约束方程和弹复方程中的符号

The three cases of rediversional stretch-bending	$\frac{1}{\rho_{\varepsilon}}$	$\frac{1}{\rho_{\varepsilon e}}$	$\frac{1}{\rho_0}$	ρ_p	M
The first case	-	-	+	+	-
The second case	-	+	-	+	+
The third case	+	-	+	-	+

向 z 坐标轴正向时规定为正, 反之为负. 定义平面弯曲加载时的轴向力用 T 表示, T 为代数量, 其值由微梁段截面上的应力对截面面积的积分确定. 曲率通常用 K 来表示, 且曲率的绝对值等于曲率半径的倒数, 规定曲率与 M 同向时为正, 反之为负.

3.2 统一表述

根据以上符号定义, 平面弯曲几何约束方程可统一表示为(22)式, 平面弯曲弹复方程可统一表示为(23)式.

$$\begin{cases} K_{\varepsilon p} = K_{\varepsilon} + K_{\varepsilon e} - K_0, \\ \frac{K_{\varepsilon}}{K} + \frac{K_{\varepsilon e}}{K_e} - \frac{K_{\varepsilon p}}{K_p} = 1, \end{cases} \quad (22)$$

$$K_p = \frac{K_{\varepsilon} - \frac{M}{EI_y}}{\frac{K_{\varepsilon}}{K} - \frac{T}{EA}}. \quad (23)$$

平面弯曲几何约束方程的第 2 式称为当量应变中性层与几何中心层曲率之比的关系方程, 可描述为: 微梁段加载弹塑性变形、反向加载弹性变形和残余塑性变形的当量应变中性层与几何中心层曲率之比的线性叠加等于 1. 该方程充分说明有轴向力作用的平面弯曲其应变中性层与几何中心层不重合的特点.

根据以上符号定义, 加载后的应变 ε 可表示为

$$\varepsilon = \begin{cases} z(K_{\varepsilon} - K_0) + \left(\frac{K_{\varepsilon}}{K} - 1\right), & \text{同向弯曲,} \\ -z(K_{\varepsilon} - K_0) + \left(\frac{K_{\varepsilon}}{K} - 1\right), & \text{反向弯曲.} \end{cases} \quad (24)$$

设应力 σ 是应变 ε 的函数, 即

$$\sigma = f(\varepsilon) = f(K_{\varepsilon}, z). \quad (25)$$

根据截面载荷的平衡条件有

$$T = \int_A \sigma dA, \quad (26)$$

$$M = \int_A \sigma \cdot z dA. \quad (27)$$

通常情况下 T 或 ε 已知或可根据几何中心层的变形求出, 则可由(26)或(24)式求出 K_{ε} . T 和 M 均为 K_{ε} 的函数, 以上方程联立即可求出卸载弹复后的几何中心层曲率 K_p . 在该求解过程中, (25)式与加载历史有关, 因此 K_p 的求解也反映了加载历史对平面弯曲弹复的影响, (23)式是平面弯曲弹复问题的通解.

事实上, 对于非对称截面梁, 当施加了合适的约束使其弯曲变形位于过形心的纵向平面内时, 以上推导过程和结论仍然适用. 因此, 平面弯曲弹复方程适用于满足平面弯曲基本假设的所有弯曲对象和弯曲情况.

3.3 关于当量应变中性层曲率变化量关系的推论

对平面弯曲几何约束方程, 即方程组(22)式中的第 1 式进行如下变换:

$$K_{\varepsilon p} - K_0 = K_{\varepsilon} - K_0 + K_{\varepsilon e} - K_0, \quad (28)$$

即

$$\Delta K_{\varepsilon p} = \Delta K_{\varepsilon} + \Delta K_{\varepsilon e}. \quad (29)$$

(29)式称为当量应变中性层曲率增量关系方程, 可描述为, 残余塑性当量应变中性层曲率的增量等于加载产生的当量应变中性层曲率的增量与反向弹性加载当量应变中性层曲率增量之和. 该方程充分说明有轴向力作用的平面弯曲几何中心层曲率不存在叠加关系, 但当量应变中性层曲率增量存在叠加关系.

3.4 向直梁平面弯曲的退化

当 $K_0 = \lim_{\rho_0 \rightarrow \infty} 1/\rho_0 = 0$ 时, 平面弯曲几何约束方程可表示为

$$\begin{cases} K_{\varepsilon p} = K_{\varepsilon} + K_{\varepsilon e}, \\ \frac{K_{\varepsilon}}{K} + \frac{K_{\varepsilon e}}{K_e} - \frac{K_{\varepsilon p}}{K_p} = 1. \end{cases} \quad (30)$$

(30)式称为直梁平面弯曲几何约束方程. 平面弯曲弹复方程的表达式中不含 K_0 , 故也包含了直梁平面弯曲的情况. 因此, 由曲梁的平面弯曲推导得出的平面弯曲几何约束方程和平面弯曲弹复方程是包含了直梁和曲梁平面弯曲情况的统一表达形式. 而直梁平面弯曲只是曲梁平面弯曲中的一个特殊情况, 其结果与直接以直梁作为几何模型的推导结果相同, 进一步佐证了本文推导结果的正确性.

3.5 向纯弯曲的退化

纯弯曲时, 当量应变中性层与几何中心层重合. 此时平面弯曲几何约束方程中的第 2 式恒成立, 说明纯弯曲时只需平面弯曲几何约束方程中的第 1 式就可表达其弯曲弹复前后的几何关系:

$$K_p = K + K_e - K_0. \quad (31)$$

此时平面弯曲弹复方程可表示为

$$K - K_p = \frac{M}{EI_y}. \tag{32}$$

(32)式与文献[20]的结果相同, 也从另一方面佐证了本文推导结果的正确性.

4 管线钢管扩径矫圆问题

4.1 扩径矫圆解析分析

在大型直缝埋弧焊管的成型工艺中, 扩径矫圆过程是重要工序之一. 随着大型管件在现代工业领

域中的广泛应用, 研究其工艺过程、精确预测并控制其工艺参数成为管件研究领域中的一个热点^[21, 22]. 本节利用前述推导的平面弯曲弹复方程对管件的扩径矫圆工艺过程进行理论分析, 获得管件扩径矫圆弹复前后几何特征参数与主要工艺参数间的解析关系, 并通过3组不同初始椭圆度管坯的扩径矫圆实验对理论解析进行验证, 为其进一步工业应用奠定理论基础.

管件的扩径矫圆过程如图6所示, 按时序可划分为3个阶段. 第一阶段为整圆阶段. 壁厚为 t 的初始管坯截面壁厚中心线近似为椭圆, 其长半轴为 a_0 , 短半轴为 b_0 , 任意一点的曲率半径为 ρ_0 . 扩径模具由若

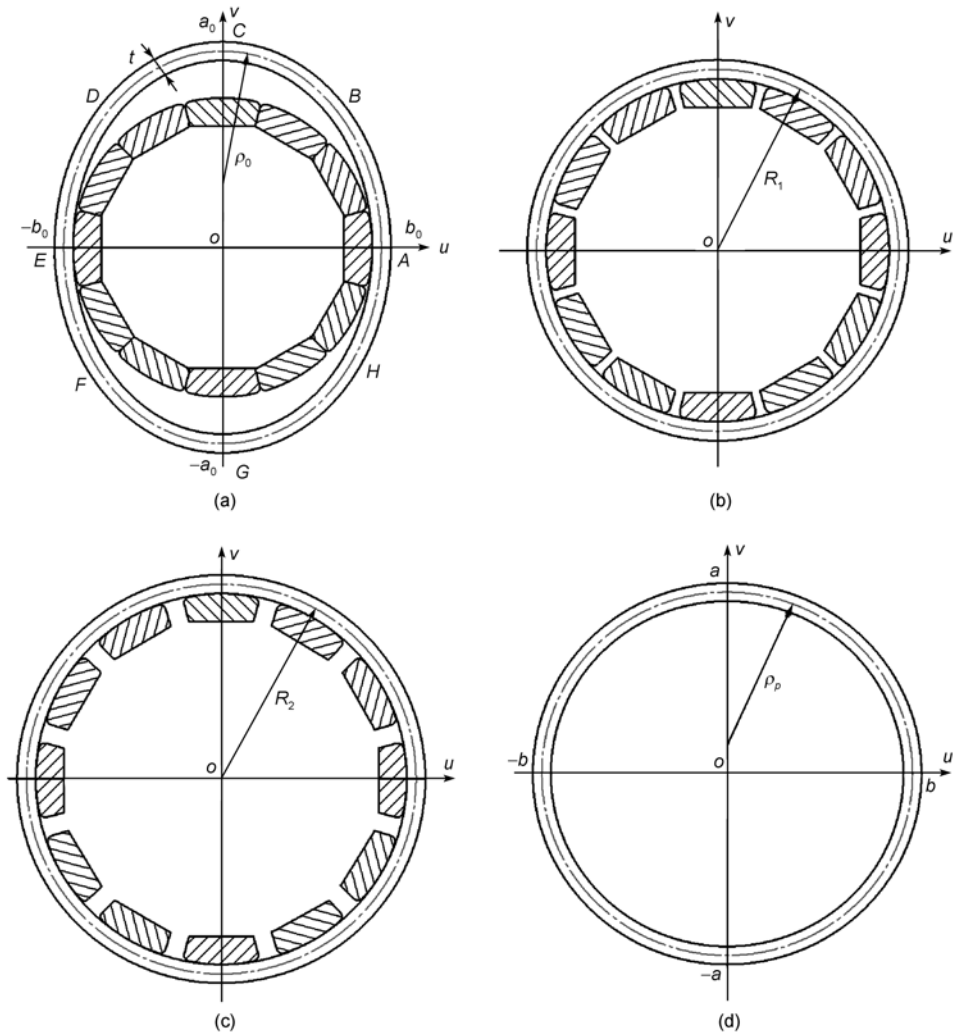


图6 扩径矫圆工艺过程
(a) 初始状态; (b) 整圆阶段; (c) 扩径阶段; (d) 弹复阶段

干瓣模组成, 初始时瓣模组成一个整圆. 扩径时扩径机传力系统使各瓣模沿其法向同时、同速运动. 在管坯与扩径瓣模接触之初, 瓣模轮廓曲线与管坯内壁为线接触. 随着瓣模的不断运动, 各个瓣模外表面与管坯内壁逐渐贴合. 由于贴模后的管坯截面具有一定刚度, 所以管坯截面形状为扩径瓣模的外接圆, 此时截面壁厚中心线的曲率半径为 R_1 . 此阶段周向力很小, 管坯以弹性弯曲变形为主, 截面壁厚中心线周长 L_1 近似不变, 可近似视为弹性纯弯曲过程. 第二阶段为扩径阶段. 管坯在瓣模的作用下, 直径扩大, 使截面周向产生塑性伸长变形, 管壁承受较大周向拉力, 以拉伸过程为主. 当扩径模具达到预设行程时, 管坯截面几何形状仍以圆来近似, 其截面壁厚中心线的曲率半径增大至 R_2 . 第三阶段为弹复阶段. 管坯经过保压后瓣模退回, 开始卸载, 卸载后由于管坯产生弹性回复, 弹复后截面壁厚中心线任意一点的曲率半径为 ρ_p . 如果认为扩径矫圆卸载后管坯截面壁厚中心线仍为椭圆, 则定义卸载后管坯截面壁厚中心线的长半轴为 a , 短半轴为 b .

扩径矫圆的整个过程属于平面弯曲中曲梁拉弯的情况. 如图 6 所示, 以椭圆中心建立 uov 直角坐标系, $\widehat{BH}$ 段和 $\widehat{DF}$ 段为同向拉弯中反向加载弹性变形使微梁段的挠曲方向与初始挠曲方向相同的情况; $\widehat{BD}$ 段和 $\widehat{FH}$ 段为反向拉弯后微梁段的挠曲方向与初始挠曲方向相同的情况. 两种情况的分界点为 $\rho_0=R_2$ 的点, 显然在扩径矫圆过程中该分界点一直在移动. 从前文的推导可以看出, 两种情况所对应的加载时应变表达式相同, 拉弯弹复方程的表达式也相同, 因此可以进行统一的讨论分析. 为简化分析过程, 认为管坯截面在整个扩径矫圆过程中始终关于 u 轴和 v 轴对称, 故仅以在 uov 坐标系下第一象限中的管坯横截面 $\widehat{ABC}$ 段作为研究对象.

大型管件的管径与壁厚之比远大于 10, 因此可将扩径矫圆问题视为矩形截面小曲率曲梁的平面弯曲问题. 综上所述, 将平面拉弯弹复方程应用于扩径矫圆分析时, 为便于分析, 引入如下基本假设:

- 1) 矫圆后管坯任意截面保持为平面, 截面不发生畸变, 且忽略其壁厚的变化;
- 2) 初始管坯截面壁厚中心线为椭圆, 其长半轴为 a_0 , 短半轴为 b_0 , 任意一点的曲率半径为 ρ_0 ;
- 3) 不考虑各向异性; 忽略包辛格效应, 即材料

具有拉压一致性; 满足经典弹塑性理论的卸载规律; 采用双线性硬化材料模型, 其中弹性模量为 E , 塑性切线模量为 D , 截距应力为 σ_0 , 弹塑性分界点处的应变为 ε_E , 即

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & \varepsilon \leq \varepsilon_E, \\ D\varepsilon + \sigma_0, & \varepsilon \geq \varepsilon_E; \end{cases} \quad (33)$$

4) 成形过程中, 管壁截面上任意一点的应力——应变状态近似为单向拉伸或压缩;

5) 整圆阶段的变形为弹性纯弯曲;

6) 忽略管坯与模具之间摩擦的影响.

当扩径至截面壁厚中心线的曲率半径为 R_2 , 即 $\rho=R_2$ 时, 截面壁厚中心线的应变可表示为

$$\varepsilon|_{z=0} = \frac{\rho - \rho_\varepsilon}{\rho_\varepsilon} = \frac{R_2 - \rho_\varepsilon}{\rho_\varepsilon} = \delta = \frac{R_2 - R_1}{R_1}, \quad (34)$$

故

$$\rho_\varepsilon = R_1, \quad (35)$$

其中, δ 为扩径率.

设 δ_1 为管坯壁厚方向由完全弹性变形阶段开始进入塑性变形阶段的扩径率分界点, 即当扩径率小于 δ_1 时, 管坯壁厚方向完全处于弹性变形, 而当扩径率大于 δ_1 时, 管坯壁厚方向开始进入塑性变形阶段; 设 δ_2 为管坯壁厚方向由弹塑性变形阶段开始进入完全塑性变形阶段的扩径率分界点, 即当扩径率小于 δ_2 时, 管坯壁厚方向处于弹塑性变形阶段, 而当扩径率大于 δ_2 时, 管坯壁厚方向完全处于塑性变形. 根据前文的推导结果和对扩径矫圆过程的描述, 可求出

$$\delta_1 = \varepsilon_E + \frac{t}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{\rho_{0a}} \right), \quad (36)$$

$$\delta_2 = \varepsilon_E - \frac{t}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{\rho_{0a}} \right). \quad (37)$$

当 $\delta < \delta_1$ 时, 卸载后管坯壁厚方向各点的应变产生完全弹性回复, 管坯截面形状回复到了加载前的状态. 该情况众所周知, 在此不多赘述.

当 $\delta_1 < \delta < \delta_2$ 时, 管坯壁厚方向未全进入塑性变形阶段, 应用平面弯曲弹复方程和扩径矫圆基本假设 2) 可推导出同向拉弯段, 即 $\widehat{AB}$ 段壁厚中心线上任意一点扩径矫圆卸载后曲率半径 ρ_{p1} 的表达式

$$\rho_{p1} = \frac{t^2 [R_2 E t - f_1(z_E)]}{E t^3 - 12 g_1(z_E)}, \quad (38)$$

其中,

$$f_1(z_E) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R_1}{\rho_0} \right) \left(z_E^2 - \frac{t^2}{4} \right) (E - D) + z_E (R_2 - R_1) (E - D) + \frac{t}{2} (R_2 - R_1) (E + D) + \sigma_0 R_1 \left(\frac{t}{2} - z_E \right), \quad (39)$$

$$g_1(z_E) = \frac{t^3}{24} \left(1 - \frac{R_1}{\rho_0} \right) (E + D) + \frac{z_E^3}{3} \left(1 - \frac{R_1}{\rho_0} \right) (E - D) + \frac{1}{2} (R_2 - R_1) \left(z_E^2 - \frac{t^2}{4} \right) (E - D) + \frac{\sigma_0 R_1}{2} \left(\frac{t^2}{4} - z_E^2 \right). \quad (40)$$

同理可得反向拉弯段, 即 $\widehat{BC}$ 段壁厚中心线上任意一点扩径矫圆卸载后曲率半径 ρ_{p2} 的表达式

$$\rho_{p2} = \frac{t^2 [R_2 E t - f_2(z_E)]}{E t^3 - 12 g_2(z_E)}, \quad (41)$$

其中,

$$f_2(z_E) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R_1}{\rho_0} \right) \left(\frac{t^2}{4} - z_E^2 \right) (E - D) - z_E (R_2 - R_1) (E - D) + \frac{t}{2} (R_2 - R_1) (E + D) + \sigma_0 R_1 \left(\frac{t}{2} + z_E \right), \quad (42)$$

$$g_2(z_E) = \frac{t^3}{24} \left(1 - \frac{R_1}{\rho_0} \right) (E + D) - \frac{z_E^3}{3} \left(1 - \frac{R_1}{\rho_0} \right) (E - D) - \frac{1}{2} (R_2 - R_1) \left(z_E^2 - \frac{t^2}{4} \right) (E - D) + \frac{\sigma_0 R_1}{2} \left(z_E^2 - \frac{t^2}{4} \right). \quad (43)$$

该情况下 $\rho_{pa} = \rho_{p2}|_{\rho_0=\rho_{0a}}$, $\rho_{pb} = \rho_{p1}|_{\rho_0=\rho_{0b}}$.

当 $\delta > \delta_2$ 时, 管坯壁厚方向全部进入塑性变形阶段, 同理可推导出管坯截面壁厚中心线上任意一点扩径矫圆卸载后曲率半径 ρ_p 的表达式:

$$\rho_p = \frac{1 - \frac{R_1}{R_2} \left[\frac{\sigma_0}{E} + \frac{D}{E} \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right) \right]}{1 - \frac{D}{E} \left(1 - \frac{R_1}{\rho_0} \right)} R_2$$

$$= \frac{(E - \sigma_0) + \delta(E - D)}{E - D \left(1 - \frac{R_1}{\rho_0} \right)} R_1. \quad (44)$$

该情况下 $\rho_{pa} = \rho_p|_{\rho_0=\rho_{0a}}$, $\rho_{pb} = \rho_p|_{\rho_0=\rho_{0b}}$.

认为扩径矫圆卸载后管坯截面仍为椭圆, 则只需求出两极点处卸载后的曲率半径 ρ_{pa} 和 ρ_{pb} , 即可根据下式求出卸载后截面壁厚中心线的长半轴 a 和短半轴 b 的值,

$$a = \sqrt[3]{\rho_{pa} \cdot \rho_{pb}^2}, \quad (45)$$

$$b = \sqrt[3]{\rho_{pa}^2 \cdot \rho_{pb}}. \quad (46)$$

从而根据下式求出扩径矫圆卸载后管坯的椭圆度 β , 该求解过程称之为椭圆法.

$$\beta = \frac{2(a - b)}{a + b}. \quad (47)$$

4.2 扩径矫圆验证实验

根据以上理论分析结果, 本文进行了3组不同初始椭圆度管坯的扩径矫圆验证实验, 其实验材料为20钢, 材料性能如图7所示. 从图7中可以看出当应变较大时, 指数硬化材料模型与实验数据较吻合; 当应变较小时, 双线性硬化材料模型与实验数据的吻合程度较高. 由于扩径矫圆过程使截面周向产生的应变不会太大, 一般为0.01左右, 为提高双线性拟合精度, 只取应变小于0.05的实验数据进行拟合.

初始管坯的几何参数如表2所示, 扩径矫圆的实验结果如图8所示. 从图8中可以看出实验数据点与理论曲线十分吻合, 说明扩径矫圆的理论解析模型

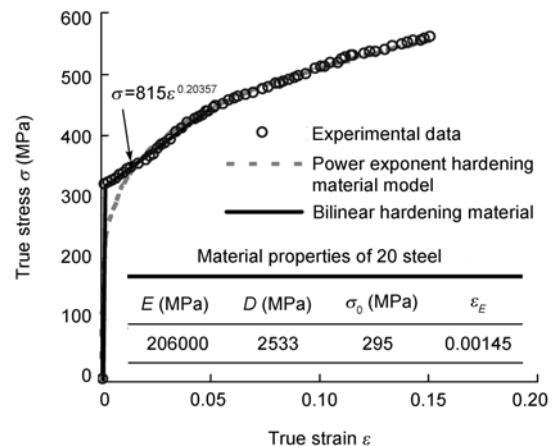


图7 实验管坯材料性能参数

表 2 初始管坯几何参数

Pipe No.	R_1 (mm)	a_0 (mm)	b_0 (mm)	β_0 (%)	t (mm)
1	47.49	47.95	47.03	1.94	2.98
2	47.54	48.05	47.04	2.14	2.97
3	47.50	48.16	46.85	2.77	2.99

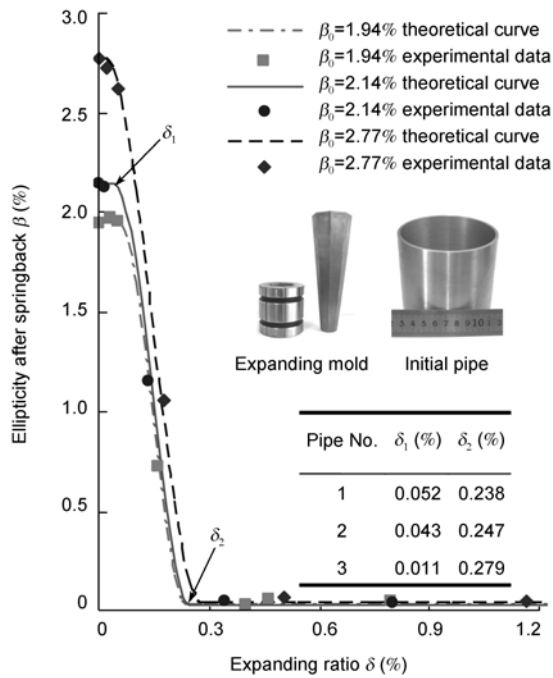


图 8 初始椭圆度和扩径率对卸载后管坯椭圆度的影响规律

的精度很高,可以满足工程应用的预测需要. 解析分析和实验结果揭示了扩径矫圆的工艺原理, 即: 拉弯至管壁截面上各质点均为伸长应变时, 弯曲弹复量极小, 且受初始椭圆度的影响也极小, 故可采用同一扩径率参数实现不同初始椭圆度管件的矫圆.

5 结论

综上所述, 本文在小曲率平面弯曲基本假设的

前提下, 建立有初始曲率微梁段拉弯、压弯的几何模型和力学模型, 提出了当量应变和当量应变中性层的概念, 以曲梁平面弯曲为例, 借助卸载规律和应变可叠加性推导出的平面弯曲几何约束方程和弹复方程, 丰富了经典弹塑性弯曲理论的内容, 并将其成功应用于扩径矫圆问题的求解. 本文得到的结论如下.

1) 平面弯曲几何约束方程描述了平面弯曲时几何中心层曲率和当量应变中性层曲率间的关系. 其中的第一式不仅体现了初始曲率对平面弯曲的影响, 还说明有轴向力作用的平面弯曲几何中心层曲率不存在叠加关系, 但当量应变中性层曲率存在叠加关系; 第二式体现了当量应变中性层与几何中心层曲率之比的关系, 充分说明轴向力作用的平面弯曲其当量应变中性层与几何中心层不重合的特点.

2) 平面弯曲弹复方程为平面弯曲卸载弹复后几何中心层曲率的表达式. 由该式可知, 平面弯曲卸载弹复后几何中心层的曲率除与加载后的几何中心层曲率和当量应变中性层曲率有关外, 还与材料性能、加载的轴向力和弯矩有关, 而轴向力和弯矩的确定与其加载历史和应变状态有关. 因此, 平面弯曲弹复方程适用于满足本文基本假设的所有平面弯曲情况, 是平面弯曲弹复问题的通解.

3) 直梁平面弯曲和纯弯曲是平面弯曲中的两个特殊情况, 平面弯曲几何约束方程和弹复方程向直梁平面弯曲问题的退化结果与直接以直微梁段为几何模型进行推导的结果相一致, 向纯弯曲问题的退化结果与经典纯弯曲理论相一致, 进一步证明了平面弯曲弹复方程的正确性.

4) 将平面弯曲弹复方程成功地应用于大型管件扩径矫圆工艺分析, 理论解析结果与实验吻合, 进一步验证了平面弯曲弹复方程的正确性, 同时揭示了扩径矫圆的工艺原理.

参考文献

1 白象忠. 材料力学. 北京: 中国建材工业出版社, 2003
2 宋黎, 杨坚, 黄天泽. 板料弯曲成形的回弹分析与工程控制综述. 锻压技术, 1996, (1): 18-22
3 朱东波, 孙琨, 李涤尘, 等. 板料成形回弹问题研究新进展. 塑性工程学报, 2000, 7(1): 11-17
4 谷瑞杰, 杨合, 詹梅, 等. 弯曲成形回弹研究进展. 机械科学与技术, 2005, 24(6): 653-658
5 El-Megharbel A, El-Domiati A A, Shaker M. Springback and residual stresses after stretch bending of workhardening sheet metal. J Mater

- Process Technol, 1990, 24(1): 191–200
- 6 El-Domiaty A A, Shabara M A N, Al-Ansary M D. Determination of stretch-bendability of sheet-metals. *Int J Mach Tools Manuf*, 1996, 36(5): 635–650
 - 7 El-Domiaty A A, Elsharkawy A A. Stretch-bending analysis of U-section beam. *Int J Mach Tools Manuf*, 1998, 38(1): 75–95
 - 8 Elsharkawy A A, El-Domiaty A A. Determination of stretch-bend-ability limits and springback for T-section beams. *J Mater Process Technol*, 2001, 110(3): 265–276
 - 9 张秉璋. 横压纵拉弯曲变形特点. *金属成形工艺*, 1993, 11(6): 276–278, 283
 - 10 官英平. 板材塑性弯曲回弹计算方法. *模具工业*, 1999, (5): 11–13
 - 11 官英平. 板料拉力下弯曲回弹分析. *模具技术*, 1999, (2): 64–68
 - 12 杜颂, Anatoly C. 窄版拉弯成形的数值分析与回弹计算. *北京航空航天大学学报*, 2004, 30(9): 863–867
 - 13 杜颂. 宽版拉弯的数值分析与回弹计算. *锻压技术*, 2004, (5): 19–22
 - 14 钱志平, 吕玫. 拉弯成形中导轨型材的回弹计算. *金属成形工艺*, 2001, 19(3): 19–21
 - 15 金朝海, 周贤宾, 刁可山, 等. 铝合金型材拉弯成形回弹的有限元模拟. *材料科学与工艺*, 2004, 12(5): 394–397
 - 16 刁可山, 周贤宾, 李晓星, 等. 矩形截面型材拉弯成形. *北京航空航天大学学报*, 2005, 31(2): 134–137
 - 17 谢兰生, 胡浩. 型材拉弯回弹有限元分析. *航空精密制造技术*, 2004, 40(5): 34–36
 - 18 李硕本. 冲压工艺理论与新技术. 北京: 机械工业出版社, 2002
 - 19 马世麟, 傅仁本. 材料力学(下册). 北京: 机械工业出版社, 1996
 - 20 肖景荣, 姜奎华. 冲压工艺学. 北京: 机械工业出版社, 2006
 - 21 郭宝峰, 金淼, 李群, 等. 筒形零件在机械扩径过程中的回弹预测方法. *塑性工程学报*, 2006, 13(1): 8–12
 - 22 肖曙红, 郑时雄. 大口径直缝焊管机械扩径成形机理研究. *锻压装备与制造技术*, 2004, (5): 81–84