$$\left\{\frac{dP}{dt}\right\}^T[B]-\left\{\frac{\partial T}{\partial q}\right\}^T[B]=\{Q\}^T[B]+\{\sigma\}^T[[A_1][A_2]][B],$$

由于

$$\{\sigma\}^T[[A_1][A_2]][B]=\{\sigma\}^T[[I][O]]=[\{\sigma\}^T\{O\}^T],$$

于是得到

$$\left\{\frac{dP}{dt}\right\}^T[B]-\left\{\frac{\partial T}{\partial q}\right\}^T[B]=\{Q\}^T[B]+[\{\sigma\}^T\{O\}^T],$$

式中 $\{O\}$ 为 $(n-s)\times 1$ 零矩阵，$\{\sigma\}^T=[\sigma_1\cdots\sigma_s]$，这就是非线性非完整系统的标准化的 Routh 方程，它包含了消去待定乘子的运动方程以及关于待乘子已解耦的方程。由于所给出的运动方程已消去了未知的待定乘子，因此能方便地用来求解运动；又由于给出的和约束反力有关的方程关于待定乘子是已解耦的，因此可以直接用来求解各个约束反力。由此可知，本文所给出的标准化的 Routh 方程，可以用来求解复杂的系统工程的运动规律与约束反力。

参 考 文 献

[1] 孙右烈，非线性非完整系统的运动方程及其广义能量积分，上海力学，9(1988)，3：23—28.

孙右烈

（上海工业大学力学系）

有限集合上函数的强等价类

假设 D、R 是有限集，记 $R^D=\{f;f:D\to R\}$。又假设 G、H 是分别作用在 D、R 上的置换群。L. Carlitz 定义 R^D 中的强等价关系如下：对于任意的 f、$g\in R^D$，称 f 关于 G、H 强等价于 g，如果存在 $\sigma\in G$ 和 $\tau\in H$ 使得 $f(\sigma d)=g(d)$ 和 $\tau f(d)=g(d)$ 对任一 $d\in D$ 成立（*Amer. Math. Soc.*, **75**(1953), 405—427）。S. R. Cavior 讨论了当 $G=H=S_n$（n 次对称群）的特殊情形（*Acta Arith.*, 1964, 10, 119—136）。我们得出了一般情形的公式，并给出了具有最大数目的强等价类的特征刻划。

对于 $f_i\in R^D$，记 $F_i=\{f\in R^D;\ f=f_i\sigma,\ \sigma\in G\}$，$H(f_i)=\{\tau\in H;\ \tau f_i=f_i\sigma,\ \sigma\in G\}$ 和 $H_0(f_i)=\{\tau'\in H;\tau' f_i=f_i\}$。

定理 1 用 $N(D,R,G,H)$ 记 R^D 中关于 G、H 的强等价类的个数，则

$$N(D,R,G,H)=\sum_{f\in R^D}\frac{1}{[H(f):H_0(f)]}.$$

定理 2 假设 $D=\{0,1,2,\cdots,n-1\}$，$R=\{0,1,2,\cdots,m-1\}$，S_k 为 k 次对称群，则

$$N(D,R,S_n,S_m)=\sum(m!n!)\Big/\left\{\prod_{j=1}^{k}(n_{i_j}!)^{m_{ij}}\cdot\prod_{j=1}^{k}(m_{ij}!)^2\cdot\left[m-\sum_{j=1}^{k}m_{ij}\right]!\right\}.$$

定理 3 假设 $D=\{0,1,2,\cdots,n-1\}$，$R=\{0,1,2,\cdots,m-1\}$，$R^D=\{f;\ f:D\to R\}$。又假设 G 是包含循环群 C_n 在内的置换群，G 作用在 D 上。C_m 是循环群作用在 R 上，则

$N(D,R,G,C_m)=m^n$ 的充分必要条件是：m、n 的最大公因子 $(m,n)=1$。

C. Y. Chao

(University of Pittsburgh, USA)

韩绍岑

（四川师范学院数学系，南充）

高阶 Heisenberg 方程的 Lax 表示

L. A. Taktajan（*Phys. Lett.*, **64 A**(1977), 235）给出了连续的 Heisenberg 旋转链方程的 Lax 表示，D. Y. Chen 和 Y. S. Li（*Acta Math. Sinica*, **2** (1986), 343）

得到了高阶 Heisenberg 方程。本文首先给出高阶 Heisenberg 向量场的换位子表示，进而导出高阶 Heisenberg 方程的 Lax 表示。

考虑谱问题

$$\psi_x = U\psi,\ U = \begin{pmatrix} w & u \\ v & -w \end{pmatrix}(-i\zeta),$$
$$w^2 + uv = 1. \tag{1}$$

命题 1 (1)式等价于 $L\psi = \zeta\psi$，其中 $L = iW\partial$，$W = \begin{pmatrix} w & u \\ v & -w \end{pmatrix}$，$\partial = \frac{\partial}{\partial x}$.

命题 2

$$L_t = \frac{d}{dt}L = i\begin{pmatrix} -\frac{vu_t + uv_t}{2\omega} & u_t \\ v_t & \frac{vu_t + uv_t}{2\omega} \end{pmatrix}\partial,$$

$$L_*\begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix} = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} L(u + \varepsilon\delta u, v + \varepsilon\delta v)$$
$$= i\begin{pmatrix} -\frac{v\delta u + u\delta v}{2\omega} & \delta u \\ \delta v & \frac{v\delta u + u\delta v}{2\omega} \end{pmatrix}\partial.$$

设 $G_1(x)$、$G_2(x)$ 为任意光滑函数，$G = (G_1, G_2)^T$，$\hat{V} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}\partial$，按曹策问关于向量场的换位表示的框架，我们希望得到

$$[\hat{V}, L] = L_*(KG) - L_*(JG)L, \tag{2}$$

其中 K、J 为待定的 Lenard 算子对。(2)式可变形为

$$[V, L] = L_*(KG)L^{-1} - L_*(JG), \tag{3}$$

其中 $L^{-1} = -i\partial^{-1}W$，$\partial\partial^{-1} = \partial^{-1}\partial = 1$，$V = \hat{V}L^{-1} \triangleq \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

命题 3 设 $B(x)$、$C(x)$ 为任意光滑函数，$G(x) = (B(x), C(x))^T$，

$V = V(u, v, B, C) =$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\partial^{-1}\left(\frac{u}{w}C' + \frac{v}{w}B'\right) & B \\ C & \frac{1}{2}\partial^{-1}\left(\frac{u}{w}C' + \frac{v}{w}B'\right) \end{pmatrix},$$

则等式(3)成立，其中

$$J = \begin{pmatrix} -u\partial^{-1}\frac{v}{w}\partial - 2w & -u\partial^{-1}\frac{u}{w}\partial \\ v\partial^{-1}\frac{v}{w}\partial & v\partial^{-1}\frac{u}{w}\partial + 2\omega \end{pmatrix},$$

$$K = i\begin{pmatrix} \partial & 0 \\ 0 & \partial \end{pmatrix}.$$

递归定义 Lenard 序列：$G_{-1} = (u, v)^T$，$KG_{j-1} = JG_j$，$j = 0, 1, 2, \cdots$。$X_j = JG_j$ 称为 Heisenberg 向量场。

定理 1 设 G_j 为 Lenard 序列，$V_j = V(u, v, B_j, C_j)$，则 Heisenberg 向量场有换位子表示：

$$[W_m, L] = L_*(X_m), \tag{4}$$

其中 $W_m = \sum_{j=-1}^{m-1}\hat{V}_j L^{m-1-j}$，$\hat{V}_j = V_j L$.

定理 2 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t = X_m$ 当且仅当 $L_t = [W_m, L]$.

定理 3 高阶 Heisenberg 方程是下述 Lax 对的相容性条件：$L\psi = \zeta\psi$，$\psi_t = W_m\psi$.

注 1. 前几个计算结果：

$$G_{-1} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

$G_0 =$

$$\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} \frac{1}{w}u' - \frac{1}{2}u\partial^{-1}v\partial\frac{u'}{w} + \frac{1}{2}u\partial^{-1}u\partial\frac{v'}{w} \\ -\frac{1}{2}v\partial^{-1}v\partial\frac{u'}{w} - \frac{1}{w}v' + \frac{1}{2}v\partial^{-1}u\partial\frac{u'}{w} \end{pmatrix},$$

$$X_0 = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix},\quad X_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u''w - uw'' \\ vw'' - wv'' \end{pmatrix},$$

其中 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t = X_1$ 为 Heisenberg 旋转链方程。

注 2.

$$\mathscr{L} = J^{-1}K$$
$$= \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} \frac{1}{w}\partial - \frac{1}{2}u\partial^{-1}v\partial\frac{1}{w}\partial & \frac{1}{2}u\partial^{-1}u\partial\frac{1}{w}\partial \\ -\frac{1}{2}v\partial^{-1}v\partial\frac{1}{w}\partial & -\frac{1}{w}\partial + \frac{1}{2}v\partial^{-1}u\partial\frac{1}{w}\partial \end{pmatrix}$$

称为 Lenart 递推算子。

许太喜　顾祝全

（石家庄铁道学院）