量子速度极限研究进展

孙舒宁, 郑雨军*

山东大学物理学院, 济南 250100

* 联系人, E-mail: yzheng@sdu.edu.cn

2020-11-04 收稿, 2020-12-31 修回, 2020-12-31 接受, 2021-01-04 网络版发表

国家自然科学基金(11674196)、国家重点研发计划(2015CB921004)和山东大学优秀博士研究生创新能力提升计划资助

摘要 研究量子速度极限不仅有助于理解量子力学基本问题, 而且在量子模拟、量子非平衡热力学等领域亦有重要意义. 本文首先介绍了封闭系统中两个重要的量子速度极限——Mandelstam-Tamm界和Margolus-Levitin界以及封闭系统的量子速度极限统一界. 在开放量子系统中, 由于系统与环境相互作用, 量子系统一般不能实现正交态演化, 研究开放系统量子速度极限需要考虑初态与末态之间测地线的度量方式. 本文讨论了基于不同几何度量所建立的量子速度极限以及开放系统的量子速度极限统一界. 基于量子力学的规范不变特性, 我们建立了一个新的量子速度极限界, 将量子系统演化速度与几何相位关联起来, 说明量子速度极限对量子热力学、几何操控量子系统动力学演化具有重要意义. 此外, 基于半经典Wigner函数表示, 我们也建立了量子速度极限界. 最后, 本文回顾了外部环境对量子系统动力学过程对量子系统演化速度极限的重要影响, 并对量子速度极限的下一步研究作出展望.

关键词 量子速度极限, Mandelstam-Tamm界, Margolus-Levitin界, 几何度量, 规范不变特性

作为量子力学的一个基本问题, 量子速度极限 (quantum speed limit, QSL) 描述量子系统从初态演化到目标态能达到的最大速度极限. 量子速度极限时间 (τ_{QSL}) 则是量子系统从初态演化到目标末态的最短时间间隔^[1~4]. 量子速度极限在量子通讯^[5]、量子计算^[6]、量子度量学^[7~9]、量子非平衡热力学^[10]以及量子最优控制算法^[11~16]等问题中都扮演着关键角色.

1 封闭系统量子速度极限

1.1 Mandelstam-Tamm(MT)界

1945年Mandelstam和Tamm^[1]发现, 海森堡能量与时间不确定关系 $\Delta E \Delta t \geq \hbar$ 描述的并不是同时测量问题, 而是么正动力学的本征演化时间. 这个不等式写作 $\Delta t \geq \hbar / \Delta E$ 更为恰当, Δt 的意义是量子系统从初始态演化到其正交末态需要的时间. 当系统哈密顿量 H 不显

含时间时, Mandelstam和Tamm^[1]推导出量子速度极限时间 $\tau_{\text{QSL}} = \pi \hbar / 2 \Delta E$, 人们称之为Mandelstam-Tamm (MT)界, 其中 ΔE 是量子系统的能量标准差, 或称能量不确定度. 量子速度极限自然地量化了一个量子态的寿命^[17]. 这里有两种极端情况: 一是如果量子系统的能量不确定度等于零, 即系统初始时刻处于能量的本征态, 那么此系统永远也演化不到它的正交态, $\tau_{\text{QSL}} = \infty$; 二是如果系统的能量不确定度可以任意大, 即系统能量涨落没有限制, 那么演化时间可变得极小, 演化速度达到极大. 因此, 对于一个确定的量子系统, 系统能量不确定度 ΔE 并不能很好地描述量子系统速度极限, 而且不同系统也可以具有相同的 ΔE .

1.2 Margolus-Levitin(ML)界

1998年, Margolus和Levitin^[2]建立了另外一个量子速度极限界. 考虑系统哈密顿量 H 不显含时间, 系统遵

引用格式: 孙舒宁, 郑雨军. 量子速度极限研究进展. 科学通报, 2021, 66: 1946–1956

Sun S N, Zheng Y J. Advances on quantum speed limit (in Chinese). Chin Sci Bull, 2021, 66: 1946–1956, doi: 10.1360/TB-2020-1430

薛定谔方程由初态 $|\psi(0)\rangle$ 经 t 时间后演化到末态 $|\psi(t)\rangle$. 系统末态 $|\psi(t)\rangle$ 与初态 $|\psi(0)\rangle$ 正交时, 它们的重叠 $S(t) = \langle\psi(0)|\psi(t)\rangle = 0$, 量子系统从初态演化到与其正交末态的最短时间为 $\tau_{\text{QSL}} = \pi\hbar / 2\langle E \rangle$, 即Margolus-Levitin(ML)界. 对于一个给定的量子系统, 相对于能量不确定度 ΔE , 能量平均值 $\langle E \rangle$ 是一个可以判定具体系统的量.

1.3 量子速度极限统一界

人们将以上MT与ML界联立起来, 建立了封闭系统量子速度极限统一界^[17]:

$$\tau_{\text{QSL}} = \max \left\{ \frac{\pi\hbar}{2\Delta E}, \frac{\pi\hbar}{2\langle E \rangle} \right\}. \quad (1)$$

式(1)说明, 通过比较能量不确定度 ΔE 与能量平均值 $\langle E \rangle$ 的大小, 可以确定紧的量子速度极限界. 当 $\langle E \rangle > \Delta E$ 时, MT界为紧的量子速度极限界; 反之, ML界为紧的量子速度极限界.

此后, 人们把封闭系统量子速度极限由正交态演化推广到非正交态演化^[18-21], 并得到非正交态演化时量子速度极限统一界的表达式

$$\tau_{\text{QSL}} = \max \{ \alpha(\varepsilon)\pi\hbar / 2\Delta E, \beta(\varepsilon)\pi\hbar / 2\langle E \rangle \}.$$

其中, α 和 β 是参数 ε 的函数, $\varepsilon = P(t)$ 且 $\varepsilon \in [0, 1]$. $P(t) = |\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle|^2$ 为初态 $|\psi(0)\rangle$ 与末态 $|\psi(t)\rangle$ 的重叠概率. 当 $\alpha(\varepsilon) = \beta(\varepsilon) = 1$ 时, 该表达式回到式(1)正交态演化时的量子速度极限统一界.

2 开放系统量子速度极限

任何量子系统都不可避免地与其所处的环境发生相互作用, 实际量子系统满足非幺正动力学演化. 开放量子系统的速度极限在开放系统的最大信息传输速率^[22]、量子门操作^[23]和熵增^[10]等方面都扮演着重要角色^[4].

2.1 基于不同几何度量方法建立开放系统量子速度极限界

开放量子系统的哈密顿量 $H(t)$ 一般是含时间的, 系统遵循薛定谔方程由初态 $|\psi(0)\rangle$ 经 t 时间间隔后演化到态 $|\psi(t)\rangle$. 由于耗散与退相干的存在, 系统一般不能演化到 $|\psi(0)\rangle$ 的正交态. 研究开放系统量子速度极限时, 需要

考虑从 $|\psi(0)\rangle$ 演化到 $|\psi(t)\rangle$ 的实际演化路径长度(记作 l)以及连接 $|\psi(0)\rangle$ 与 $|\psi(t)\rangle$ 的最短路径长度, 即测地线长度($\mathcal{L}$). 若量子系统从 $|\psi(0)\rangle$ 演化到 $|\psi(t)\rangle$ 的实际演化路径与连接 $|\psi(0)\rangle$ 与 $|\psi(t)\rangle$ 的测地线重合, 则系统的最短演化时间 τ_{QSL} 为从 $|\psi(0)\rangle$ 到 $|\psi(t)\rangle$ 的实际驱动时间 t ; 若量子系统从 $|\psi(0)\rangle$ 演化到 $|\psi(t)\rangle$ 的实际演化路径远离连接 $|\psi(0)\rangle$ 与 $|\psi(t)\rangle$ 的测地线, 则系统的最短演化时间 τ_{QSL} 小于从 $|\psi(0)\rangle$ 到 $|\psi(t)\rangle$ 的实际驱动时间 t , 量子系统具有演化加速的潜力.

建立开放系统量子速度极限界, 首先要度量两个可区分量子态之间的最短距离, 即度量测地线长度. 虽然量子态具有不可区分特性, 即不可能同时测量两个非正交的量子态, 但两个可区分量子态之间的测地线距离可以通过度量测得. 不同的度量导致不同的测地线长度. 常用的度量方式有相对纯度(relative purity)、Bures角(Bures angle)、量子费舍尔信息(quantum Fisher information)、保真度(fidelity)、Wigner-Yanase信息(Wigner-Yanase information)和迹距离(trace norm distance)等^[3,4,24-29]. 其次, 考虑系统的最大平均演化速度 v_{QSL} . 当量子系统以最大平均演化速度 v_{QSL} 沿着测地线(或尽可能接近测地线)演化时, 量子系统演化达到最短极限时间.

2.2 MT型量子速度极限界

Taddei等人^[24]利用量子费舍尔信息度量将量子速度极限的MT界推广到非幺正演化. 设量子系统初态与末态分别为 ρ_0 和 ρ_t , 量子态之间的保真度定义为 $F_B(\rho_0, \rho_t) = \text{Tr}(\sqrt{\sqrt{\rho_0}\rho_t\sqrt{\rho_0}})$. 其对应的Bures角 $B(\rho_0, \rho_t) = \arccos(F_B(\rho_0, \rho_t))$ 是连接初态 ρ_0 和末态 ρ_t 的测地线长度. 从 ρ_0 到 ρ_t 实际演化路径的长度为 $l = \int_0^t \sqrt{F_Q(t')/4} dt$. 其中 $F_Q(t') = 4\langle(\Delta E)^2\rangle_{\rho_0} / \hbar^2$ 是系统演化过程的量子费舍尔信息.

连接 ρ_0 和 ρ_t 的测地线长度不会长于实际演化路径的长度, 即 $\mathcal{L} \leq l$ 恒成立. 当系统沿测地线演化时, 满足 $B(\rho_0, \rho_t) = \mathcal{L}$, 即 $B(\rho_0, \rho_t) = \int_0^{\tau_{\text{QSL}}} \sqrt{\langle(\Delta E)^2\rangle_{\rho_0} / \hbar^2} dt$. 其中, 量子系统最大瞬时演化速度为 $v_{\text{QSL}} = \sqrt{\langle(\Delta E)^2\rangle_{\rho_0} / \hbar^2}$. 当初末态为相互正交纯态时,

$B(\rho_0, \rho_t) = \pi/2$, 对应封闭系统的MT界.

del Campo等人^[3]利用相对纯度定义了开放系统MT型量子速度极限界. 初态 ρ_0 与末态 ρ_t 之间的相对纯度定义为 $f(t) = \text{Tr}(\rho_0 \rho_t) / \text{Tr}(\rho_0^2)$. 系统的最大瞬时演化速率满足 $v_{\text{QSL}} = |df(t)/dt| \leq \sqrt{\text{Tr}[(L^\dagger \rho_0)^2]} / \text{Tr}(\rho_0^2)$. L 是时间局域超算符. 令 $f(t) = \cos\theta(\theta \in [0, \pi/2])$, 考虑 $f(t) \leq \int_0^t v_{\text{QSL}} dt'$, 得 $\tau_\theta \geq 4\theta^2 \text{Tr}(\rho_0^2) / \pi^2 \sqrt{\text{Tr}[(L^\dagger \rho_0)^2]}$. 这是del Campo等人^[3]推导的开放系统MT型量子速度极限界. 当初末态为正交纯态时, τ_θ 表达式回到封闭系统的MT型界.

基于Bures角, Deffner和Lutz^[4]建立了开放系统MT型量子速度极限界. Bures角定义了量子系统初态与末态(演化驱动时间为 t)之间的测地线长度为 $\mathcal{L} = \arccos \sqrt{\langle \psi_0 | \rho_t | \psi_0 \rangle}$. 系统的最大瞬时演化速度为

$$v_{\text{QSL}} = \left| \frac{d}{dt} \mathcal{L}(\rho_0, \rho_t) \right| = \frac{\langle \psi_0 | \dot{\rho}_t | \psi_0 \rangle}{2\sqrt{1 - \langle \psi_0 | \rho_t | \psi_0 \rangle} \sqrt{\langle \psi_0 | \rho_t | \psi_0 \rangle}}. \quad (2)$$

根据 $d\mathcal{L}(\rho_0, \rho_t)/dt \leq |d\mathcal{L}(\rho_0, \rho_t)/dt|$ 可得,

$$2\cos\mathcal{L}\sin\mathcal{L}\dot{\mathcal{L}} \leq |\text{Tr}\{L_t(\rho_t)\rho_0\}|,$$

其中时间局域超算符 $L_t(\rho_t) = \dot{\rho}_t$. 根据Cauchy-Schwarz不等式可得

$$2\cos\mathcal{L}\sin\mathcal{L}\dot{\mathcal{L}} \leq \|L_t(\rho_t)\|_{\text{hs}}, \quad (3)$$

其中, $\|L_t(\rho_t)\|_{\text{hs}}$ 是非么正算符 $L_t(\rho_t)$ 的希尔伯特-施密特范数(Hilbert-Schmidt norm), 满足 $\|L_t(\rho_t)\|_{\text{hs}} = \sqrt{\sum_i \sigma_i^2}$ (σ_i 是算符 $L_t(\rho_t)$ 的奇异值). 对式(3)两边积分后得到

$$\tau \geq \frac{1}{A_\tau^{\text{hs}}} \sin^2 \mathcal{L}(\rho_0, \rho_\tau), \quad (4)$$

其中, $A_\tau^{\text{hs}} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|L_t(\rho_t)\|_{\text{hs}} dt$. 式(4)为开放系统MT型量子速度极限界. 当初末态为正交纯态时, 式(4)回到封闭系统MT型量子速度极限界.

另外, 我们课题组^[28]基于迹度量距离, 建立了开放系统MT型量子速度极限界. 初末态 ρ_0 和 ρ_t 的迹距离定义为 $\mathcal{L}_D(\rho_0, \rho_t) = \|\rho_t - \rho_0\|_{\text{Tr}} / 2$, 其中 $\|\rho_t - \rho_0\|_{\text{Tr}} = \text{Tr}|\rho_t - \rho_0| = \sum_i |\sigma_i|$ 是算符 $\rho_t - \rho_0$ 的迹范数, σ_i 是 $\rho_t - \rho_0$ 的本

征值.

对 $\mathcal{L}_D(\rho_0, \rho_t)$ 求关于时间 t 的一阶导数, 并利用Cauchy-Schwarz不等式得到 $v_{\text{QSL}} = |d\mathcal{L}_D(\rho_0, \rho_t)/dt| \leq \sqrt{n \sum_i \sigma_i^2} / 2$. 根据 $\mathcal{L}_D(\rho_0, \rho_\tau) \leq \int_0^\tau v_{\text{QSL}} dt$ 得到

$$\tau \geq \tau_{\text{QSL}} = \frac{\mathcal{L}_D(\rho_0, \rho_\tau)}{\frac{1}{2} \sqrt{n \sum_i \sigma_i^2}}, \quad (5)$$

其中, $\frac{1}{2} \sqrt{n \sum_i \sigma_i^2} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{1}{2} \sqrt{n \sum_i \sigma_i^2} dt$. 当系统为么正演化时, $\|L_t(\rho_t)\|_{\text{hs}} \leq \sqrt{2} \Delta E / \hbar$. 式(5)为基于迹距离建立的开放系统MT型量子速度极限.

2.3 ML型量子速度极限界

从式(2)出发, Deffner和Lutz^[4]对 $|\text{Tr}\{L_t(\rho_t)\rho_0\}|$ 利用von Neumann不等式后得到 $2\cos\mathcal{L}\sin\mathcal{L}\dot{\mathcal{L}} \leq \|L_t(\rho_t)\|_{\text{op,Tr}}$. 对该式两边积分后, 得到量子系统演化的最短时间:

$$\tau \geq \max \left\{ \frac{1}{A_\tau^{\text{op}}}, \frac{1}{A_\tau^{\text{Tr}}} \right\} \sin^2 \mathcal{L}(\rho_0, \rho_\tau), \quad (6)$$

其中, $A_\tau^{\text{op,Tr}} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|L_t(\rho_t)\|_{\text{op,Tr}} dt$. A_τ^{op} 是非么正算符 $L_t(\rho_t)$ 的范数(operator norm), 对于厄米算符 A , $\|A\|_{\text{op}}$ 等于算符 A 的最大奇异值. A_τ^{Tr} 是 $L_t(\rho_t)$ 的迹范数, $\|L_t(\rho_t)\|_{\text{Tr}} = \sum_i \sigma_i$ 等于 $L_t(\rho_t)$ 所有奇异值之和. 式(6)是Deffner和Lutz^[4]建立的开放系统ML型量子速度极限界.

对迹距离定义的测地线长度 $\mathcal{L}_D(\rho_0, \rho_t) = \|\rho_t - \rho_0\|_{\text{Tr}} / 2$ 作关于时间 t 的一阶导数后, 利用von Neumann不等式得到 $v_{\text{QSL}} = |d\mathcal{L}_D(\rho_0, \rho_t)/dt| \leq \sum_i \sigma_i / 2$. 根据 $\mathcal{L}_D(\rho_0, \rho_\tau) \leq \int_0^\tau v_{\text{QSL}} dt$ 得到

$$\tau \geq \tau_{\text{QSL}} = \frac{\mathcal{L}_D(\rho_0, \rho_\tau)}{\frac{1}{2} \sum_i \sigma_i}, \quad (7)$$

其中, $\sum_i \sigma_i$ 为超算符 $L_t(\rho_t)$ 的迹范数. 当系统进行么正演化时, $\sum_i \sigma_i \leq 2\langle E \rangle / \hbar$. 式(7)是我们课题组^[28]基于迹距离建立的开放系统ML型量子速度极限.

但是, 随后人们发现Deffner和Lutz^[4]推导开放系统ML型量子速度极限界的过程存在一些问题^[21,30-32]. 例

如, 在文献[4]的式(10)中, Deffner和Lutz利用等式 $\text{Tr}\{|H\rho_t|\} = \langle H_t \rangle$ 得到封闭系统ML型量子速度极限界 $\tau_{\text{QSL}} = \hbar \sin^2 \mathcal{L}(\rho_0, \rho_t) / 2E_t$, 其中

$$E_t = (1/\tau) \int_0^\tau dt |\langle \psi(t) | H(t) | \psi(t) \rangle|.$$

然而, $\text{Tr}\{|H\rho_t|\}$ 的正确推导结果应为 $\text{Tr}\{|H\rho_t|\} = \sqrt{\langle \psi(t) | H^2(t) | \psi(t) \rangle} \neq \langle E(t) \rangle$. 又如, 在文献[33]中, Deffner和Lutz^[4]将含时演化算符 U_t 定义为 $\exp\left(-(i/\hbar) \int_0^t H_t dt\right)$, 却忽略了 U_t 的时间序列乘积, 导致QSL的正确推导结果并不能与能量平均值建立联系. 目前有关ML界的研究反映了建立开放系统ML型量子速度极限界仍是一个待解决的问题.

2.4 开放系统量子速度极限统一界

基于Bures角度量, Deffner和Lutz^[4]将式(4)和(6)联立起来, 建立了开放系统量子速度极限的统一界:

$$\tau_{\text{QSL}} = \max \left\{ \frac{1}{A_{\tau}^{\text{op}}}, \frac{1}{A_{\tau}^{\text{Tr}}}, \frac{1}{A_{\tau}^{\text{hs}}} \right\} \sin^2 \mathcal{L}(\rho_0, \rho_t). \quad (8)$$

基于迹距离度量, 我们课题组^[28]将式(5)和(7)联立起来, 也获得了开放系统量子速度极限的统一界:

$$\tau_{\text{QSL}} = \max \left\{ \frac{1}{\frac{1}{2} \sqrt{n \sum_i \sigma_i^2}}, \frac{1}{\frac{1}{2} \sum_i \sigma_i} \right\} \mathcal{L}_D(\rho_0, \rho_t). \quad (9)$$

将同一度量下获得的MT与ML界联立起来, 可建立开放系统量子速度极限统一界, 其中较大者视为紧的量子速度极限界. 开放系统量子速度极限也可以从初态为纯态推广到任意混合态情况^[4,34,35]. 量子速度极限界的紧度问题是人们关注的主要问题之一, 例如初态的设定对量子速度极限紧度的影响^[36,37].

3 基于微分几何方法建立系统量子速度极限界

几何思想在物理学中起着关键作用, 如前面在介绍开放系统量子速度极限时, 初末态之间测地线距离的测量需要依赖于不同的几何度量. 其中, Bures角、量子费舍尔信、保真度、Wigner-Yanase信息以及下文要介绍的Fubini-Study度量也被称作黎曼流形中的黎曼度量. 黎曼流形是一个微分流形, 基于微分几何定义的黎曼度量具有规范不变特性. 在黎曼流形中, 通过对量

子态矢量的几何变换, 人们获得了几何相位. 几何相位由于其丰富的拓扑性质和与量子场规范理论的密切联系, 得到了数学物理学家的重视与应用, 如通过使用Berry相及其非阿贝尔扩展可实现量子门操作. 近年来, 对量子系统几何性质的研究又重新引起人们的兴趣^[38-41].

在拓扑矢量空间 $\mathcal{V}$ 中, 总流形 $\mathcal{E}$ 、底流形 $\mathcal{B}$ 、结构群 $\mathcal{G}$ 以及映射 Π 组成了非平凡主丛构造 $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{B}, \mathcal{G})$. 在拓扑矢量空间中定义两条随时间演化的曲线, 分别为

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{|\psi(t)\rangle \in \mathcal{V} | t \in [0, \tau] \subset \mathbb{R}\} \subset \mathcal{V} \\ \mathcal{C}' &= \{|\psi'(t)\rangle \in \mathcal{V} | t \in [0, \tau] \subset \mathbb{R}\} \subset \mathcal{V}. \end{aligned} \quad (10)$$

$|\psi(t)\rangle$ 与 $|\psi'(t)\rangle$ 属于同一条射线, 它们投影到底流形中是同一条曲线 C , 即

$$\mathcal{C}, \mathcal{C}' \subset \mathcal{V} \rightarrow C = \Pi(\mathcal{C}) = \Pi(\mathcal{C}') \subset \mathcal{B}. \quad (11)$$

曲线 $\mathcal{C}$ 、 $\mathcal{C}'$ 和 C 既可以是封闭的, 也可以是非闭合的.

在底流形 $\mathcal{B}$ 中, 态矢量随时间演化的曲线在一个给定的度量下具有规范不变特性. 应用Fubini-Study度量, 演化路径的规范不变长度为 $l = \int dl$, 其中,

$$dl^2 = \left\langle \left\langle \frac{d}{dt} \psi(t) \right| \frac{d}{dt} \psi(t) \right\rangle + \mathcal{A}_{\text{GF}}^2 \right| dt^2, \quad (12)$$

是 $|\psi(t)\rangle$ 与 $|\psi(t+dt)\rangle$ 之间距离的平方^[42-44], 具有规范不变特性. 广义潘氏联络(Pancharatnam connection, $\mathcal{A}_{\text{GF}}$)是一个具有几何意义的物理量^[45,46], 它可以比较任意两个相邻或不相邻的非正交态之间的相位. 从式(12)可看出, 几何演化路径的长度由两部分组成: 由切矢量提供的切向速度^[47]以及引起量子态在拓扑矢量空间运动的横向速度^[48]对时间的积累. dl 是对Fubini-Study度量^[49,50]定义的测地线长度 $\mathcal{L} = \arccos |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|$ 作变分得到的. $\mathcal{L}$ 定义了两个不同量子态之间的统计距离, 依赖于选取的初末量子态, dl 可以度量两个离得非常近的量子态之间的距离, 并且考虑了量子态随时间的演化, 对具体实验操作有指导意义. 另外, dl 的定义包含了具有几何意义的物理量和一般的量子态演化规律. 与 $\mathcal{L} = \arccos |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|$ 需要考虑具体系统的两个量子态相比, dl 的定义更具有普遍性, 并且还具有规范不变特性.

定义连接态矢量 $|\psi(0)\rangle$ 与 $|\psi(t)\rangle$ 的测地线长度为 $\mathcal{L}$. 考虑测地线长度 $\mathcal{L}$ 不大于实际演化路径长度 l ^[27],

即 $\mathcal{L} \leq l$, 可将 τ_{QSL} 写作 $\tau_{\text{QSL}}/\tau = \mathcal{L}/l$. 该式建立了量子系统最短演化时间 τ_{QSL} 与几何量——测地线和演化路径之间的等价关系, 并提供了一个新的视角研究量子速度极限, 即QSL可依赖于流形中曲线的几何结构. 联合式(12)可得

$$\tau_{\text{QSL}} = \frac{\mathcal{L}[\psi(0), \psi(\tau)]}{\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \sqrt{\left\langle \frac{d}{dt} \psi(t) \left| \frac{d}{dt} \psi(t) \right\rangle + \mathcal{A}_{\text{GP}}^2} dt}. \quad (13)$$

式(13)是我们^[51]基于微分几何建立的量子速度极限一般表达式. 测地线 $\mathcal{L}$ 与几何演化路径 $d\mathbf{l}$ 是规范不变的, 且广义潘氏联络 $\mathcal{A}_{\text{GP}}$ 有几何性质也具有规范不变特性. 式(13)也反映了量子系统最短演化时间可以利用广义潘氏联络进行调控, 为操控量子体系的几何演化、加速几何量子计算等提供了潜在方案和途径, 也对理解量子熵减等问题具有科学意义. 当量子系统循环演化时, 广义潘氏联络为Aharonov-Anandan(AA)相位^[52], AA相位可理解为量子态矢量平行地沿着 $\mathcal{B}$ 空间中封闭曲线的和乐传输.

明确量子系统态矢量的演化后, 我们可根据式(13)得到 τ_{QSL} 具体的表达式. 考虑量子态在拓扑矢量空间中的演化及其在底流形中对应的投影, 量子态矢量的演化可以写作

$$|\psi(t)\rangle = \exp \left[i\varphi_{\text{g}}[C] - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \langle \psi(t') | H(t') | \psi(t') \rangle \right] |\psi(0)\rangle, \quad (14)$$

即量子态矢量的演化算符可以记作从初态 $|\psi(0)\rangle$ 到末态 $|\psi(t)\rangle$ 演化路径 C 上积累的动力学相位 $\varphi_{\text{dyn}}[C] = -\int_0^t dt' \langle \psi(t') | H(t') | \psi(t') \rangle / \hbar$ 与其在底流形对应的投影曲线 C 上积累的几何相位 φ_{g} 之和. Berry^[53]首先说明在绝热循环演化过程中式(14)成立, Aharonov和Anandan^[52]随后将式(14)推广到绝热非循环演化情况. Samuel和Bhandari^[45]证实, 在一般非绝热非循环演化过程中, 式(14)亦成立. 因此式(13)量子速度极限不只适用于封闭系统, 也适用于开放量子系统.

基于式(14), 我们考虑量子态矢量在拓扑矢量空间中的不同演化模式. 当量子态矢量在拓扑矢量空间中沿着其演化路径平行传输时, 动力学相位在演化路径 C_1 上不积累, 即 $\varphi_{\text{dyn}}[C_1] = 0$ ^[54]. 曲线 C_1 是在底流形 $\mathcal{B}$ 中的投

影, C_1 称为 C_1 的“水平提升”. 演化路径的长度可由式(14)

$$\text{计算得到 } l[C_1] = \int_{C_1} dt \sqrt{\left\langle \frac{d}{dt} \psi(t) \left| \frac{d}{dt} \psi(t) \right\rangle} = \int_{C_1} dt |\dot{\varphi}_{\text{g}}|.$$

将该式代入式(13)得

$$\tau_{\text{QSL}} = \frac{\mathcal{L}[\psi(0), \psi(\tau)]}{\frac{1}{\tau} \int_0^\tau |\dot{\varphi}_{\text{g}}| dt}, \quad (15)$$

其中, $|\dot{\varphi}_{\text{g}}|$ 为量子系统演化过程中几何相位的变化率^[53]. 式(15)是我们建立的新的量子速度极限界, 此界建立了量子系统最短演化时间与量子系统几何相位之间的关系, 反映了当态矢量在拓扑矢量空间中平行传输时, 演化模式对流形中演化路径的影响. 对于非厄米量子体系, 其几何相位已有详细的研究^[43,44], 因此我们建立的几何量子速度极限界(式(15))不仅适用于厄米量子系统, 也适用于非厄米量子体系^[55,56].

作为例子, 我们考虑置于旋转磁场中自旋为1/2的粒子, 展示3种量子速度极限界. 旋转磁场定义为 $\mathbf{B} = B\mathbf{n}(t)$, B 为磁场强度且是常量, $\mathbf{n}(t)$ 为磁场旋转方向矢量且保持转速 ω 不变. 量子系统演化遵循Schrödinger方程, $i\hbar \partial |\psi(t)\rangle / \partial t = H(t) |\psi(t)\rangle$, 其中哈密顿量 $H(t) = -\hbar\omega_0 \mathbf{n}(t) \cdot \boldsymbol{\sigma} / 2$, ω_0 为Larmor频率, $\boldsymbol{\sigma}$ 为泡利矩阵. 系统的波函数 $|\psi(t)\rangle$ 可以通过转换式 $|\psi(t)\rangle = A(t) |\varphi(t)\rangle$, 将Schrödinger方程转换到绝热框架下获得解析解. 其中, 算符 $A(t)$ 是列向量 $|\mathbf{n}_+(t)\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2)|1\rangle$ 和 $|\mathbf{n}_-(t)\rangle = -\sin(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi} \cos(\theta/2)|1\rangle$ 的组合, θ 和 ϕ 分别为磁场旋转方向矢量 $\mathbf{n}(t)$ 的极角和幅角. 在绝热框架下, 含时Schrödinger方程变为 $i\hbar \partial |\varphi(t)\rangle / \partial t = H_{\text{eff}}(t) |\varphi(t)\rangle$. 系统有效哈密顿量 H_{eff} 可分解为绝热部分和非绝热部分: $H_{\text{eff}} = -\frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_z + \frac{\hbar\dot{\phi}}{2} (\mathbf{I} - \cos\theta \sigma_z + \sin\theta \sigma_x) - \frac{\hbar\dot{\theta}}{2} \sigma_y$. 考虑磁场沿布洛赫球的经线旋转, 即极角以固定转速旋转 $d\theta/dt = \omega$, 幅角 ϕ 保持不变时, 可得到体系的解析解^[51,57].

如图1, 我们给出了 τ_{QSL}/τ 随演化时间 τ 的变化. 当磁场旋转角速度较大时($\omega/\omega_0 = 1.26$, 图1(a)), MT、ML与我们建立的新的界分别呈现不同的行为, 且我们建立的新的界是3种界中最紧的, 即由式(14)计算的量子速度极限时间最大. 改变系统条件, 当磁场旋转角速度变慢时($\omega/\omega_0 = 0.48$, 图1(b)), 量子速度极限界的行为也有相应的变化, 此时ML界成为最紧的QSL界.

图1 (网络版彩色) τ_{QSL}/τ 随演化时间 τ 的变化^[51]. 其中, “×”表示MT型界, “○”表示ML型界, 实线表示我们建立的新的界(式(14)). (a) $\omega/\omega_0=1.26$; (b) $\omega/\omega_0=0.48$

Figure 1 (Color online) τ_{QSL}/τ as a function of evolution time τ ^[51]. “×” denotes the results by MT bound; “○” denotes the results by ML bound; the solid line denotes the results by our distinct bound in Eq. (14). (a) $\omega/\omega_0=1.26$; (b) $\omega/\omega_0=0.48$

4 基于量子力学Wigner函数表示建立开放系统量子速度极限界

量子力学Wigner函数表示是以量子相空间中的分布函数——Wigner函数代替波函数分布. 在量子相空间中, 量子力学的一些量可以通过类经典的图像实现可视化. 人们已经利用Wigner表象研究了许多问题, 如当系统从量子到经典转化时量子速度极限的变化、量子隧穿、猫态、Lévy飞行以及陈数的测量等^[58-63].

Deffner^[60]基于量子相空间理论建立了量子速度极限与Wigner函数的关系, 即 $\tau_{QSL}^W = D(W_t, W_0) / \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt v_{QSL}^W$, 并选取Wasserstein-1距离 $D(W_t, W_0) = \|W_t - W_0\|_1 = \int dt |W(\Gamma, t) - W_0(\Gamma)|$ 为测地线, $\Gamma=(x, p)$ 是相空间坐标. 最大演化速度定义为 $v_{QSL}^W = \|\dot{W}(\Gamma, t)\|_1 = \int d\Gamma |W(\Gamma, t)|$.

基于量子力学Wigner函数表示, 我们课题组^[64]建立了量子速度极限时间与纠缠轨线之间的关系. 量子系统最大演化速度可以用纠缠轨线表示为 $v_{QSL}^W = \int_{-\infty}^{+\infty} J(\Gamma, t) d\Gamma$, 其中, $J(\Gamma, t) = \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \dot{\epsilon}_i K_i(\Gamma, t) \right|$ 为 t 时刻在相空间 Γ 点连接谐振子(connecting harmonic oscillator, CHO)的平均能量流. 该式说明, 量子速度极限可以视为CHO的平均能量流在整个相空间的集合, 而且CHO的能量随时间的变化率 $\dot{\epsilon}_i$ 及其相应的权重 $K_i(\Gamma, t)$ 均是影响量子速度极限的重要因素.

5 环境因素对量子速度极限的影响

在量子系统与环境相互作用的过程中, 环境会不可避免地影响系统的动力学过程. 量子系统的开放性表现在它与环境发生能量交换与信息交流^[65]. 系统与环境发生能量交换导致系统耗散过程, 与环境发生信息交换导致系统退相干过程, 此二过程均不可逆. 退相干过程在一定条件下对系统有动力学反作用. 人们基于以上已建立的量子速度极限界, 对开放系统量子速度极限展开更多研究.

5.1 非马尔可夫过程

开放系统动力学过程分为马尔可夫过程和非马尔可夫过程. 马尔可夫动力学过程指信息从系统单向地流向环境而没有回流. 而在非马尔可夫动力学过程中, 信息不再单向流动, 环境也会有信息回流到系统中, 环境对系统具有记忆效应.

在非马尔可夫动力学中, 人们建立了非马尔可夫度与QSL的关系:

$$\tau_{QSL}/\tau = [1 - P(|e\rangle\langle e|)] / [2N(\tau) + 1 - P(|e\rangle\langle e|)],$$

其中 $N(\tau)$ 为系统的非马尔可夫度, $P(|e\rangle\langle e|)$ 是系统在激发态的布居数. 上式表明, 非马尔可夫度越大, 量子速度极限时间越短, 非马尔可夫度可以提高量子系统的最大演化速度^[28,66-71]. 此外, 二能级系统的激发态布居数还与非马尔可夫度存在竞争关系, 共同决定量子系统的演化加速^[72]. 相关实验也证实了非马尔可夫度对系统演化的加速作用^[70].

5.2 量子纠缠

在研究封闭系统量子速度极限时,人们发现纠缠可以提高量子系统的演化速度^[21,73~76].在封闭系统中,子系统之间的量子纠缠可以加速量子演化.最近研究表明,在开放系统中无相互作用子系统之间的纠缠也能加速量子演化^[25,77,78].

5.3 其他

除了以上加速量子系统演化的因素,还有很多外界环境因素或系统自身性质的改变都会对量子系统演化速度产生影响^[79].比如,在马尔可夫噪声环境中,开放系统量子速度极限时间可以帮助分析量子系统退相干时间^[17,80~84];系统与环境的强耦合作用可以提高系统的演化速度;对系统外加经典控制场,通过操控场的驱动强度可以实现从马尔可夫到非马尔可夫的转变,从而实现演化的加速^[66].另外,人们也对相对论系统^[85,86]、非平衡动力学系统^[72]、自旋量子系统^[87~89]、非厄米系统^[51]和多体系统^[90]等的最大演化速度进行了研究.数值方法如机器学习也被应用于量子速度极限的研究^[91].

6 总结与展望

对于封闭量子系统,人们已建立了MT与ML两种量子速度极限界,并建立了封闭系统量子速度极限的统一界.

在开放量子系统中,除MT、ML两种界,我们还建立了一个新的量子速度极限界,此界将量子速度极限与系统的几何相位关联起来.开放系统的环境因素对量子系统速度极限的影响也有广泛讨论^[92~97].同时,我们也建立了量子速度极限与相空间的Wigner函数、经典轨线方法之间的关系.

尽管此前的研究对开放体系量子速度极限ML型界作了不同的推广,但对开放系统而言,一般意义的

ML型量子速度极限仍需要深入研究.

目前,开放系统量子速度极限界依赖于所选取的度量.在同一个度量下,将不同的QSL界联立起来视为开放系统量子速度极限的统一界.通过比较数值大小,取最大值视为最紧的QSL界^[13,65,98,99].选取不同的度量会导致不同的量子速度极限界,这就很难判定在何种度量下的界最紧.怎样统一不同度量下的开放系统量子速度极限界,是需要关注的研究重点.

另外,已有的量子速度极限界告诉我们,若要获得紧的QSL界,我们需要先计算出 ΔE 、 $\langle E \rangle$ 以及 $|\dot{\phi}_g|$,那么,我们需要考虑不同QSL界的物理含义以及不同的界与量子系统的演化之间的关系.

目前相关研究表明,经典系统也有类似量子速度极限的经典速度极限^[58,100],其物理起源以及与经典物理辛结构的关系等相关问题还需要进行深入探究.

研究表明,在量子热动力学中,基于量子速度极限可以获得量子熵产的最大速率^[10].基于量子速度极限对熵产的影响,人们建立了量子信息最大产率的界限^[101].然而,这个界限只限于数学上的推导并要求熵是连续的.对量子信息最大产率界限的实际应用以及适用条件还需要研究.此外,基于经典系统的速度极限建立经典系统信息最大产率的界,对优化经典系统信息传输速率具有指导意义.

量子热机的效率是目前的研究热点之一^[102].已有研究从量子速度极限推导出了量子热机模型^[103],量子速度极限与量子热机之间的关系仍值得更多探讨.

在对系统进行精密测量时,量子速度极限可以与量子Fisher信息建立映射关系,为寻求逼近量子极限的精密探测提供了潜在技术方案.量子速度极限与量子最优控制研究相结合,研究最优化算法以及改变外场条件等手段以实现量子系统的调控和开发利用,这对突破经典调控的极限,建立全新的量子调控技术具有重要意义.

参考文献

- Mandelstam L, Tamm I. The uncertainty relation between energy and time in non-relativistic quantum mechanics. *J Phys*, 1945, 9: 249–254
- Margolus N, Levitin L B. The maximum speed of dynamical evolution. *Physica D*, 1998, 120: 188–195
- del Campo A, Egusquiza I L, Plenio M B, et al. Quantum speed limits in open system dynamics. *Phys Rev Lett*, 2013, 110: 050403
- Deffner S, Lutz E. Quantum speed limit for non-Markovian dynamics. *Phys Rev Lett*, 2013, 111: 010402
- Yung M H. Quantum speed limit for perfect state transfer in one dimension. *Phys Rev A*, 2006, 74: 030303
- Lloyd S. Ultimate physical limits to computation. *Nature*, 2000, 406: 1047–1054

- 7 Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L. Advances in quantum metrology. *Nat Phys*, 2011, 5: 222–229
- 8 Chin A W, Huelga S F, Plenio M B. Quantum metrology in non-Markovian environments. *Phys Rev Lett*, 2012, 109: 233601
- 9 Tsang M. Quantum metrology with open dynamical systems. *New J Phys*, 2013, 15: 073005
- 10 Deffner S, Lutz E. Generalized clausius inequality for nonequilibrium quantum processes. *Phys Rev Lett*, 2010, 105: 170402
- 11 Caneva T, Murphy M, Calarco T, et al. Optimal control at the quantum speed limit. *Phys Rev Lett*, 2009, 103: 240501
- 12 Deffner S. Optimal control of a qubit in an optical cavity. *J Phys B-At Mol Opt Phys*, 2014, 47: 145502
- 13 Hegerfeldt G C. Driving at the quantum speed limit: Optimal control of a two-level system. *Phys Rev Lett*, 2013, 111: 260501
- 14 Mukherjee V, Carlini A, Mari A, et al. Speeding up and slowing down the relaxation of a qubit by optimal control. *Phys Rev A*, 2013, 88: 062326
- 15 Hegerfeldt G C. High-speed driving of a two-level system. *Phys Rev A*, 2014, 90: 032110
- 16 Chen X, Ban Y, Hegerfeldt G C. Time-optimal quantum control of nonlinear two-level systems. *Phys Rev A*, 2016, 94: 023624
- 17 Deffner S, Campbell S. Quantum speed limits: From Heisenberg's uncertainty principle to optimal quantum control. *J Phys A-Math Theor*, 2017, 50: 453001
- 18 Pfeifer P. How fast can a quantum state change with time? *Phys Rev Lett*, 1993, 70: 3365–3368
- 19 Pfeifer P, Fröhlich J. Generalized time-energy uncertainty relations and bounds on lifetimes of resonances. *Rev Mod Phys*, 1995, 67: 759–779
- 20 Luo S, Wang Z, Zhang Q. An inequality for characteristic functions and its applications to uncertainty relations and the quantum zeno effect. *J Phys A-Math Gen*, 2002, 35: 5935–5941
- 21 Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L. Quantum limits to dynamical evolution. *Phys Rev A*, 2003, 67: 052109
- 22 Bekenstein J D. Energy cost of information transfer. *Phys Rev Lett*, 1981, 46: 623–626
- 23 Jones J, Vedral V, Ekert A, et al. How difficult is it to prepare a quantum state? *Nature*, 2000, 403: 869–871
- 24 Taddei M M, Escher B M, Davidovich L, et al. Quantum speed limit for physical processes. *Phys Rev Lett*, 2013, 110: 050402
- 25 Marvian I, Lidar D A. Quantum speed limits for leakage and decoherence. *Phys Rev Lett*, 2015, 115: 210402
- 26 Dou F Q, Fu L B, Liu J. High-fidelity fast quantum driving in nonlinear systems. *Phys Rev A*, 2014, 89: 012123
- 27 Pires D, Cianciaruso M, Céleri L, et al. Generalized geometric quantum speed limits. *Phys Rev X*, 2016, 6: 021031
- 28 Cai X, Zheng Y. Quantum dynamical speedup in a nonequilibrium environment. *Phys Rev A*, 2017, 95: 052104
- 29 Tian Z, Wang J, Fan H, et al. Relativistic quantum metrology in open system dynamics. *Sci Rep*, 2015, 5: 7946
- 30 Jones P J, Kok P. Geometric derivation of the quantum speed limit. *Phys Rev A*, 2010, 82: 022107
- 31 Zwierz M. Comment on “Geometric derivation of the quantum speed limit”. *Phys Rev A*, 2012, 86: 016101
- 32 Okuyama M, Ohzeki M. Comment on ‘energy-time uncertainty relation for driven quantum systems’. *J Phys A-Math Theor*, 2018, 51: 318001
- 33 Deffner S, Lutz E. Energy–time uncertainty relation for driven quantum systems. *J Phys A-Math Theor*, 2013, 46: 335302
- 34 Wu S, Yu C. Quantum speed limit for a mixed initial state. *Phys Rev A*, 2018, 98: 042132
- 35 Zhang Y J, Han W, Xia Y J, et al. Quantum speed limit for arbitrary initial states. *Sci Rep*, 2014, 4: 4890
- 36 Levitin L B, Toffoli T. Fundamental limit on the rate of quantum dynamics: The unified bound is tight. *Phys Rev Lett*, 2009, 103: 160502
- 37 Campaioli F, Pollock F A, Binder F C, et al. Tightening quantum speed limits for almost all states. *Phys Rev Lett*, 2018, 120: 060409
- 38 Bleu O, Malpuech G, Gao Y, et al. Effective theory of nonadiabatic quantum evolution based on the quantum geometric tensor. *Phys Rev Lett*, 2018, 121: 020401
- 39 Lang J, Frank B, Halimeh J C. Dynamical quantum phase transitions: A geometric picture. *Phys Rev Lett*, 2018, 121: 130603
- 40 Nagata K, Kuramitani K, Sekiguchi Y, et al. Universal holonomic quantum gates over geometric spin qubits with polarised microwaves. *Nat Commun*, 2018, 9: 3227
- 41 Nguyen H C, Nguyen H V, Gühne O. Geometry of Einstein-Podolsky-Rosen correlations. *Phys Rev Lett*, 2019, 122: 240401
- 42 Cui X D, Zheng Y. Geometric phases in non-Hermitian quantum mechanics. *Phys Rev A*, 2012, 86: 064104
- 43 Cui X D, Zheng Y. Unification of the family of garrison-wright's phases. *Sci Rep*, 2014, 4: 5813
- 44 Provost J P, Vallee G. Riemannian structure on manifolds of quantum states. *Commun Math Phys*, 1980, 76: 289–301
- 45 Samuel J, Bhandari R. General setting for berry's phase. *Phys Rev Lett*, 1988, 60: 2339–2342
- 46 Pancharatnam S. Generalized theory of interference and its applications. *Proc Ind Acad Sci*, 1956, 44: 398–417
- 47 Pati A K. Geometric phase, geometric distance and length of the curve in quantum evolution. *J Phys A-Math Gen*, 1992, 25: L1001–L1008
- 48 Gajdacz M, Das K K, Arlt J, et al. Time-limited optimal dynamics beyond the quantum speed limit. *Phys Rev A*, 2015, 92: 062106
- 49 Anandan J, Aharonov Y. Geometry of quantum evolution. *Phys Rev Lett*, 1990, 65: 1697–1700
- 50 Bengtsson I, Życzkowski K. *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*. Cambridge: Cambridge University Press, 2017
- 51 Sun S, Zheng Y. Distinct bound of the quantum speed limit via the gauge invariant distance. *Phys Rev Lett*, 2019, 123: 180403
- 52 Aharonov Y, Anandan J. Phase change during a cyclic quantum evolution. *Phys Rev Lett*, 1987, 58: 1593–1596

- 53 Berry M V. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proc R Soc Lond A*, 1984, 392: 45–57
- 54 Mukunda N, Simon R. Quantum kinematic approach to the geometric phase. I. General formalism. *Ann Phys*, 1993, 228: 205–268
- 55 Moiseyev N. Non-Hermitian Quantum Mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2011
- 56 Wong J. Results on certain non-Hermitian Hamiltonians. *J Math Phys*, 1967, 8: 2039–2042
- 57 Oh S, Hu X, Nori F, et al. Singularity of the time-energy uncertainty in adiabatic perturbation and cycloids on a Bloch sphere. *Sci Rep*, 2016, 6: 20824
- 58 Shanahan B, Chenu A, Margolus N, et al. Quantum speed limits across the quantum-to-classical transition. *Phys Rev Lett*, 2018, 120: 070401
- 59 Uzdin R, Kosloff R. Speed limits in Liouville space for open quantum systems. *Europhys Lett*, 2016, 115: 40003
- 60 Deffner S. Geometric quantum speed limits: A case for wigner phase space. *New J Phys*, 2017, 19: 103018
- 61 Sun Z, Dong H, Zheng Y. Fractional dynamics using an ensemble of classical trajectories. *Phys Rev E*, 2018, 97: 012132
- 62 Xu F, Martens C C, Zheng Y. Entanglement dynamics with a trajectory-based formulation. *Phys Rev A*, 2017, 96: 022138
- 63 Xu F, Wang L, Martens C C, et al. H₂O photodissociation in the first absorption band: Entangled trajectory molecular dynamics method. *J Chem Phys*, 2013, 138: 024103
- 64 Hu X, Sun S, Zheng Y. Quantum speed limit via the trajectory ensemble. *Phys Rev A*, 2020, 101: 042107
- 65 Breuer H, Petruccione F. The Theory of Open Quantum Systems. Oxford: Oxford University Press, 2002
- 66 Liu C, Xu Z Y, Zhu S. Quantum-speed-limit time for multiqubit open systems. *Phys Rev A*, 2015, 91: 022102
- 67 Zhang Y J, Han W, Xia Y J, et al. Classical-driving-assisted quantum speed-up. *Phys Rev A*, 2015, 91: 032112
- 68 Liu H B, Yang W L, An J H, et al. Mechanism for quantum speedup in open quantum systems. *Phys Rev A*, 2016, 93: 020105
- 69 Sun Z, Liu J, Ma J, et al. Quantum speed limits in open systems: Non-Markovian dynamics without rotating-wave approximation. *Sci Rep*, 2015, 5: 8444
- 70 Cimmarusti A D, Yan Z, Patterson B D, et al. Environment-assisted speed-up of the field evolution in cavity quantum electrodynamics. *Phys Rev Lett*, 2015, 114: 233602
- 71 Luo S. On survival probability of quantum states. *J Phys A-Math Gen*, 2005, 38: 2991–2995
- 72 Xu Z Y, Luo S, Yang W L, et al. Quantum speedup in a memory environment. *Phys Rev A*, 2014, 89: 012307
- 73 Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L. The role of entanglement in dynamical evolution. *Europhys Lett*, 2003, 62: 615–621
- 74 Batle J, Casas M, Plastino A, et al. Connection between entanglement and the speed of quantum evolution. *Phys Rev A*, 2005, 72: 032337
- 75 Borrás A, Casas M, Plastino A, et al. Entanglement and the lower bounds on the speed of quantum evolution. *Phys Rev A*, 2006, 74: 022326
- 76 Fröwis F. Kind of entanglement that speeds up quantum evolution. *Phys Rev A*, 2012, 85: 052127
- 77 Wu S, Zhang Y, Yu C, et al. The initial-state dependence of the quantum speed limit. *J Phys A*, 2015, 48: 045301
- 78 Bukov M, Sels D, Polkovnikov A. Geometric speed limit of accessible many-body state preparation. *Phys Rev X*, 2019, 9: 011034
- 79 Mo M, Wang J, Wu Y. Quantum speedup via engineering multiple environments. *Ann Phys*, 2017, 529: 1600221
- 80 Baumgratz T, Cramer M, Plenio M B. Quantifying coherence. *Phys Rev Lett*, 2014, 113: 140401
- 81 Marvian I, Spekkens R W, Zanardi P. Quantum speed limits, coherence, and asymmetry. *Phys Rev A*, 2016, 93: 052331
- 82 Chenu A, Beau M, Cao J, et al. Quantum simulation of generic many-body open system dynamics using classical noise. *Phys Rev Lett*, 2017, 118: 140403
- 83 Beau M, Kiukas J, Egusquiza I L, et al. Nonexponential quantum decay under environmental decoherence. *Phys Rev Lett*, 2017, 119: 130401
- 84 Hou S C, Liang S L, Yi X X. Non-Markovianity and memory effects in quantum open systems. *Phys Rev A*, 2015, 91: 012109
- 85 Villamizar D V, Duzzioni E I. Quantum speed limit for a relativistic electron in a uniform magnetic field. *Phys Rev A*, 2015, 92: 042106
- 86 Dong S, Wang K, Zhang Y, et al. Quantum speed limit for relativistic spin-0 and spin-1 bosons on commutative and noncommutative planes. *Adv High Energy Phys*, 2017, 2017: 4739596
- 87 Hama A, Markopoulou F, Prémont-Schwarz I, et al. Lieb-robinson bounds and the speed of light from topological order. *Phys Rev Lett*, 2009, 102: 017204
- 88 Hou L, Shao B, Wei Y, et al. Quantum speed limit of the evolution of the qubits in a finite xy spin chain. *Eur Phys J D*, 2017, 71: 22
- 89 Hou L, Shao B, Wei Y B, et al. Quantum speed limit in a qubit-spin-bath system. *J Phys A-Math Theor*, 2015, 48: 495302
- 90 Song Y J, Kuang L M, Tan Q S. Quantum speedup of uncoupled multiqubit open system via dynamical decoupling pulses. *Quantum Inf Process*, 2016, 15: 2325–2342
- 91 Zhang X M, Cui Z W, Wang X, et al. Automatic spin-chain learning to explore the quantum speed limit. *Phys Rev A*, 2018, 97: 052333
- 92 Zhang Y J, Han W, Xia Y J, et al. Role of initial system-bath correlation on coherence trapping. *Sci Rep*, 2015, 5: 13359
- 93 Xu Z Y, Zhu S Q. Quantum speed limit of a photon under non-Markovian dynamics. *Chin Phys Lett*, 2014, 31: 020301
- 94 Hou L, Shao B, Zou J. Quantum speed limit for a central system in Lipkin-Meshkov-Glick bath. *Eur Phys J D*, 2016, 70: 35
- 95 Yu W J, Wei Y B, Li H, et al. Quantum speed limit for dynamics of central spin model with initial system-bath correlations. *Int J Theor Phys*,

2016, 55: 4785–4797

- 96 Wei Y B, Zou J, Wang Z M, et al. Quantum speed limit and a signal of quantum criticality. [Sci Rep](#), 2016, 6: 19308
- 97 Xu Z Y. Detecting quantum speedup in closed and open systems. [New J Phys](#), 2016, 18: 073005
- 98 Brody D C, Longstaff B. Evolution speed of open quantum dynamics. [Phys Rev Res](#), 2019, 1: 033127
- 99 Campaioli F, Pollock F A, Modi K. Tight, robust, and feasible quantum speed limits for open dynamics. [Quantum](#), 2019, 3: 168
- 100 Okuyama M, Ohzeki M. Quantum speed limit is not quantum. [Phys Rev Lett](#), 2018, 120: 070402
- 101 Deffner S. Quantum speed limits and the maximal rate of information production. [Phys Rev Res](#), 2020, 2: 013161
- 102 Denzler T, Lutz E. Efficiency fluctuations of a quantum heat engine. [Phys Rev Res](#), 2020, 2: 032062
- 103 Wang R, Wang J, He J, et al. Performance of a multilevel quantum heat engine of an ideal N-particle Fermi system. [Phys Rev E](#), 2012, 86: 021133

Summary for “量子速度极限研究进展”

Advances on quantum speed limit

Shuning Sun & Yujun Zheng*

Department of Physics, Shandong University, Jinan 250100, China

* Corresponding author, E-mail: yzheng@sdu.edu.cn

As one of the fundamental questions, quantum speed limit (QSL) is of vital role in the community of quantum physics, which sets the ultimate, maximal speed with which a quantum system can evolve. QSL originated from the understanding of the Heisenberg uncertainty relation. In 1945, Mandelstam and Tamm found the time Δt in the celebrated relation $\Delta E \Delta t \geq \hbar$ could be thought as the minimum time that a quantum system needs to evolve from an initial state to the orthogonal state for unitary evolution. QSL sets the lower bound of the evolution. They established the relationship between the minimum evolution time (τ_{QSL}) and the energy uncertainty of the system (ΔE), namely $\tau_{\text{QSL}} = \pi \hbar / (2 \Delta E)$, the Mandelstam-Tamm (MT) bound. Later, Margolus and Levitin derived another different bound for a closed system which connected the τ_{QSL} with the average energy of the system ($\langle E \rangle$), i.e., $\tau_{\text{QSL}} = \pi \hbar / (2 \langle E \rangle)$, the Margolus-Levitin (ML) bound. Combining the MT and ML bounds together, we can have a unified bound for a unitary system and orthogonal states.

In the case of open system dynamics, because there is energy and/or coherence exchange between the system and the environment, the orthogonal final state of the initial state can hardly be reached any longer. An investigation of the QSL on non-unitary quantum evolution needs to be considered. The generalized QSLs are established by employing the distance between the distinguishable states. Different metrics define different distances, leading to different QSL bounds. We show a few typical generalized QSL bounds based on different metrics. And the unified QSL bound for non-unitary evolution is obtained by combining the generalized MT and ML bounds under the same metric. The generations and developments of QSL have successfully generalized the MT bounds. Even the ML bounds have been attempted to generalize, the current studies of ML bound are thought as the significantly harder task, and keep as the open questions.

The influences of external environment and quantum system dynamics which include the role of entanglement in QSL for open dynamics and many-body systems, the relation between the maximum interaction speed and QSL in quantum spin systems, the non-Markovianity effect of the environment on accelerating the speed of evolution have been investigated.

Furthermore, by employing the gauge invariant distance in the Riemannian metric, we establish a distinct QSL bound, which relates the quantum speed limit time to the geometry phase, and presents the geometric and gauge invariant properties of it. The bound shows the impacts of the transmission modes of the state vectors on the evolution path in the manifold. Different from the established MT and ML bounds, our bound establishes the relation between the QSL and the Pancharatnam connection 1-form, and our results show that the QSL can be controlled via manipulating the generalized Pancharatnam connection. Also, our results of QSL are holonomy via the generalized Pancharatnam connection, which show us a possible technique to speed up the holonomic quantum computation. The bound is also interesting to the metrology and non-equilibrium thermodynamics, etc.

QSL has also been studied in the quantum representation of Wigner function. In the future research of quantum speed limit, there are many issues that need to be considered, such as the generalized ML bound, the unified QSL bound under different metrics, the application of maximum rate of quantum information derived from the QSL, and the relation between the quantum speed limit and the quantum heat engine, etc.

quantum speed limit, Mandelstam-Tamm bound, Margolus-Levitin bound, geometric metric, gauge invariant properties

doi: [10.1360/TB-2020-1430](https://doi.org/10.1360/TB-2020-1430)