求解两类 Maxwell 方程组棱元离散系统的快速算法和自适应方法

钟柳强^{①②}

① 华南师范大学数学科学学院, 广州 510631;

② 湘潭大学数学与计算科学学院, 湘潭 411105

E-mail: zhong@scnu.edu.cn

指导教师: 许进超 Center for Computational Mathematics and Applications and Department of Mathematics,
Pennsylvania State University

舒 适 湘潭大学数学与计算科学学院

收稿日期: 2012-11-21; 接受日期: 2013-03-28

国家自然科学基金 (批准号: 11201159) 和全国博士学位论文作者专项资金 (批准号: 201212) 资助项目, 本学位论文荣获 “2011 年全国优秀博士学位论文”

摘要 Maxwell 方程组棱元离散系统的快速算法和自适应方法是当前计算电磁场中的研究热点和难点. 首先, 针对 $H(\text{curl})$ 椭圆方程组的棱元离散系统, 通过建立棱元空间的稳定性分解, 设计了相应的快速迭代法和高效预条件子, 并且证明了迭代算法的收敛率和预条件子的条件数均不依赖于模型参数和网格规模. 其次, 针对时谐 Maxwell 方程组的棱有限元方法, 利用离散的 Helmholtz 分解, 连续散度为零函数对离散散度为零函数的逼近性和对偶论证, 获得了在 L^2 和 $H(\text{curl})$ 范数下的拟最优误差估计. 进而设计和分析了相应的两网格法. 最后, 分别针对变系数 $H(\text{curl})$ 椭圆方程组和不定谐 Maxwell 方程组, 考虑了一种不需要标记振荡项和加密单元不需要满足 “内节点” 性质的自适应棱有限元法 (AEFEM), 并证明了 AEFEM 的收敛性. 进一步, 当初始网格和 Dörfler 标记策略参数满足一定的假设条件时, 利用 AEFEM 的收敛性、误差的整体下界和局部上界估计, 证明了 AEFEM 的拟最优复杂性.

关键词 Maxwell 方程组 快速算法 自适应有限元法 高阶棱有限元 最优误差估计 拟最优复杂性

MSC (2010) 主题分类 65N30, 35Q60

前言

本文是钟柳强^[1]的博士毕业论文的一个简要介绍, 由于篇幅限制, 此处只是给出主要的理论结果, 而略去所有证明过程、数值算例和图表, 有兴趣的读者请参看原文. 文中关于 $H(\text{curl})$ 椭圆方程组高阶棱元离散系统的快速算法的结果最早发表于文献 [2]. 关于时谐 Maxwell 方程组的棱有限元方法的拟最优误差估计可参见文献 [3], 而关于变系数 $H(\text{curl})$ 椭圆方程组和不定谐 Maxwell 方程组的自适应棱有限元法可参见文献 [4, 5]. 在完成博士论文之后, 我们继续在求解时谐 Maxwell 方程组棱有限元方法的两网格法和相应的迭代法等方面进行了相关的研究, 可参见文献 [6].

英文引用格式: Zhong L Q. Fast algorithms of edge element discretizations and adaptive finite element methods for two classes of Maxwell equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2013, 43: 333–344, doi: 10.1360/012013-94

1 研究背景

电磁场的研究及应用已经影响到科学技术的各个领域, 其中计算电磁场为解决实际电磁场工程中越来越复杂的建模与仿真、优化设计等问题提供了新的重要研究手段.

Nédélec 棱有限元方法是求解 Maxwell 方程组的一种基本离散化方法, 它在工程应用领域得到了越来越广泛的应用. 但是 Maxwell 方程组棱有限元离散系统通常是大规模且高度病态, 因此构造其快速求解算法非常重要. 关于 $H(\text{curl})$ 椭圆方程组棱元离散系统的快速算法, 大部分研究工作是针对第一类线性棱元方程展开. 而高阶棱有限元在某些时候比线性棱元更具有优势, 因此, 研究 $H(\text{curl})$ 椭圆方程组高阶棱有限元离散系统的快速求解算法是十分必要的. 在时谐 Maxwell 方程组的棱有限元方法的误差估计方面, 虽然已有较多的研究工作, 但是关于 L^2 模下的最优误差估计仍然不是很完善. 两网格法最早由 Xu^[7] 在 20 世纪 90 年代针对不定或非对称椭圆边值问题提出, 但是将其应用于时谐 Maxwell 方程组存在一些本质上的困难, 原因是算子 curl 具有非常大的核空间.

与此同时, 在实际应用问题中, 有许多因素可能对电磁场传播产生强奇性. 自适应方法可以根据解的性态来进行网格点的自动分布, 从而达到用最小的计算量获得最大的计算精度. 近 20 年来, 自适应方法在电磁场的工程模拟方面得到了广泛的应用, 但是关于算法收敛性的理论分析方面, 只有少量的研究工作, 而文献 [5] 首次给出了电磁场自适应方法拟最优复杂性分析这一方面的研究工作.

2 预备知识

假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是一个有界 Lipschitz 区域, $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$ 是其边界 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量. 引入函数空间 $H(\text{curl}; \Omega) = \{\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^3 \mid \nabla \times \mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^3\}$, $H_0(\text{curl}; \Omega) = \{\mathbf{u} \in H(\text{curl}; \Omega) \mid \mathbf{n} \times \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}\}$, 其相应的范数为 $\|\mathbf{u}\|_{H(\text{curl}; \Omega)} = (\|\mathbf{u}\|_0^2 + \|\nabla \times \mathbf{u}\|_0^2)^{1/2}$, $\|\cdot\|_0$ 表示 $(L^2(\Omega))^3$ 中的范数.

设 $\mathcal{T}_h$ 为 Ω 的四面体剖分, 其中 $h = \max_{\tau \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(\tau)$, $\text{diam}(\tau)$ 为剖分单元 $\tau \in \mathcal{T}_h$ 的外接圆的直径. 我们总假设 $\mathcal{T}_h$ 是协调的, 即每个剖分单元的顶点和棱不能落在其他剖分单元的内部或棱的内部.

引入 H^1 型的协调有限元空间:

$$\tilde{S}_h^k = \{p_h \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \mid p_h|_{\tau} \in \mathcal{P}_k, \forall \tau \in \mathcal{T}_h\}, \quad S_h^k = \{p_h \in \tilde{S}_h^k, p_h|_{\partial\Omega} = 0\},$$

及第一和第二类 Nédélec 棱有限元空间:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_h^{k,1} &= \{\mathbf{v} \in H(\text{curl}; \Omega) \mid \mathbf{v}|_{\tau} \in \mathcal{R}_k, \forall \tau \in \mathcal{T}_h\}, \quad V_h^{k,1} := \tilde{V}_h^{k,1} \cap H_0(\text{curl}; \Omega), \\ \tilde{V}_h^{k,2} &= \{\mathbf{v} \in H(\text{curl}; \Omega) \mid \mathbf{v}|_{\tau} \in (\mathcal{P}_k)^3, \forall \tau \in \mathcal{T}_h\}, \quad V_h^{k,2} := \tilde{V}_h^{k,2} \cap H_0(\text{curl}; \Omega), \end{aligned}$$

其中 $\mathcal{R}_k = (\mathcal{P}_{k-1})^3 \oplus \{\mathbf{p} \in (\tilde{\mathcal{P}}_k)^3 \mid \mathbf{p}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = 0\}$, $\mathcal{P}_k$ 次数不超过 k 的多项式的集合, $\tilde{\mathcal{P}}_k$ 为 k 次齐次多项式的集合.

3 $H(\text{curl})$ 椭圆方程组棱元离散系统的快速算法

考虑如下 $H(\text{curl})$ 椭圆方程组:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \tau \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{n}_{\partial\Omega} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \quad (3.2)$$

其中常数 $\tau > 0$, $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^3$ 为已知函数.

方程组 (3.1) 和 (3.2) 可以用于描述计算电磁场中的模拟涡流模型, 而且当计算电磁场在时间离散上采用隐格式时, 它也可以描述模拟时域的电磁场, 其等价变分问题为: 求 $\mathbf{u} \in H_0(\text{curl}; \Omega)$, 满足

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{0;\Omega}, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0(\text{curl}; \Omega), \quad (3.3)$$

其中

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{u} \cdot \nabla \times \mathbf{v} + \tau \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{x}. \quad (3.4)$$

注意到 $a(\cdot, \cdot)$ 是对称正定的, 故由其可定义能量范数 $\|\mathbf{v}\|_A^2 := a(\mathbf{v}, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in H_0(\text{curl}; \Omega)$.

(3.3) 所对应的 Nédélec 棱元离散变分问题为: 求 $\mathbf{u}_h^{k,l} \in V_h^{k,l} (k \geq 1, l = 1, 2)$, 满足

$$a(\mathbf{u}_h^{k,l}, \mathbf{v}_h^{k,l}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h^{k,l})_{0;\Omega}, \quad \forall \mathbf{v}_h^{k,l} \in V_h^{k,l}, \quad (3.5)$$

其中双线性形式 $a(\cdot, \cdot)$ 由 (3.4) 所定义. 记与之相对应的离散代数系统为

$$A_h^{k,l} U_h^{k,l} = F_h^{k,l}.$$

接下来, 将分别给出第一和第二类 Nédélec 棱元空间的稳定性分解, 该分解对构造和分析求解上述离散系统的快速算法起着非常重要的作用.

引理 1 对任意 $\mathbf{u}_h^{k+1,1} \in V_h^{k+1,1}$, 存在 $\sum_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}(k+1,1)} \mathbf{v}_{\mathbf{b}} \in V_h^{k+1,1}$, $\mathbf{v}_{\mathbf{b}} \in \text{Span}\{\mathbf{b}\}$, $\mathbf{u}_h^{k,2} \in V_h^{k,2}$, 满足

$$\mathbf{u}_h^{k+1,1} = \sum_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}(k+1,1)} \mathbf{v}_{\mathbf{b}} + \mathbf{u}_h^{k,2},$$

和

$$\left(\sum_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}(k+1,1)} \|\mathbf{v}_{\mathbf{b}}\|_A^2 + \|\mathbf{u}_h^{k,2}\|_A^2 \right)^{1/2} \leq \tilde{c}_0 \|\mathbf{u}_h^{k+1,1}\|_A,$$

其中 $\mathcal{B}(k+1,1)$ 表示空间 $V_h^{k+1,1}$ 基函数的全体常数 $\tilde{c}_0$ 仅依赖于区域 Ω 和网格 $\mathcal{T}_h$ 的形状正则.

引理 2 对任意 $\mathbf{u}_h^{k,2} \in V_h^{k,2}$, 存在 $\mathbf{u}_h^{k,1} \in V_h^{k,1}$, $p_h \in S_h^{k+1}$, 满足 $\mathbf{u}_h^{k,2} = \mathbf{u}_h^{k,1} + \nabla p_h$ 和

$$(\|\mathbf{u}_h^{k,1}\|_A^2 + \|\nabla p_h\|_A^2)^{1/2} \leq c_0 \|\mathbf{u}_h^{k,2}\|_A,$$

其中常数 c_0 仅依赖于区域 Ω 和网格 $\mathcal{T}_h$ 的形状正则.

3.1 两水平迭代法

首先给出求解第一类 Nédélec 棱元离散变分问题的迭代算法: 求 $\mathbf{u}_h^{k+1,1} \in V_h^{k+1,1} (k \geq 1)$, 满足

$$a(\mathbf{u}_h^{k+1,1}, \mathbf{v}_h^{k+1,1}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h^{k+1,1}), \quad \forall \mathbf{v}_h^{k+1,1} \in V_h^{k+1,1}. \quad (3.6)$$

算法 1 给定初值 $\mathbf{u}_h^0 \in V_h^{k+1,1}$. 假设 $\mathbf{u}_h^{l-1,1} \in V_h^{k+1,1} (l \geq 1)$ 已求得, 则通过如下方式得到 $\mathbf{u}_h^{l,1} \in V_h^{k+1,1}$.

(1) 前磨光: 以 $\mathbf{u}_h^{l-1,1}$ 为初值对 (3.6) 调用 m_1 次 Gauss-Seidel 磨光, 得到 $\mathbf{u}_N^{(m_1)}$.

(2) 粗空间校正: $\mathbf{u}^{l,2} = \mathbf{u}_N^{(m_1)} + \mathbf{e}_0^l$, 其中 $\mathbf{e}_0^l \in V_h^{k,2}$ 满足

$$a(\mathbf{e}_0^l, \mathbf{v}_h^{1,2}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h^{1,2}) - a(\mathbf{u}_N^{(m_1)}, \mathbf{v}_h^{1,2}), \quad \forall \mathbf{v}_h^{k,2} \in V_h^{k,2}. \quad (3.7)$$

(3) 后磨光: 以 $\mathbf{u}^{l,2}$ 为初值对 (3.6) 调用 m_2 次 Gauss-Seidel 磨光, 得到 $\mathbf{u}_h^{l,1}$.

上述算法的基本思想是首先在原空间 $V_h^{k+1,1}$ 上对 (3.6) 做 G-S 磨光, 然后通过求解其在子空间 $V_h^{k,2}$ 上的限制残量方程 (3.7), 得到校正解 $\mathbf{u}^{l,2}$, 再做后磨光. 从而本质性地将 $V_h^{k+1,1}$ 上原变分问题的求解转化为其子空间 $V_h^{k,2}$ 上变分子问题的求解.

其次给出求解第二类 Nédélec 棱元方程的迭代算法: 求 $\mathbf{u}_h^{k,2} \in V_h^{k,2}$ ($k \geq 1$), 满足

$$a(\mathbf{u}_h^{k,2}, \mathbf{v}_h^{k,2}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h^{k,2}), \quad \forall \mathbf{v}_h^{k,2} \in V_h^{k,2}.$$

算法 2 给定初值 $\mathbf{u}_h^0 \in V_h^{k,2}$. 假设 $\mathbf{u}_h^{l-1,2} \in V_h^{k,2}$ ($l \geq 1$) 已求得, 则通过如下方式得到 $\mathbf{u}_h^{l,2} \in V_h^{k,2}$.

(1) 求 $\mathbf{e}_g^{l,1} \in \nabla S_h^{k+1}$ 满足如下方程:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{e}_g^{l,1}, \nabla q_h) &= (\mathbf{f}, \nabla q_h) - a(\mathbf{u}_h^{l-1,2}, \nabla q_h), \quad \forall q_h \in S_h^{k+1}, \\ \mathbf{u}_{h,1}^{l,1} &= \mathbf{u}_h^{l-1,2} + \mathbf{e}_g^{l,1}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

(2) 求 $\mathbf{e}_h^{l,2} \in V_h^{k,1}$, 满足如下方程:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{e}_h^{l,2}, \mathbf{v}_h^1) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h^1) - a(\mathbf{u}_h^{l,1}, \mathbf{v}_h^1), \quad \forall \mathbf{v}_h^1 \in V_h^{k,1}, \\ \mathbf{u}_h^{l,2} &= \mathbf{u}_{h,1}^{l,1} + \mathbf{e}_h^{l,2}. \end{aligned}$$

上述算法的基本思想是先在原空间 $V_h^{k,2}$ 在微分算子 curl 的核空间 $\mathbf{S}_h^{k+1}$ 上求解 (3.6) (易证它等价于求解一个高阶椭圆有限元方程). 然后通过求解其在子空间 $V_h^{k,1}$ 上的限制残量方程 (3.7), 得到校正解. 从而本质性地将 $V_h^{k,2}$ 上原变分问题的求解转化为其子空间 $V_h^{k,1}$ 上变分子问题的求解.

利用引理 1 和 2 及文献 [8] 中关于连续子空间校正法收敛性分析的抽象框架, 可证得如下结论.

定理 3 假设 $\mathcal{T}_h$ 为 Ω 的形状正则的四面体剖分, 则算法 1 和 2 的迭代收敛率 η_1 和 η_2 分别满足 $\eta_1 < 1$, $\eta_2 < 1$, 其中上述常数 η_1 和 η_2 均不依赖于模型参数 τ 及网格规模尺寸 h .

3.2 基于辅助空间预条件子的预条件子

注意到 $A_h^{k,l}$ 满足对称正定性, 故将为预条件共轭梯度法 (PCG) 构造高效预条件子. 下面将分别针对第一和第二类高阶棱元离散系统构造相应的预条件子, 并给出相应的条件数估计.

首先, 关于 $A_h^{k+1,1}$, 构造如下预条件子:

$$B_h^{k+1,1} = \bar{B}_1 + B_h^{k,2},$$

其中 $\bar{B}_1$ 和 $B_h^{k,2}$ 分别是矩阵 $A_h^{k+1,1}$ 中对角阵和 $A_h^{k,2}$ 的预条件子.

在实际应用中, 我们将 $\bar{B}_1$ 选为关于 $A_h^{k+1,1}$ 的 Jacobi (或 Gauss-Seidel) 磨光算子.

其次, 关于 $A_h^{k,2}$, 构造如下预条件子:

$$B_h^{k,2} = B_h^{k,1} + \text{grad} \bar{B}_2 \text{grad}^*,$$

其中 $B_h^{k,1}$ 和 $\bar{B}_2$ 分别是 $A_h^{k,1}$ 和 $\bar{A}_2$ 的预条件子, $\bar{A}_2$ 由 $(\bar{A}_2 \bar{u}_2, \bar{v}_2)_{0;\Omega} = \tau(\nabla \bar{u}_2, \nabla \bar{v}_2), \forall \bar{u}_2, \bar{v}_2 \in S_h^{k+1}$ 所定义. 在实际应用中, 我们取 $\bar{B}_2$ 为 H^1 型高阶 Lagrange 有限元方程的最新代数多层网格法.

利用引理 1 和 2 及文献 [9] 中关于基于辅助空间的加性预条件子的抽象框架, 可证得如下结论 (本文除特殊的常数外, 为了避免重复使用一般的常数记号, 采用记号 “ $\lesssim$ ”, 即当存在正常数 C , 满足 $x_1 \leq C y_1$ 时, 则简记为 $x_1 \lesssim y_1$):

$$\kappa(B_h^{k+1,1} A_h^{k+1,1}) \lesssim \kappa(B_h^{k,2} A_h^{k,2}), \quad \kappa(B_h^{k,2} A_h^{k,2}) \lesssim \kappa(B_h^{k,1} A_h^{k,1}),$$

其中 $\kappa(A)$ 表示 A 的谱条件数, 上述常数均不依赖于模型参数 τ 及网格规模 h .

由上述结论可知, 通过利用 Jacobi (或 Guass-Seild) 磨光, 我们可以把 $k+1$ 阶第一类 Nédélec 棱元方程组的预条件子的构造转换为 k 阶第二类 Nédélec 棱元方程组的预条件子的构造. 然后, 通过在第二类 Nédélec 棱元中的关于算子 curl 的核空间中解一个二阶椭圆方程, 我们又可以将后者转化为 k 阶第一类 Nédélec 棱元方程组的预条件子的构造. 注意到关于 $A_h^{1,1}$ 已经有了众多高效预条件子, 故通过上述递归的方式, 证明了我们为一般高阶棱元方程组所构造的预条件子的条件数 $\kappa(B_h^{k,l} A_h^{k,l})$ ($k > 1, l = 1, 2$) 是一致有界的, 且不依赖于模型参数 τ 及网格规模 h .

4 时谐 Maxwell 方程组棱有限元法的误差估计和两网格法

考虑如下时谐 Maxwell 方程组:

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) - \omega^2 (\epsilon + i\sigma/\omega) \mathbf{E} = \mathbf{F}, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{n}_{\partial\Omega} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上}, \quad (4.2)$$

其中 $\mathbf{E}$ 表示电场, μ 表示导磁率, $\omega > 0$ 表示波数, $i = \sqrt{-1}$, ϵ 和 σ 分别表示 Ω 内的齐次、各向同性材料的介电常数和电导率, $\mathbf{F} = i\omega \mathbf{J}$, $\mathbf{J}$ 表示感生电流强度.

μ 和 ϵ 一般为正定函数, σ 在导体部分为正定函数, 在绝缘体部分为零. 为简单起见, 假设 $\mu = 1$, $\alpha := \omega^2 \epsilon \in \mathbb{R}$, $\beta := \omega \sigma \in \mathbb{R}$, 其中 ϵ 和 σ 是常数. 同时, 还假设 $\mathbf{F} \in (L^2(\Omega))^3$.

注 1 当 $\epsilon = 0$ 时, 方程组 (4.1) 和 (4.2) 描述了时谐涡流模型; 当 $\sigma = 0$ 时, 方程组 (4.1) 和 (4.2) 描述了无损情形下的时谐 Maxwell 方程组, 通常也称之为不定时谐 Maxwell 方程组.

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \alpha \mathbf{E} = \mathbf{F}, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{n}_{\partial\Omega} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上}, \quad (4.4)$$

此时, α 是实数, $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{F}$ 也是实函数.

方程组 (4.1) 和 (4.2) 的变分问题为: 求 $\mathbf{E} \in H_0(\text{curl}; \Omega)$, 满足

$$\hat{a}(\mathbf{E}, \boldsymbol{\psi}) = (\mathbf{F}, \boldsymbol{\psi})_{0;\Omega}, \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in H_0(\text{curl}; \Omega), \quad (4.5)$$

其中

$$\hat{a}(\mathbf{E}, \boldsymbol{\psi}) = (\nabla \times \mathbf{E}, \nabla \times \boldsymbol{\psi})_{0;\Omega} - ((\alpha + i\beta) \mathbf{E}, \boldsymbol{\psi})_{0;\Omega}. \quad (4.6)$$

为了保证变分问题 (4.5) 的适定性, 我们总是作如下两个假设:

$$\beta > 0, \quad \text{在 } \bar{\Omega} \text{ 内}, \quad (4.7)$$

或

$$\beta = 0 \text{ 且 } \alpha \text{ 不是方程组 (4.3) 和 (4.4) 的特征值.} \quad (4.8)$$

令 V_h 表示 $V_h^{k,1}$ (或 $V_h^{k,2}$). 现在我们给出 (4.5) 的离散变分问题: 求 $\mathbf{E}_h \in V_h$, 满足

$$\hat{a}(\mathbf{E}_h, \boldsymbol{\psi}_h) = (\mathbf{f}, \boldsymbol{\psi}_h)_{0;\Omega}, \quad \forall \boldsymbol{\psi}_h \in V_h, \quad (4.9)$$

其中 $\hat{a}(\cdot, \cdot)$ 由 (4.6) 定义.

4.1 最优误差估计

利用离散的 Helmholtz 分解, 连续散度为零函数对离散散度为零函数的逼近性和对偶论证, 可获得如下误差估计.

定理 4 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是一个带有连通边界的有界 Lipschitz 多面体区域, $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{E}_h$ 分别是变分问题 (4.5) 和 (4.9) 的解, 且 (4.7) 或 (4.8) 成立, 则存在一个常数 $\delta \in (1/2, 1]$, 及一个不依赖于 h , $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{E}_h$ 的常数 $h_0 > 0$, 使得对一切的 $h < h_0$, 有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E} - \mathbf{E}_h\|_{0;\Omega} &\lesssim \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} (\|\mathbf{E} - \mathbf{v}_h\|_{0;\Omega} + h^\delta \|\nabla \times (\mathbf{E} - \mathbf{v}_h)\|_{0;\Omega}), \\ \|\mathbf{E} - \mathbf{E}_h\|_{\text{curl};\Omega} &\lesssim \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{E} - \mathbf{v}_h\|_{\text{curl};\Omega}, \end{aligned}$$

其中上述常数仅依赖于区域 Ω 、网格形状正则参数、系数 α 和 β . 特别地, 当 Ω 是凸域时, $\delta = 1$.

推论 5 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是一个带有连通边界的有界 Lipschitz 多面体区域, (4.7) 或 (4.8) 成立, $1 \leq s \leq k$, $\mathbf{E} \in (H^{s+1}(\Omega))^3$ 和 $\mathbf{E}_h \in V_h^{k,2}$ 分别是变分问题 (4.5) 和 (4.9) 的解, 则存在一个常数 $\delta \in (1/2, 1]$, 及一个不依赖于 h , $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{E}_h$ 的常数 $h_0 > 0$, 使得对一切的 $h < h_0$, 有

$$\|\mathbf{E} - \mathbf{E}_h\|_{0;\Omega} \lesssim h^{s+\delta} \|\mathbf{E}\|_{s+1;\Omega}.$$

注 2 在推论 5 中的结论并不适用于第一类 Nédélec 棱元空间 $V_h^{k,1}$.

4.2 两网格法

假设有两个正则的满足嵌套性的四面体网格剖分 $\mathcal{T}_h$ 和 $\mathcal{T}_H$, 其中网格尺寸 h 和 H 满足 $h \ll H$.

算法 3 (两网格法)

(1) 求 $\mathbf{E}_H \in V_H^{k,2}$, 满足

$$\hat{a}(\mathbf{E}_H, \boldsymbol{\psi}_H) = (\mathbf{f}, \boldsymbol{\psi}_H), \quad \forall \boldsymbol{\psi}_H \in V_H^{k,2}.$$

(2) 求 $\mathbf{E}^h \in V_h^{k,2}$, 满足

$$a(\mathbf{E}^h, \boldsymbol{\psi}_h) = (\mathbf{f}, \boldsymbol{\psi}_h) + N(\mathbf{E}_H, \boldsymbol{\psi}_h), \quad \forall \boldsymbol{\psi}_h \in V_h^{k,2},$$

其中 $a(\mathbf{E}, \boldsymbol{\psi}) = (\nabla \times \mathbf{E}, \nabla \times \boldsymbol{\psi}) + (\mathbf{E}, \boldsymbol{\psi})$, $N(\mathbf{E}, \boldsymbol{\psi}) = \hat{a}(\mathbf{E}, \boldsymbol{\psi}) - a(\mathbf{E}, \boldsymbol{\psi})$.

注意到在上述算法中, 只是在粗网格上的有限元空间 $V_H^{k,2}$ 中求解原不定问题, 然后在细网格上的有限元空间 $V_h^{k,2}$ 中求解一个相应的对称正定问题. 注意到 $h \ll H$, 因此不定问题只是在一个较小的规模下求解, 从而其计算代价可以忽略, 而对称正定问题已经有了非常好的求解算法 (如多层网格法

和预条件子技术). 与此同时, 上述算法只能用于第二类棱有限元空间, 原因是第一类棱有限元解与真解的 L^2 误差阶要比第二类棱有限元解与真解的 L^2 误差阶要低.

下面的定理给出了算法 3 的收敛性.

定理 6 假设 $\mathbf{E} \in (H^{s+1}(\Omega))^3$ 是变分问题 (4.5) 的解. 令 $\mathbf{E}^h$ 和 $\mathbf{E}_h \in V_h^{k,2}$ 分别是算法 3 和变分问题 (4.9) 的解, 则存在常数 $\delta \in (1/2, 1]$ 和 $h_0 > 0$, 使得对一切的 $h < h_0$, 有

$$\|\mathbf{E}_h - \mathbf{E}^h\|_{\text{curl};\Omega} \lesssim H^{s+\delta} \|\mathbf{E}\|_{s+1;\Omega}, \quad \|\mathbf{E} - \mathbf{E}^h\|_{\text{curl};\Omega} \lesssim (h^s + H^{s+\delta}) \|\mathbf{E}\|_{s+1;\Omega},$$

其中上述不等式中的常数仅依赖于区域 Ω 、网格形状正则参数、系数 α 和 β .

5 两类 Maxwell 方程组的自适应棱有限元法

首先给出抽象变分问题和自适应棱有限元法的流程. 设 $\mathcal{T}$ 是区域 Ω 的一个形状正则的四面体网格剖分, 令 $\mathbb{V}(\mathcal{T})$ 表示 Nédélec 棱元空间 $V_{h\mathcal{T}}^{l,1}$ 或 $V_{h\mathcal{T}}^{l,2}$. 考虑求解离散变分问题: 对于给定的 $\mathbf{g} \in (L^2(\Omega))^3$, 求 $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T})$, 满足

$$\tilde{a}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = (\mathbf{g}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}})_{0;\Omega}, \quad \forall \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T}), \quad (5.1)$$

其中 $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$ 是定义在 $\mathbb{V}(\mathcal{T}) \times \mathbb{V}(\mathcal{T})$ 上的双线性形式, 并假设变分问题 (5.1) 是适定的.

下面给出一种采用局部加密方式的自适应棱有限元法的流程: 对于给定一个初始剖分 $\mathcal{T}_0$, 设通过局部加密, 可以得到一个嵌套的协调剖分序列 $\{\mathcal{T}_k\}_{k \geq 1}$, 其中, $\mathcal{T}_k \rightarrow \mathcal{T}_{k+1}$ 的循环过程为

$$\text{求解} \rightarrow \text{估计} \rightarrow \text{标记} \rightarrow \text{加密}, \quad (5.2)$$

其中迭代循环 (5.2) 中的每一个步骤如下:

(1) 求解: 对给定的函数 $\mathbf{g}$ 和网格剖分 $\mathcal{T}$, 设与变分问题 (5.1) 相应的棱有限元解 $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T})$ 可由模块 $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} = \text{SOLVE}(\mathcal{T}, \mathbf{g})$ 得到, 其中假设所求得的有限元解是精确的.

(2) 估计: 对于给定的网格剖分 $\mathcal{T}$. 对任意的 $\tau \in \mathcal{T}$ 和 $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T})$, 令 $\eta_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \tau)$ 表示在单元 $\tau \in \mathcal{T}$ 上关于 $\mathbf{v}_{\mathcal{T}}$ 的误差指示子. 对任意的一个单元集合 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{T}$, 定义 $\eta_{\mathcal{T}}^2(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \mathcal{M}) = \sum_{\tau \in \mathcal{M}} \eta_{\mathcal{T}}^2(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \tau)$. 特别当 $\mathcal{M} = \mathcal{T}$ 时, 采用简化记号 $\eta(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \mathcal{T}) := \eta_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \mathcal{T})$.

对于给定的网格剖分 $\mathcal{T}$ 及变分问题 (5.1) 相应的棱有限元解 $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T})$, 设关于 $\mathbf{u}_{\mathcal{T}}$ 和 $\mathcal{T}$ 的误差指示子可以由模块 $\eta^2(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathcal{T}) = \text{ESTIMATE}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathcal{T})$ 获得.

(3) 标记: 我们采用 Dörfler 标记策略, 即对于给定的网格剖分 $\mathcal{T}$, 误差指示子序列 $\{\eta_{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \tau)\}_{\tau \in \mathcal{T}}$ 和标记参数 $\theta \in (0, 1)$, 设满足 Dörfler 标记条件 $\eta_{\mathcal{T}}^2(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathcal{M}) \geq \theta \eta^2(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathcal{T})$ 的最小单元个数的标记集合 $\mathcal{M} \subset \mathcal{T}$ 由模块 MARK 得到.

(4) 加密: 关于网格的局部加密, 采用二分法. 给定一个被标记好的初始网格 $\mathcal{T}_0$ 和一种二分法, 定义 $\mathcal{C}(\mathcal{T}_0) = \{\mathcal{T} : \mathcal{T} \text{ 是协调网格而由 } \mathcal{T}_0 \text{ 是加密所获得}\}$. 加密所得到的网格剖分则记为 $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$. 对于给定的 $\mathcal{T}_k \in \mathcal{C}(\mathcal{T}_0)$ 和一个由所有被加以标记的单元所组成的子集合 $\mathcal{M}_k \subset \mathcal{T}_k$, 则由二分加密所得到的网格剖分 $\mathcal{T}_{k+1} \in \mathcal{C}(\mathcal{T}_0)$ 可以通过模块 $\mathcal{T}_{k+1} = \text{REFINE}(\mathcal{T}_k, \mathcal{M}_k)$ 得到. 注意至该模块由两部分构成, 第一部分把 $\mathcal{M}_k$ 中的标记单元按某一规则进行二分, 由此得到一个新的网格剖分 $\mathcal{T}'_{k+1}$, 一般而言, $\mathcal{T}'_{k+1} \neq \mathcal{T}_{k+1}$, 它可能包含悬点; 第二部分对 $\mathcal{T}'_{k+1}$ 利用二分法进行完备化 (消除悬点) 后, 得到所需要的加密网格剖分 $\mathcal{T}_{k+1}$.

本文假设所采的二分法总满足如下两个性质:

(B1) $\mathcal{C}(\mathcal{T}_0)$ 是形状正则的;

(B2) 存在一个仅依赖于初始网格 $\mathcal{T}_0$ 的常数 C_0 , 满足

$$\#\mathcal{T}_{k+1} - \#\mathcal{T}_0 \leq C_0 \sum_{j=0}^k \#\mathcal{M}_j.$$

综上, 我们可以通过如下子程序的形式给出自适应棱有限元法流程:

$[\mathbf{u}_J, \mathcal{T}_J] = \text{AEFEM}(\mathcal{T}_0, g, \text{tol}, \theta)$,

AEFEM 通过自适应棱有限元法计算得到一个有限元解 $\mathbf{u}_J$.

Input: 初始网格 $\mathcal{T}_0$, 已知数据 g , 迭代终止准则 tol , 给定 $\theta \in (0, 1)$.

Output: 有限元解 $\mathbf{u}_J$, 细网格 $\mathcal{T}_J$. $\eta = 1, k = 0$;

while $\eta \geq \text{tol}$

$k = k + 1$;

 SOLVE 在 $\mathcal{T}_k$ 上求解问题 (5.1), 得到解 $\mathbf{u}_k$;

 ESTIMATE 计算误差指示子 $\eta = \eta(\mathbf{u}_k, g, \mathcal{T}_k)$;

 MARK 标记满足 $\eta_{\mathcal{T}_k}^2(\mathbf{u}_k, \mathcal{M}_k) \geq \theta \eta^2(\mathbf{u}_k, \mathcal{T}_k)$ 的最小单元集合 $\mathcal{M}_k \subset \mathcal{T}_k$;

 REFINE 加密被标记单元 $\tau \in \mathcal{M}_k$ 及可能的污染单元以得到协调的网格 $\mathcal{T}_{k+1}$;

end

$\mathbf{u}_J = \mathbf{u}_k; \mathcal{T}_J = \mathcal{T}_k$.

注 3 上述算法在标记时不需要处理振荡项, 且在加密时不需要满足内节点性质.

5.1 变系数 $H(\text{curl})$ 椭圆方程组的自适应棱有限元法

考虑如下变系数 $H(\text{curl})$ 椭圆方程组:

$$\mathcal{L}\mathbf{u} := \nabla \times (\alpha \nabla \times \mathbf{u}) + \beta \mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad (5.3)$$

$$\mathbf{n}_{\partial\Omega} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上}, \quad (5.4)$$

其中 $\{\Omega_i\}_{i=1}^m$ 是 Ω 的一个非重叠的子区域剖分, $\alpha, \beta \in L^\infty(\Omega)$, $\alpha, \beta \in \prod_{i=1}^m W^{1,\infty}(\Omega_i)$ 且满足 $\alpha \geq \alpha_0 > 0$, $\beta \geq \beta_0 > 0$, α_0, β_0 是常数, $\mathbf{g} \in \prod_{i=1}^m H(\text{div}; \Omega_i)$.

方程组 (5.3) 和 (5.4) 的等价变分问题为: 求 $\mathbf{u} \in H_0(\text{curl}; \Omega)$, 满足

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{g}, \mathbf{v})_{0;\Omega}, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0(\text{curl}; \Omega), \quad (5.5)$$

其中 $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\alpha \nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v})_{0;\Omega} + (\beta \mathbf{u}, \mathbf{v})_{0;\Omega}$.

令 $\mathcal{T} \in \mathcal{C}(\mathcal{T}_0)$. 问题 (5.5) 的离散变分问题为: 求 $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T})$, 满足

$$a(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = (\mathbf{g}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}})_{0;\Omega}, \quad \forall \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T}). \quad (5.6)$$

采用如下后验误差指示子: 对于给定的 $\mathcal{T} \in \mathcal{C}(\mathcal{T}_0)$, 令 $\mathcal{F}(\mathcal{T})$ 表示 $\mathcal{T}$ 中有固定方向的内部面的集合. 对任意的面 $f \in \mathcal{F}(\mathcal{T})$, 不妨设 $\partial\tau_1 \cap \partial\tau_2 = f$, 其中 τ_1 和 τ_2 是 $\mathcal{T}$ 中单元, 且 τ_1 在面 f 上的外法向量与 f 的固定方向相一致, 定义标量 (或向量) 函数 w 在跨面 f 时的跳跃量为

$$[[w]] := w|_{\tau_1} - w|_{\tau_2}.$$

对任意的 $\tau \in \mathcal{T}$, $f \in \mathcal{F}(\mathcal{T})$ 和 $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T})$, 定义如下基于单元的残量和内部跨面的跳跃量:

$$\begin{aligned} R_1(\mathbf{v}_{\mathcal{T}})|_{\tau} &:= \mathbf{g}|_{\tau} - \mathcal{L}\mathbf{v}_{\mathcal{T}}|_{\tau}, \quad R_2(\mathbf{v}_{\mathcal{T}})|_{\tau} := \nabla \cdot (\mathbf{g}|_{\tau} - \beta\mathbf{v}_{\mathcal{T}}|_{\tau}), \\ J_1(\mathbf{v}_{\mathcal{T}})|_f &:= [(\alpha \nabla \times \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) \times \mathbf{n}_f], \quad J_2(\mathbf{v}_{\mathcal{T}})|_f := [(\mathbf{g} - \beta\mathbf{v}_{\mathcal{T}}) \cdot \mathbf{n}_f]. \end{aligned}$$

令 $h_{\tau} := |\tau|^{1/3}$. 定义关于有限元函数 $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T})$ 在单元 $\tau \in \mathcal{T}$ 上的误差指示子

$$\eta_{\mathcal{T}}^2(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \tau) := {}_{\tau}^2 (\|R_1(\mathbf{v}_{\mathcal{T}})\|_{0;\tau}^2 + \|R_2(\mathbf{v}_{\mathcal{T}})\|_{0;\tau}^2) + \sum_{f \in \tau \cap \mathcal{F}(\mathcal{T})} h_{\tau} (\|J_1(\mathbf{v}_{\mathcal{T}})\|_{0;f}^2 + \|J_2(\mathbf{v}_{\mathcal{T}})\|_{0;f}^2).$$

下面先证明 AEFEM 在连续的迭代过程中, 误差的能量范数和尺度化的误差指示子之和是压缩的. 为此, 先给出正交性, 误差的整体上界估计和误差指示子的压缩性.

引理 7 (正交性) 对任意满足 $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}_*$ 的 $\mathcal{T}, \mathcal{T}_* \in \mathcal{C}(\mathcal{T}_0)$. 令 $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T})$ 和 $\mathbf{u}_{\mathcal{T}_*} \in \mathbb{V}(\mathcal{T}_*)$ 分别是问题 (5.6) 的有限元解, 则有

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}_*}\|_A^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_A^2 - \|\mathbf{u}_{\mathcal{T}_*} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_A^2. \quad (5.7)$$

引理 8 (误差的整体上界估计) 令 $\mathbf{u} \in H_0(\text{curl}; \Omega)$ 是变分问题 (5.5) 的解, $\mathcal{T} \in \mathcal{C}(\mathcal{T}_0)$, 且 $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T})$ 是变分问题 (5.6) 的有限元解, 则存在一个常数 $C_1 > 0$, 满足

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_A^2 \leq C_1 \eta^2(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathcal{T}).$$

引理 9 (误差指示子的压缩性) 存在常数 $\xi \in (0, 1)$ 及 C_{ξ} , 满足

$$\eta^2(\mathbf{u}_{k+1}, \mathcal{T}_{k+1}) \leq \xi \eta^2(\mathbf{u}_k, \mathcal{T}_k) + C_{\xi} \eta^2(\mathbf{D}, \mathcal{T}_0) \|\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k\|_A^2.$$

利用引理 7-9, 可证得如下收敛性结果.

定理 10 对于给定的 $\theta \in (0, 1)$, 令 $\{\mathcal{T}_k, \mathbf{u}_k\}_{k \geq 0}$ 是由 AEFEM 所得到的网格剖分和有限元解的序列, 则存在常数 $\rho > 0$ 和 $\delta \in (0, 1)$, 满足

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{k+1}\|_A^2 + \rho \eta^2(\mathbf{u}_{k+1}, \mathcal{T}_{k+1}) \leq \delta (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_k\|_A^2 + \rho \eta^2(\mathbf{u}_k, \mathcal{T}_k)).$$

接下来利用误差的整体下界估计和局部上界估计, 以及从网格剖分 $\mathcal{T}_k$ 到 $\mathcal{T}_{k+1}$ 中由 Dörfler 策略所得到的 $\mathcal{M}_k$ 的单元个数的上界估计, 证明 AEFEM 在满足一定的假设条件下具有拟最优复杂性, 其中的难点是如何建立相邻两层网格的有限元解之差的一个局部上界估计.

引理 11 (整体的下界估计) 令 $\mathbf{u} \in H_0(\text{curl}; \Omega)$ 是变分问题 (5.5) 的解, $\mathcal{T} \in \mathcal{C}(\mathcal{T}_0)$, 且 $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T})$ 是变分问题 (5.6) 的有限元解, 则存在一个常数 $C_2 > 0$, 满足

$$C_2 \eta^2(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathcal{T}) \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_A^2 + \text{osc}^2(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathcal{T}),$$

其中

$$\begin{aligned} \text{osc}^2(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathcal{T}) &= \sum_{\tau \in \mathcal{T}} h_{\tau}^2 (\|(Id - P_{h_{\tau}})R_1(\mathbf{v}_{\mathcal{T}})\|_{0;\tau}^2 + \|(Id - P_{h_{\tau}})R_2(\mathbf{v}_{\mathcal{T}})\|_{0;\tau}^2) \\ &\quad + \sum_{f \in \tau \cap \mathcal{F}(\mathcal{T})} h_{\tau} (\|(Id - P_{h_{\tau}})J_1(\mathbf{v}_{\mathcal{T}})\|_{0;f}^2 + \|(Id - P_{h_{\tau}})J_2(\mathbf{v}_{\mathcal{T}})\|_{0;f}^2), \end{aligned}$$

P_{h_τ} 表示到分片 $(\mathcal{P}_1)^3$ 或 $\mathcal{P}_1$ 上的 L^2 投影, $(\mathcal{P}_1)^3$ 和 $\mathcal{P}_1$ 的选择视 τ 和 f 而定.

引理 12 (局部上界估计) 对满足 $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}_*$ 的 $\mathcal{T}, \mathcal{T}_* \in \mathcal{C}(\mathcal{T}_0)$, 设 $\mathcal{R}_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_*} = \{\tau \in \mathcal{T} : \tau \notin \mathcal{T}_*\}$ 为从 $\mathcal{T}$ 到 $\mathcal{T}_*$ 的加密单元的集合. 令 $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T})$ 和 $\mathbf{u}_{\mathcal{T}_*} \in \mathbb{V}(\mathcal{T}_*)$ 均为变分问题 (5.6) 的有限元解, 则存在一个 $C_3 > 0$, 满足

$$\|\mathbf{u}_{\mathcal{T}_*} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_A^2 \leq C_3 \eta_{\mathcal{T}}^2(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathcal{R}_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_*}).$$

引理 13 (集合 $\mathcal{M}_k$ 的势) 令 $\mathbf{u}$ 是变分问题 (5.5) 的解. 对于给定一个 $\theta \in (0, \theta_*)$, 其中 $0 < \theta_* < 1$ 是某一常数, 令 $\{\mathcal{T}_k, \mathbf{u}_k\}_{k \geq 0}$ 是由 AEFEM 所得到的网格剖分和有限元解序列, 并且 $\mathcal{M}_k \subset \mathcal{T}_k$ 是由 Dörfler 标记策略所得到的标记单元集合. 若 $(\mathbf{u}, \mathbf{g}) \in \mathcal{A}_s$, 则下式成立,

$$\#\mathcal{M}_k \lesssim E_{\mathcal{T}_k}^{-1/s} |(\mathbf{u}, \mathbf{g})|_s^{1/s},$$

其中 $|(\cdot, \cdot)|_s$ 是某一逼近空间 $\mathcal{A}_s$ 的范数 (逼近空间 $\mathcal{A}_s$ 的数学描述较为复杂, 而且也没有较为清晰的刻画, 但是它在验证 AEFEM 的拟最优复杂性时中并不是必须的^[1, 5]).

综上, 可证得如下 AEFEM 的拟最优复杂性的定理.

定理 14 (拟最优复杂性) 给定常数 $\theta \in (0, \theta_*)$, 令 $\mathbf{u}$ 是变分问题 (5.5) 的解, $\{\mathcal{T}_k, \mathbf{u}_k\}_{k \geq 0}$ 是由 AEFEM 所得到的网格剖分和有限元解序列. 假设 $(\mathbf{u}, \mathbf{g}) \in \mathcal{A}_s$ 且初始网格 $\mathcal{T}_0$ 满足条件 (U), 则有

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_k\|_A \lesssim |(\mathbf{u}, \mathbf{g})|_s (\#\mathcal{T}_k - \#\mathcal{T}_0)^{-\theta}.$$

5.2 不定时谐 Maxwell 方程组的自适应棱有限元法

考虑如下不定时谐 Maxwell 问题:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) - \omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad (5.8)$$

$$\mathbf{n}_{\partial\Omega} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \quad (5.9)$$

其中 $\mathbf{u}$ 表示电场, $\omega > 0$ 表示波数, $\mathbf{g} \in (L^2(\Omega))^3$ 是一个与感生电流有关的给定函数. 为了保证所考虑问题的适定性, 我们总是假设 ω^2 不是微分算子 $\nabla \times (\nabla \times)$ 的特征值. 同时, 我们还假设 $\nabla \cdot \mathbf{g} \in L^2(\Omega)$, 它在物理上表示电磁场中的电荷密度.

方程组 (5.8) 和 (5.9) 的连续变分问题为: 求 $\mathbf{u} \in H_0(\text{curl}; \Omega)$, 满足

$$\hat{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{g}, \mathbf{v})_{0;\Omega}, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0(\text{curl}; \Omega), \quad (5.10)$$

其中 $\hat{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v})_{0;\Omega} - \omega^2(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{0;\Omega}$.

(5.10) 的离散变分问题为: 求 $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T})$, 满足

$$\hat{a}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = (\mathbf{g}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}), \quad \forall \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T}). \quad (5.11)$$

相应的后验误差指示子为对于任意的 $\tau \in \mathcal{T}$, $f \in \mathcal{F}(\mathcal{T})$ 和 $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T})$, 定义

$$\begin{aligned} R_1(\mathbf{v}_{\mathcal{T}})|_{\tau} &:= \mathbf{g}|_{\tau} - (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) - \omega^2 \mathbf{v}_{\mathcal{T}})|_{\tau}, & R_2(\mathbf{v}_{\mathcal{T}})|_{\tau} &:= \nabla \cdot (\mathbf{g}|_{\tau} + \omega^2 \mathbf{v}_{\mathcal{T}}|_{\tau}), \\ J_1(\mathbf{v}_{\mathcal{T}})|_f &:= \|(\nabla \times \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) \times \mathbf{n}_f\|, & J_2(\mathbf{v}_{\mathcal{T}})|_f &:= \|(\mathbf{g} + \omega^2 \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) \cdot \mathbf{n}_f\|. \end{aligned}$$

定义有限元函数 $\mathbf{v}_\mathcal{T} \in \mathbb{V}(\mathcal{T})$ 在单元 $\tau \in \mathcal{T}$ 上的误差指示子

$$\eta_\mathcal{T}^2(\mathbf{v}_\mathcal{T}, \tau) := h_\tau^2(\|R_1(\mathbf{v}_\mathcal{T})\|_{0;\tau}^2 + \|R_2(\mathbf{v}_\mathcal{T})\|_{0;\tau}^2) + \sum_{f \in \tau \cap \mathcal{F}(\mathcal{T})} h_\tau(\|J_1(\mathbf{v}_\mathcal{T})\|_{0;f}^2 + \|J_2(\mathbf{v}_\mathcal{T})\|_{0;f}^2).$$

与 $H(\text{curl})$ 椭圆方程组相比, 在证明 AEFEM 收敛性时, 最主要的困难是不定时谐 Maxwell 问题缺少正交性, 为此我们需要建立相应的拟正交性. 注意到关于椭圆问题的拟正交性利用了误差的 L^2 模是一个高阶项这一事实, 而对于不定时谐 Maxwell 问题, 因为标准的对偶论证并不成立, 所以关于误差的 L^2 模估计显得更为困难.

引理 15 (拟正交性) 对满足 $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}_*$ 的 $\mathcal{T}, \mathcal{T}_* \in \mathcal{C}(\mathcal{T}_0)$. 令 $\mathbf{u}_\mathcal{T} \in \mathbb{V}(\mathcal{T})$ 和 $\mathbf{u}_{\mathcal{T}_*} \in \mathbb{V}(\mathcal{T}_*)$ 分别是 (5.11) 的有限元解. 则对任意的 $\delta_0 > 0$, 存在一个仅依赖于区域 Ω 和波数 ω 的常数 $h(\delta_0)$, 使得对一切的 $h_\mathcal{T} \leq h(\delta_0)$, 有

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}_*}\|_{\text{curl};\Omega}^2 \leq \frac{1}{1 - \delta_0} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\mathcal{T}\|_{\text{curl};\Omega}^2 - \|\mathbf{u}_{\mathcal{T}_*} - \mathbf{u}_\mathcal{T}\|_{\text{curl};\Omega}^2.$$

与 $H(\text{curl})$ 椭圆方程组相类似, 利用上述拟正交性、误差的整体上界估计和误差指示子的压缩性, 可证得 AEFEM 的收敛性, 并可类似证得拟最优复杂性.

定理 16 假设初始网格尺寸 h_0 充分小, 对于给定的 $\theta \in (0, 1)$, 令 $\{\mathcal{T}_k, \mathbf{u}_k\}_{k \geq 0}$ 是由 AEFEM 所得到的网格剖分和有限元解序列, 则存在常数 $\rho \in (0, 1)$ 和 $\delta \in (0, 1)$, 满足

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{k+1}\|_{\text{curl};\Omega}^2 + \rho\eta^2(\mathbf{u}_{k+1}, \mathcal{T}_{k+1}) \leq \delta(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_k\|_{\text{curl};\Omega}^2 + \rho\eta^2(\mathbf{u}_k, \mathcal{T}_k)).$$

进一步, 若给定常数 $\theta \in (0, \theta_*)$, 且假设 $(\mathbf{u}, \mathbf{g}) \in \mathcal{A}_s$, 则有

$$(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_k\|_{\text{curl};\Omega}^2 + \rho\text{osc}^2(\mathbf{u}_k, \mathcal{T}_k))^{1/2} \lesssim |(\mathbf{u}, \mathbf{g})|_s (\#\mathcal{T}_k - \#\mathcal{T}_0)^{-s}.$$

6 时谐 Maxwell 方程组棱元离散系统的迭代两网格法

算法 4 令 $\mathbf{E}^0 = \mathbf{0}$, 假设 $\mathbf{E}^j \in V_h^{k,l}$ 已求得, 则按如下方式得到 $\mathbf{E}^{j+1} \in V_h^{k,l}$:

(1) 求 $\mathbf{e}^j \in \tilde{V}_{H,h}^{k,l} := V_H^{k,l} + \nabla S_h^{k+l-1}$, 满足

$$\hat{a}(\mathbf{e}^j, \mathbf{v}_1) = (\mathbf{F}, \mathbf{v}_1) - \hat{a}(\mathbf{E}^j, \mathbf{v}_1), \quad \forall \mathbf{v}_1 \in \tilde{V}_{H,h}^{k,l};$$

(2) 求 $\mathbf{E}^{j+1} \in V_h^{k,l}$, 满足

$$a(\mathbf{E}^{j+1}, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{F}, \mathbf{v}_h) - N(\mathbf{E}^j + \mathbf{e}^j, \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h^{k,l}.$$

上述算法中双线性型 $\hat{a}(\cdot, \cdot)$ 和 $a(\cdot, \cdot)$ 定义见第 4 节. 可以证明算法 4 有如下收敛性结果.

定理 17 假设 $\mathbf{E}^j$ 是算法 4 的解, $\mathbf{E} \in H^s(\text{curl}; \Omega)$ ($1/2 < s \leq k$) 和 $\mathbf{E}_h$ 分别是变分问题 (4.5) 和 (4.9) 的解, 则存在常数 $\delta \in (1/2, 1]$ 和 $h_0 > 0$, 使得对一切的 $H < h_0$, 有

$$\|\mathbf{E}_h - \mathbf{E}^j\|_{H(\text{curl}; \Omega)} \lesssim H^{s+j\delta} \|\mathbf{E}\|_{H^s(\text{curl}; \Omega)}, \quad \|\mathbf{E} - \mathbf{E}^j\|_{H(\text{curl}; \Omega)} \lesssim (h^s + H^{s+j\delta}) \|\mathbf{E}\|_{H^s(\text{curl}; \Omega)}.$$

致谢 作者衷心感谢导师许进超教授和舒适教授的悉心指导, 并借此机会感谢 University of California, Irvine 陈龙副教授的热心帮助, 以及在湘潭大学和华南师范大学的学习和工作中, 所有支持并帮助过我的老师们和同学们.

参考文献

- 1 钟柳强. 求解两类 Maxwell 方程组棱元离散系统的快速算法和自适应方法. 博士学位论文. 湘潭: 湘潭大学, 2009
- 2 Zhong L, Shu S, Sun D, et al. Preconditioners for higher order edge finite element discretizations of Maxwell's equations. *Sci China Ser A*, 2008, 51: 1537–1548
- 3 Zhong L, Shu S, Wittum G, et al. Optimal error estimates of the Nedelec edge elements for time-harmonic Maxwell's equations. *J Comput Math*, 2009, 27: 563–572
- 4 Zhong L, Shu S, Chen L, et al. Convergence of adaptive edge finite element methods for $H(\text{curl})$ -elliptic problems. *Numer Linear Algebra Appl*, 2010, 17: 415–432
- 5 Zhong L, Chen L, Shu S, et al. Quasi-optimal convergence of adaptive edge finite element methods for three-dimensional indefinite time-harmonic Maxwell equations. *Math Comp*, 2012, 81: 623–642
- 6 Zhong L, Shu S, Wang J, et al. Two-grid methods for time-harmonic Maxwell equations. *Numer Linear Algebra Appl*, 2013, 20: 93–111
- 7 Xu J. A new class of iterative methods for nonselfadjoint or indefinite problems. *SIAM J Numer Anal*, 1992, 29: 303–319
- 8 Xu J, Zikatanov L. The method of alternating projections and the method of subspace corrections in Hilbert space. *J Amer Math Soc*, 2002, 15: 573–597
- 9 Hiptmair R, Xu J. Nodal auxiliary spaces preconditions in $H(\text{curl})$ and $H(\text{div})$ spaces. *SIAM J Numer Anal*, 2007, 45: 2483–2509

Fast algorithms of edge element discretizations and adaptive finite element methods for two classes of Maxwell equations

ZHONG LiuQiang

Abstract Fast algorithms and adaptive methods for edge element discretizations of Maxwell equations are two very active areas today in computational electromagnetism. Fast algorithms for edge element discretizations and adaptive finite element methods for two classes of typical Maxwell equations are developed. Firstly, the fast iterative methods and efficient preconditioners for high order edge discretizations of $H(\text{curl})$ -elliptic equations are constructed by using the stable decompositions of high order edge finite element spaces, we prove that both the convergent rate of iterative methods and the condition numbers of our preconditioners are independent of mesh size. Secondly, quasi-optimal error estimates in both L^2 -norm and $H(\text{curl})$ -norm for edge discretizations of the time-harmonic Maxwell's equations are obtained by using discrete Helmholtz decompositions, the approximation of the discrete divergence-free function by the continuous divergence-free function and a duality argument for the continuous divergence-free function, we also construct and analysis the corresponding two-grid method. Finally, we consider the standard Adaptive Edge Finite Element Method (AEFEM) for the $H(\text{curl})$ -elliptic equations with variable coefficients and the indefinite time-harmonic Maxwell's equations, respectively. As is customary in practice, AEFEM marks exclusively according to the error estimator without special treatment of oscillation and performs a minimal element refinement without the interior node property. We prove that the AEFEM is convergent. Then using this geometric decay, global lower bounds and localized upper bound of a residualtype error estimate, we derive the quasi-optimal cardinality of the AEFEM.

Keywords Maxwell equations, fast algorithms, adaptive finite element methods, high order edge element, optimal error estimate, quasi-optimal cardinality

MSC(2010) 65N30, 35Q60

doi: 10.1360/012013-94