论文

基于模糊凸集的结构非概率可靠性综合模型

孙文彩^{①②*}, 杨自春^{①②}^① 海军工程大学动力工程学院, 武汉 430033;^② 海军工程大学舰船高温结构复合材料研究室, 武汉 430033

*联系人, E-mail: sun_wencai@163.com

收稿日期: 2014-04-21; 接受日期: 2014-04-21; 网络出版日期: 2014-07-31

教育部新世纪优秀人才支持计划和海军工程大学自然科学基金(批准号: HGDQNJ13013)资助项目

摘要 在小样本或极小样本问题中, 由于参数波动的确切范围难以确定, 普通刚性凸集模型含有难以估量和控制的误差, 其适用性受到限制. 鉴于此, 研究建立了一种新的不确定性模型——模糊凸集模型, 并通过在刚性凸集中引入一个新的参数——模糊扩展参数, 建立了几种典型的模糊凸集模型. 在模糊凸集模型的基础上, 建立了一种非概率可靠性的综合模型, 采用 Gauss-Legendre 求积方法解决了指标求解所涉及的积分问题. 算例表明, 采用基于模糊凸集的非概率可靠性综合模型度量小样本结构的可靠性更加合理, 可靠性指标的求解方法正确可行.

关键词 结构可靠性, 非概率, 模糊凸集模型, 稳健可靠性, Gauss-Legendre 求积公式

PACS: 02.40.Ft, 07.05.Mh, 46.55.+d

doi: 10.1360/SSPMA-2014-00109

1 引言

在实际工程结构中, 存在着大量的不确定性因素. 了解、度量和控制这些不确定性对于保证结构的可靠性和综合性能是非常重要的. 处理不确定性问题的传统方法是基于概率论的, 其发展也较为成熟. 然而, 为了得到不确定参数的概率密度函数, 需要大量的客观统计数据做支撑, 这也是概率方法应用的前提. 工程实际中, 受试验条件和试验成本的限制, 能够获得的统计数据往往是匮乏的. 此外, 一些参数(如几何参数)不具有随机性质, 其不确定性来源于人的主观认识的不确定性和测量误差, 这类不确定性被称为未确知性^[1]. 总之, 在小样本问题中, 概率方

法的应用受到了一定的限制.

为了克服概率方法的局限性, Ben-Haim 等人^[2]开辟了处理不确定性问题的新途径——非概率凸模型方法. 这个方法不依赖于大量的统计数据, 且适用于非线性问题. Ben-Haim 首先提出了一个非概率可靠性的概念^[3], 并首次给出了非概率可靠性的一种度量指标^[4]. Elishakoff^[5]提出了基于安全因子区间的可靠性度量指标. 李永华等人^[6]在 Ben-Haim 的稳健可靠性指标的基础上, 提出了无量纲的稳健可靠性指标. 郭书祥等人^[7]在极限状态函数的基础上, 并基于区间分析, 提出了非概率可靠性的无穷范数度量指标. 邱志平^[8]利用集合理论中的集合偏序关系提出了

引用格式: 孙文彩, 杨自春. 基于模糊凸集的结构非概率可靠性综合模型. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2014, 44: 935–943

Sun W C, Yang Z C. A non-probabilistic model of structural reliability based on fuzzy convex (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2014, 44: 935–943, doi: 10.1360/SSPMA-2014-00109

一种新的鲁棒可靠性准则. 王晓军等人^[9]对结构振动的非概率可靠性进行了研究. 曹鸿钧^[10]在区间模型的无穷范数度量指标的基础上, 提出了超椭圆凸集与区间变量共存时的非概率可靠性分析方法.

上述方法均属于稳健可靠性的范畴. 当变量空间或凸集模型与结构失效域发生干涉时, 这一类方法不再适用. 一些学者对这个可靠性问题进行了研究. 王晓军等人^[11]在区间模型的基础上, 提出了非概率集合干涉模型, 并定义了基于超体积比的非概率可靠性指标. 周凌等人^[12]成功地将基于体积比的非概率集合可靠性模型用于超空泡运动体强度与稳定性的可靠性分析问题. 乔心洲^[13]在超椭圆凸集模型的基础上, 提出了一个新的体积比非概率可靠性模型. 洪东跑^[14]提出了基于容差分析的结构非概率可靠性模型. 孙文彩^[15]改进了基于体积比的非概率可靠性模型, 提出了基于区间分段描述的非概率可靠性模型. Luo^[16]和 Kang^[17]研究了概率和凸集混合不确定条件下的结构可靠性和优化设计问题. Yang^[18]和 Sun^[19]分别将凸集模型成功应用在结构特征值分析和疲劳寿命分析. 周凌等人^[20]将稳健可靠性模型与体积比非概率可靠性模型相结合, 提出了非概率可靠性的一种综合模型和指标, 并研究了其求解算法.

上述所有的非概率可靠性方法都是基于传统的凸集模型或所谓的刚性凸集模型——区间模型或超椭圆模型. 然而, 当样本容量非常小或统计信息极度匮乏时, 难以得到不确定参数的确切的变化范围, 普通的刚性凸集模型的误差也是难以判断和控制的. 此外, 关于非概率可靠性方法的综合性研究也需要进行更深层次的探讨. 本文建立了描述结构不确定性的模糊凸集模型, 并提出了相应的可靠性综合模型和度量指标, 对该指标的计算问题也进行了研究.

2 模糊凸集模型的定义和性质

在模糊数学中, 采用隶属度函数来描述一个元素与某一个概念的相容程度, 同时也代表某个元素是 F 的可能性. 比如, Joins 吃 5 个鸡蛋当早餐的可能性是 0.8, 即 Joins 能吃 5 个鸡蛋的相容性为 0.8, 但 Joins 吃 5 个鸡蛋当早餐的概率却为 0^[21]. 一般来说, 可能性与概率之间存在如下关系^[22]

$$\begin{aligned} \text{概率(大)} &\Leftrightarrow \text{可能性(大)}, \\ \text{概率(小)} &\Leftrightarrow \text{可能性(小)}. \end{aligned} \quad (1)$$

可见, 可能性和概率是两个不同属性的不确定性数学方法. 当概率密度函数难以获取时, 我们依然可以从可能性的角度来刻画某个参数的不确定性, 且由式(1)可以看出, 可能性分布的不确定性测度比概率分布的不确定性测度往往要大, 在工程问题中, 当得不到概率密度函数时, 应用可能性分布是偏于安全的.

从统计成本的角度来看, 可能性分布函数与概率密度函数尽管都需要统计数据做支撑, 但由于数据来源和统计方法不同, 所需成本有所差别. 概率密度函数的统计是以客观试验数据做支撑的, 表示的是由于因果关系不明确而使某一可重复试验的结果具有随机不确定性, 其概率分布需要对大量的试验数据进行统计才能得到, 而可能性分布函数是以主观统计数据做支撑的, 可以通过专家打分或问卷调查等方式进行统计, 因此, 在工程实际中, 可能性分布函数的确定要比概率密度函数的确定所需成本低得多. 许多场合, 由于试验成本、试验周期等的限制, 无法得到充足的试验数据, 而可能性分布函数是相对容易得到的. 因此, 模糊理论和凸集理论都是解决小样本可靠性问题的有力工具.

下面将在凸 F 集的基础上, 定义模糊凸集的概念. 首先给出凸 F 集和凸集合的定义. 凸 F 集是以实数 R 为论域而定义的.

定义 1^[22] 设 R 是实数域, $\tilde{A} \in F(R)$, 若 $\forall x_1, x_2, x_3 \in R$, 且 $x_1 > x_2 > x_3$, 均有

$$\tilde{A}(x_2) \geq \tilde{A}(x_1) \wedge \tilde{A}(x_3), \quad (2)$$

则称 $\tilde{A}$ 是凸 F 集.

定义 2^[22] 设 $\tilde{A} \in F(U)$, 记

$$\text{Ker}(\tilde{A}) = \{x \mid x \in U, \tilde{A}(x) = 1\}, \quad (3)$$

称 $\text{Ker}(\tilde{A})$ 为 $\tilde{A}$ 的核. 当 $\text{Ker}(\tilde{A}) \neq \Phi$ 时, 称 $\tilde{A}$ 为正规 F 集.

定义 3^[23] 设 $C \subset R^n$, 如果 $\forall x, y \in C, \forall t \in [0, 1]$, 有 $(1-t)x + ty \in C$, 则称 C 是凸集合.

将凸 F 集的概念延伸, 并结合非概率可靠性研究的实际, 定义如下模糊凸集的概念

定义 4 设 $\tilde{U}$ 为 R^n 上的正规模糊子集, $\mu_{\tilde{U}}(x)$ 是它的隶属函数, 若 $\forall x, y \in R^n, \forall t \in (0, 1)$, 且 $z = (1-t)x + ty$, 均有

$$\tilde{U}(z) \geq \tilde{U}(x) \wedge \tilde{U}(y), \quad (4)$$

则称 $\tilde{U}$ 是一个模糊凸集.

由定义 1, 有如下推论:

推论 1^[22] 凸 F 集的截集必为区间; 截集为区间的 F 集必为凸 F 集.

由定义 4, 有如下类似推论:

推论 2 模糊凸集的截集必为凸集合; 截集为凸集合的 F 集必为模糊凸集.

证 设 $\tilde{U}$ 为模糊凸集, $\forall \lambda \in [0, 1]$, 若 $x_1, x_2 \in U_\lambda$, 即

$$\tilde{U}(x_1) \geq \lambda, \quad \tilde{U}(x_2) \geq \lambda, \quad (5)$$

$\forall t \in (0, 1)$, 记 $x_3 = (1-t)x_1 + tx_2$, 由定义 3 有

$$\tilde{U}(x_3) \geq \tilde{U}(x_1) \wedge \tilde{U}(x_2) \geq \lambda, \quad (6)$$

所以, $x_3 \in U_\lambda$, 故 U_λ 为凸集合.

反之, 设 $\tilde{U}$ 为论域 R^n 上的模糊集, $\forall x_1, x_2 \in R^n$, 取 $\lambda = \tilde{U}(x_1) \wedge \tilde{U}(x_2)$, 则

$$x_1 \in U_\lambda, \quad x_2 \in U_\lambda, \quad (7)$$

$\forall t \in (0, 1)$, 记 $x_3 = (1-t)x_1 + tx_2$, 因为 U_λ 为凸集合, 故 $x_3 \in U_\lambda$, 即

$$\tilde{U}(x_3) \geq \lambda = \tilde{U}(x_1) \wedge \tilde{U}(x_2), \quad (8)$$

所以, $\tilde{U}$ 为模糊凸集. 证毕.

值得注意, 在凸 F 集的定义中并未要求正规模糊集的条件, 而在模糊凸集的定义中, 我们限定了正规模糊集的条件, 这是因为在结构非概率可靠性分析中, 由小量样本确定的凸集合应作为模糊凸集的核, 即满足 $\text{Ker}(\tilde{U}) \neq \Phi$ 的条件.

上面建立的模糊凸集模型拓展了模糊数学中凸 F 集的概念, 且符合工程实际需求. 当模糊凸集的维数为一维时, 其退化为正规的凸 F 集, 也即模糊数. 在模糊数学中, 区间数被视为一种特殊的模糊数, 模糊数的核为一闭区间. 那么, 多维空间中的普通凸集合则可以视为一种特殊的模糊凸集, 且模糊凸集的核也为一个凸集合.

3 几种典型的模糊凸集模型

当应用凸集模型解决实际问题时, 人们常常选

择那些具有数学解析表达式、应用方便的凸集模型. 下面根据几种常用的凸集模型^[6,24], 引入新的参数—模糊扩展参数, 建立相应的模糊凸集模型.

(1) 区间模糊凸集模型.

$$\tilde{U}(\tilde{\theta}, \phi, \bar{u}) = \{u \mid |u - \bar{u}| \leq \tilde{\theta}\phi\}, \quad \tilde{\theta} \in F(R). \quad (9)$$

式中, ϕ 为区间模糊凸集的核所对应的区间离差, $\tilde{\theta}$ 为模糊扩展参数.

(2) n 维超椭球模糊凸集模型.

$$\tilde{U}(\tilde{\theta}, \phi, \bar{u}) = \left\{u \mid (u - \bar{u})^T W (u - \bar{u}) \leq (\tilde{\theta}\phi)^2\right\}, \quad (10)$$

$$\tilde{\theta} \in F(R).$$

式中, W 是实对称正定矩阵.

(3) Minkowski 范数模糊凸集模型.

$$\tilde{U}_r(\tilde{\theta}, \phi, \bar{u}) = \left\{u \mid \|W^{1/2}(u - \bar{u})\|_r \leq \tilde{\theta}\phi\right\}, \quad (11)$$

$$\tilde{\theta} \in F(R).$$

式中, $\|\cdot\|_r$ 为 Minkowski 范数, W 为实对称正定矩阵, $W^{1/2} = A^{1/2}Q$, $W = Q^T A Q$, Q 为正交矩阵, A 为对角矩阵.

(4) 累积能量界限模糊凸集模型.

$$\tilde{U}[\tilde{\theta}, \phi, \bar{u}(t)] = \left\{u(t) \mid \int_0^{+\infty} [u(t) - \bar{u}(t)]^T W [u(t) - \bar{u}(t)] dt \leq (\tilde{\theta}\phi)^2\right\}, \quad \tilde{\theta} \in F(R). \quad (12)$$

(5) 斜率界限模糊凸集模型.

$$\tilde{U}[\tilde{\theta}, \phi, \bar{u}(t)] = \left\{u(t) \mid \left| \frac{d[u(t) - \bar{u}(t)]}{dt} \right| \leq \tilde{\theta}\phi\right\}, \quad (13)$$

$$\tilde{\theta} \in F(R).$$

(6) 复合模糊凸集模型.

设不确定性向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 可表示为 $x = (u_1^T, u_2^T, \dots, u_k^T)^T$, $k \leq n$, 其中 $u_i (i=1, 2, \dots, k)$ 为向量 x 的子向量. 各子向量的不确定性分别由 k 个不同的模糊凸集模型 $\tilde{U}_i(\tilde{\theta}_i, \phi_i, \bar{u}_i)$ ($i=1, 2, \dots, k$) 描述. 由于子模型 $\tilde{U}_i(\tilde{\theta}_i, \phi_i, \bar{u}_i)$ 复合构成 x 的模糊凸集模型 $\tilde{U}(\tilde{\theta}, \phi, \bar{u})$:

$$\begin{aligned} & \tilde{U}(\tilde{\theta}, \phi, \bar{x}) \\ &= \bigcap_{i=1}^k \tilde{U}_i(\tilde{\theta}_i, \phi_i, \bar{u}_i) \\ &= \int_{u \in R^n} \frac{\tilde{U}_1(u_1) \wedge \tilde{U}_2(u_2) \wedge \cdots \wedge \tilde{U}_k(u_k)}{x}. \end{aligned} \quad (14)$$

式中, $\int$ 表示论域中的元素 x 与其隶属度的对应关系的总括, $\mathbf{x} = (u_1^T, u_2^T, \dots, u_k^T)^T$, $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{u}_1^T, \bar{u}_2^T, \dots, \bar{u}_k^T)^T$, $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \dots, \tilde{\theta}_k)^T$ 为 k 个子模型的模糊扩展参数 $\tilde{\theta}_i$ 构成的模糊向量, $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k)$ 为 k 个子模型的核所对应的凸集尺度参数向量。

模糊扩展参数 $\tilde{\theta}$ 的可能性分布为偏小型分布, 其几种典型分布型式如图 1 所示。

除此之外, 还有哥西分布型式、岭形分布型式、半 Γ 分布型式、半凹(凸)分布型式等, 这里不一一列举。

4 一种结构非概率可靠性综合模型

在实际应用中, 模糊凸集的类型和模糊扩展参数的分布型式都可以灵活选用。比如, 当确切知道某一个参数的波动范围时, 其模糊扩展参数的分布型式可选用半矩形分布, 此时, 模糊凸集可自动退化为普通的刚性凸集。理论上, 只有对主观经验的全面调查统计才能确定模糊扩展参数的可能性分布, 然而, 这种对主观数据的统计所需要的成本往往是可以接受的。

图 1 $\tilde{\theta}$ 的典型分布

Figure 1 Typical distribution of $\tilde{\theta}$.

设结构的极限状态方程为

$$M = G(\mathbf{x}) = G(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \quad (15)$$

式中, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为结构不确定性参数向量. $G(\mathbf{x}) = 0$ 将结构变量空间划分成失效域 Ω_f 和安全域 Ω_s 两部分。

设描述结构参数不确定性的复合模糊凸集模型为 $\tilde{U}(\tilde{\theta}, \phi, \bar{x})$, 根据模糊凸集模型的性质, $\tilde{U}(\tilde{\theta}, \phi, \bar{x})$ 的任意水平下的截集均为凸集, 且有

$$\begin{aligned} & \tilde{U}_\lambda(\tilde{\theta}, \phi, \bar{x}) \\ &= U(\pi_{\tilde{\theta}}^{-1}(\lambda), \phi, \bar{x}) \\ &= U_1(\pi_{\tilde{\theta}_1}^{-1}(\lambda), \phi_1, \bar{x}_1) \cap U_2(\pi_{\tilde{\theta}_2}^{-1}(\lambda), \phi_2, \bar{x}_2) \\ & \quad \cap \cdots \cap U_k(\pi_{\tilde{\theta}_k}^{-1}(\lambda), \phi_k, \bar{x}_k). \end{aligned} \quad (16)$$

式中, $\pi_{\tilde{\theta}}^{-1}(\lambda) = (\pi_{\tilde{\theta}_1}^{-1}(\lambda), \pi_{\tilde{\theta}_2}^{-1}(\lambda), \dots, \pi_{\tilde{\theta}_k}^{-1}(\lambda))^T$, 可见, 模糊凸集的截集是由模糊扩展参数的截集来控制的。模糊凸集下的稳健可靠性指标为一个模糊数, 设其可能性分布函数为 $\pi_{\tilde{\eta}}(x)$, 则对于 λ 水平截集下的凸集 $U(\pi_{\tilde{\theta}}^{-1}(\lambda), \phi, \bar{x})$, 定义结构的稳健可靠性指标:

$$\begin{aligned} \eta(\lambda) &= \pi_{\tilde{\eta}}^{-1}(\lambda) \\ &= \text{sgn}[G(\bar{x})] \\ & \quad \cdot \max \left\{ \lambda \left[\min_{x \in U(\pi_{\tilde{\theta}}^{-1}(\lambda), \phi, \bar{x})} \text{sgn}[G(\bar{x})] G(x) \right] \geq 0 \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

当 $|\eta(\lambda)| \leq 1$ 时, 凸集 $U(\pi_{\tilde{\theta}}^{-1}(\lambda), \phi, \bar{x})$ 与失效域 Ω_f 发生干涉, 此时, 定义如下的非概率可靠性指标:

$$R_{\text{set}}(\lambda) = \pi_{\tilde{R}_{\text{set}}}^{-1}(\lambda) = \frac{V(\lambda)_{\text{safe}}}{V(\lambda)_{\text{all}}}. \quad (18)$$

λ 水平截集下的非概率可靠性综合指标定义为

$$\kappa(\lambda) = \pi_{\tilde{\kappa}}^{-1}(\lambda) = \begin{cases} \eta(\lambda), & \eta(\lambda) > 1, \\ R_{\text{set}}(\lambda), & |\eta(\lambda)| \leq 1, \\ \eta(\lambda) + 1, & \eta(\lambda) < -1. \end{cases} \quad (19)$$

上式定义的指标为普通凸集模型下的非概率可靠性综合指标, 适用于凸集合名义值位于失效域的

情形, 且保证了可靠性指标在实数域内的连续性. 模糊凸集下的结构总体非概率可靠性综合指标定义为

$$R' = \int_0^1 \kappa(\lambda) d\lambda = \int_0^1 \pi_{\kappa}^{-1}(\lambda) d\lambda. \quad (20)$$

当凸集合的名义值位于失效域且凸集合与安全域发生干涉时, 稳健可靠性指标小于 0, 而综合指标大于 0, 此时的稳健可靠性指标已不能明确表示结构的可靠性程度. 图 2 说明了这一点.

在图 2 中, 如果按照稳健可靠性模型来分析的话, 得到的可靠度小于 0, 而综合可靠性指标 $\kappa(\lambda) > 0$, 且由图中可以看出, 尽管 $\eta(\lambda) < 0$, 但失效域的面积远小于安全域的面积, 因此由综合可靠性指标度量结构的非概率可靠性能够更加全面、合理地反映结构失效域与凸集合的干涉程度, 从而反映结构失效率的大小. 同时, 模糊凸集下结构总体非概率可靠性指标综合考虑了结构参数的不确定性以及凸集模型的不确切性, 是对小样本结构可靠程度的一种更加全面、合理的非概率的度量.

5 非概率可靠性指标的数值积分

在式(20)中, 几乎不可能得到 $\kappa(\lambda)$ 解析形式, 因此有必要提供一种数值方法来计算式(20)中的积分. 由数值分析的知识可知, 在 n 个节点的求积公式中, 具有最高代数精度的求积公式是 Gauss 型求积公式^[25].

将 $\lambda = (1+t)/2$ 代入式(20), 则该求积公式变为

$$R' = \int_0^1 \kappa(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \kappa\left(\frac{1+t}{2}\right) dt. \quad (21)$$

上式可视为权函数 $\rho(t) \equiv 1$ 和积分区间为 $[-1, 1]$ 的积分, 其对应的正交多项式为 Legendre 多项式, 因此可以采用 Gauss-Legendre 求积公式进行求解. Legendre 正交多项式为

$$L_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dt^n} \left[(t^2 - 1)^n \right]. \quad (22)$$

取 $L_n(t)$ 的零点作求积节点所形成的求积公式

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \approx \sum_{i=1}^n A_i f(t_i), \quad (23)$$

称为 Gauss-Legendre 求积公式, 其中

图 2 $\eta(\lambda) < 0, \kappa(\lambda) > 0$ 的情况
Figure 2 The case of $\eta(\lambda) < 0, \kappa(\lambda) > 0$.

$$A_i = \int_{-1}^1 \frac{L_n(t)}{(t-t_i)L_n'(t_i)} dt, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (24)$$

因此, 式(20)的积分可由下式近似求解

$$R' = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \kappa\left(\frac{1+t}{2}\right) dt \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n A_i \kappa\left(\frac{1+t_i}{2}\right). \quad (25)$$

Gauss-Legendre 求积公式的节点 t_i 及求积系数可参考数值分析方面的专著.

6 算例分析

算例 1 数值算例

引用文献[26]中的算例, 假设结构的极限状态函数为

$$\begin{aligned} M = & X_5 - 0.00115X_1X_2 + 0.00157X_2^2 + 0.00117X_1^2 \\ & + 0.0135X_2X_3 - 0.0705X_2 - 0.00534X_1 \\ & - 0.0149X_1X_3 - 0.0611X_2X_4 + 0.0717X_1X_4 \\ & - 0.226X_3 + 0.0333X_3^2 - 0.558X_3X_4 \\ & + 0.998X_4 - 1.339X_4^2. \end{aligned}$$

设 X_1-X_5 均为模糊区间变量, 即各变量不能确定确切的变化范围, 而用如下的模糊区间模型来表示

$$\tilde{U}_{x_1}(\tilde{\theta}_1, \phi, \bar{x}_1) = \{x \mid |x - 10| \leq 1.5\tilde{\theta}_1\},$$

$$\tilde{U}_{x_2}(\tilde{\theta}_2, \phi, \bar{x}_2) = \{x \mid |x - 25| \leq 3\tilde{\theta}_2\},$$

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{x_3}(\tilde{\theta}_3, \phi_3, \bar{x}_3) &= \{x \mid |x - 0.8| \leq 0.12\tilde{\theta}_3\}, \\ \tilde{U}_{x_4}(\tilde{\theta}_4, \phi_4, \bar{x}_4) &= \{x \mid |x - 0.0625| \leq 0.025\tilde{\theta}_4\}, \\ \tilde{U}_{x_5}(\tilde{\theta}_5, \phi_5, \bar{x}_5) &= \{x \mid |x - 1.2| \leq 0.1\tilde{\theta}_5\}.\end{aligned}$$

$\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_5$ 均为半梯形偏小型分布, 在区间[1, 1.5]内, 其可能性分布函数值均由 1 线性降低到 0.

在本例中, 采用 7 个节点的 Gauss-Legendre 求积公式, 由求积节点和关系式 $\lambda = (1+t)/2$, 可得到 7 个对应的截集水平:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0.97455395615; \lambda_2 = 0.02544604385; \\ \lambda_3 &= 0.8707655928; \lambda_4 = 0.1292344072; \\ \lambda_5 &= 0.7029225757; \lambda_6 = 0.2970774243; \lambda_7 = 0.5.\end{aligned}$$

相应的求积系数 A_i 为

$$\begin{aligned}A_1 &= A_2 = 0.1294849662; A_3 = A_4 = 0.2797053915; \\ A_5 &= A_6 = 0.3818300505; A_7 = 0.4179591837.\end{aligned}$$

各个截集水平下的稳健可靠性指标为

$$\begin{aligned}\eta(\lambda_1) &= 1.1641; \eta(\lambda_2) = 0.79264; \\ \eta(\lambda_3) &= 1.1073; \eta(\lambda_4) = 0.8213; \\ \eta(\lambda_5) &= 1.0264; \eta(\lambda_6) = 0.8723; \eta(\lambda_7) = 0.9431.\end{aligned}$$

$\eta(\lambda_1)$ 和 $\eta(\lambda_2)$ 的优化过程如图 3 和 4 所示.

各个截集水平下的综合可靠性指标为

$$\begin{aligned}\kappa(\lambda_1) &= 1.1641; \kappa(\lambda_2) = 0.994066; \\ \kappa(\lambda_3) &= 1.1073; \kappa(\lambda_4) = 0.996836; \\ \kappa(\lambda_5) &= 1.0264; \kappa(\lambda_6) = 0.9993008; \\ \kappa(\lambda_7) &= 0.9999806.\end{aligned}$$

稳健可靠性指标 η 和综合可靠性指标 κ 随截集水平的变化如图 5 所示.

根据 Gauss-Legendre 求积公式(24), 结构总体非概率可靠性综合指标为

$$R' \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n A_i \kappa(\lambda_i) = 1.0297.$$

按照稳健可靠性指标计算得到的总体非概率可靠性综合指标为 0.95598.

图 3 $\eta(\lambda_1)$ 的优化过程

Figure 3 The optimization procedure for $\eta(\lambda_1)$.

图 4 $\eta(\lambda_2)$ 的优化过程

Figure 4 The optimization procedure for $\eta(\lambda_2)$.

图 5 η 和 κ 随截集水平 λ 的变化

Figure 5 The variation of η and κ with λ .

当截集水平较高且失效域与区间集合不相交时, 非概率集合可靠性指标恒为 1, 按照该指标计算得到的总体非概率可靠性综合指标为 0.999036.

度量指标的差别是由指标本身的物理意义所决定的. 本文提出的非概率综合可靠性指标不仅吸取了稳健可靠性指标和集合干涉可靠性指标各自的优势, 且考虑了结构参数的模糊不确定性因素或凸集模型的模糊性质, 能够以非概率的度量手段更加全

面和客观地反映实际结构的可靠性程度, 算例同时表明关于该指标的求解算法是可行的.

算例 2 工程算例

环肋间壳体失稳是环肋加强圆柱形壳的主要失效模式之一, 其特征是沿壳板周向形成失稳波纹或波形. 下面对环肋加强圆柱形壳体的失稳可靠性进行分析.

相邻肋骨间的板壳失稳临界压力 p_{cr} 为

$$p_{cr} = C_g C_s p_E.$$

式中, p_E 为失稳欧拉压力, C_g 为考虑计算本身和壳体不圆度初始几何缺陷的模型修正系数, C_s 为考虑计算本身和塑性及残余应力影响的模型修正系数, C_g 和 C_s 通常由试验和计算确定.

当材料泊松系数为 0.3 时, 失稳欧拉压力 p_E 的计算公式为

$$p_E = E \left(\frac{h}{r} \right)^2 \frac{0.6}{u - 0.37}.$$

式中, E 为材料弹性模量; h 为耐压壳体的厚度; r 为圆柱形耐压壳体半径; u 为无量纲参数

$$u = 0.642l / \sqrt{rh}.$$

式中, l 为肋骨间距.

耐压壳体结构失稳的极限状态函数为

$$G_{sh}(p, p_{cr}) = p_{cr} - p = 0.$$

综合前面的公式, 上式可进一步写为

$$\begin{aligned} G_{sh}(p, r, h, E, l, C_s, C_g) \\ = C_g C_s E \left(\frac{h}{r} \right)^2 \frac{0.6\sqrt{rh}}{0.642l - 0.37\sqrt{rh}} - p = 0. \end{aligned}$$

采用模糊椭圆凸集模型描述向量 $X = (p, r, h, E, l, C_s, C_g)^T$ 的不确定性

$$U_E(\tilde{\theta}, 1, \bar{X}) = \left\{ X \mid (X - \bar{X})^T W_X (X - \bar{X}) \leq \tilde{\theta}^2 \right\}.$$

式中

$$\begin{aligned} \bar{X} &= (\bar{p}, \bar{r}, \bar{h}, \bar{E}, \bar{l}, \bar{C}_s, \bar{C}_g)^T \\ &= (2.94, 3000, 22, 2 \times 10^5, 500, 0.9, 0.9)^T. \end{aligned}$$

模型特征矩阵为对角阵 $W_X = \text{Diag}(1/0.15^2, 1/180^2, 1/1.1^2, 1/(0.17 \times 10^5)^2, 1/48^2, 1/0.17^2, 1/0.15^2)$, $\tilde{\theta}$ 为半梯形偏小型分布, 在区间 $[1, 2]$ 内, 其可能性分布函数值由 1 线性降低到 0.

在本例中, 仍采用 7 个节点的 Gauss-Legendre 求积公式, 7 个相应的截集水平和求积系数同算例 1.

各个截集水平下的稳健可靠性指标为

$$\begin{aligned} \eta(\lambda_1) &= 1.8974; \quad \eta(\lambda_2) = 0.98536; \\ \eta(\lambda_3) &= 1.7230; \quad \eta(\lambda_4) = 1.0400; \\ \eta(\lambda_5) &= 1.5000; \quad \eta(\lambda_6) = 1.1425; \quad \eta(\lambda_7) = 1.2971. \end{aligned}$$

由于 $\eta(\lambda_2) < 0$, 需要计算该截集水平下的体积比可靠性指标, 计算得到相应的失效度为 0.66×10^{-7} .

根据 Gauss-Legendre 求积公式(24), 结构总体非概率可靠性综合指标为

$$R' \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n A_i \kappa(\lambda_i) = 1.34956.$$

如果在可靠性分析中, 仅基于刚性凸集模型(即模糊凸集的核), 得到的可靠度结果为 1.9521. 由此可见, 基于传统刚性凸集模型而得到的可靠度结果高于由模糊凸集而得到的结果. 因此, 当我们不能确切知道参数的波动范围时, 文中建立的可靠性模型能够有效降低基于传统刚性凸集模型的可靠性分析所隐含的风险.

实际计算中, 为了获得更精确的计算结果, 还可以选用更多节点的 Gauss-Legendre 求积公式.

7 结论

本文对非概率可靠性问题进行了系统研究. 研究建立了一种新的不确定性量化模型——模糊凸集模型, 并通过引入一个新的参数——模糊扩展参数, 建立了几种典型的模糊凸集模型. 在此基础上, 建立了一种结构非概率可靠性的综合模型, 并采用 Gauss-Legendre 求积公式解决了可靠性指标的求解问题.

(1) 模糊理论不涉及重复试验的思想, 与凸集理论一样, 非常适合于小样本问题. 当样本数目特别小时, 难以获知参数变化的确切范围, 普通凸集模型可能含有巨大的误差. 本文所提的模糊凸集模型可以

有效避免大误差的发生。

(2) 所提的可靠性模型不仅综合了稳健可靠性和基于体积比的可靠性模型的优势, 且考虑了结构参数的模糊性质或凸集模型的模糊性质。

(3) 尽管本文的研究主要讨论的是结构可靠性问题, 但是所提出的方法不难应用到其他的工程问题, 比如结构静力响应分析和特征值问题、寿命预测、屈曲和后屈曲等问题, 这些问题值得进一步研究。

致谢 衷心感谢多位审稿人在百忙之中对稿件的审阅和提出的宝贵意见!

参考文献

- 1 刘开第, 吴和琴, 王念鹏, 等. 未确知数学. 武汉: 华中理工大学出版社, 1997
- 2 Ben-Haim Y, Elishakoff I. Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1990
- 3 Ben-Haim Y. A non-probabilistic concept of reliability. Struct Safety, 1994, 4: 227–245
- 4 Ben-Haim Y. A non-probabilistic measure of reliability of linear systems based on expansion of convex models. Struct Safety, 1995, 2: 91–109
- 5 Elishakoff I. Discussion on: A non-probabilistic concept of reliability. Struct Safety, 1995, 3: 195–199
- 6 Li Y H, Huang H Z, Liu Z H. Convex model in robust reliability analysis of structure (in Chinese). J Basic Sci Eng, 2004, 12(4): 383–391 [李永华, 黄洪钟, 刘忠贺. 结构稳健可靠性分析的凸集模型. 应用基础与工程科学学报, 2004, 12(4): 383–391]
- 7 Guo S X, Lu Z Z, Feng Y S. A non-probabilistic model of structural reliability based on interval analysis (in Chinese). Chin J Comput Mech, 2001, 18(1): 56–60 [郭书祥, 吕震宙, 冯元生. 基于区间分析的结构非概率可靠性模型. 计算力学学报, 2001, 18(1): 56–60]
- 8 Qiu Z P, Chen S Q, Wang X J. Criterion of the non-probabilistic robust reliability for structures (in Chinese). Chin J Comput Mech, 2004, 21(1): 1–6 [邱志平, 陈山奇, 王晓军. 结构非概率鲁棒可靠性准则. 计算力学学报, 2004, 21(1): 1–6]
- 9 Wang X J, Qiu Z P. Robust reliability of structural vibration (in Chinese). J Beijing Univ Aeron Astron, 2003, 29(11): 1006–1010 [王晓军, 邱志平. 结构振动的鲁棒可靠性. 北京航空航天大学学报, 2003, 29(11): 1006–1010]
- 10 Cao H J, Duan B Y. An approach on the non-probabilistic reliability of structures based on uncertainty convex models (in Chinese). Chin J Comput Mech, 2005, 22(5): 546–549 [曹鸿钧, 段宝岩. 基于凸集合模型的非概率可靠性研究. 计算力学学报, 2005, 22(5): 546–549]
- 11 Wang X J, Qiu Z P, Wu Z. Non-probabilistic set-based model for structural reliability (in Chinese). Chin J Theor Appl Mech, 2007, 39(5): 641–646 [王晓军, 邱志平, 武哲. 结构非概率集合可靠性模型. 力学学报, 2007, 39(5): 641–646]
- 12 Zhou L, An W G, An H. Non-probabilistic reliability analysis of supercavitating vehicles based on structure strength and buckling (in Chinese). J Harbin Eng Univ, 2009, 30(4): 362–367 [周凌, 安伟光, 安海. 超空泡运动体强度与稳定性的非概率可靠性分析. 哈尔滨工程大学学报, 2009, 30(4): 362–367]
- 13 Qiao X Z, Qiu Y Y, Kong X G. A non-probabilistic model of structural reliability based on ellipsoidal convex model (in Chinese). Eng Mech, 2009, 26(11): 203–208 [乔心州, 仇原鹰, 孔宪光. 一种基于椭球凸集的结构非概率可靠性模型. 工程力学, 2009, 26(11): 203–208]
- 14 Hong D P, Ma X B, Zhao Y, et al. Non-probabilistic model for structural reliability based on tolerance analysis (in Chinese). J Mech Eng, 2010, 46(4): 157–162 [洪东跑, 马小兵. 基于容差分析的结构非概率可靠性模型. 机械工程学报, 2010, 46(4): 157–162]
- 15 Sun W C, Yang Z C. New model for reliability analysis of structures with interval parameters (in Chinese). J Naval Univ Eng, 2011, 23(3): 62–66 [孙文彩, 杨自春. 区间参数结构可靠性分析新模型. 海军工程大学学报, 2011, 23(3): 62–66]
- 16 Luo Y J, Kang Z, Li A. Structural reliability assessment based on probability and convex set mixed model. Comput Struct, 2009, 87(21–22): 1408–1415
- 17 Kang Z, Luo Y J. Reliability-based structural optimization with probability and convex set hybrid models. Struct Multidisc Opt, 2010, 42(1): 89–102
- 18 Yang Z C, Sun W C. A set-based method for structural eigenvalue analysis using Kriging model and PSO algorithm. Comput Model Eng Sci, 2013, 92(2): 193–212
- 19 Sun W C, Yang Z C, Li K F. Non-deterministic fatigue life analysis using convex set models. Sci China-Phys Mech Astron, 2013, 56(4): 765–774
- 20 Zhou L, An W G, Jia H G. Definition and solution of reliability comprehensive index of super-ellipsoid convex set (in Chinese). Acta Aeron Astron Sin, 2011, 32(11): 2025–2035 [周凌, 安伟光, 贾宏光. 超椭球凸集合可靠性综合指标定义及求解方法. 航空学报, 2011, 32(11): 2025–2035]

2025–2035]

- 21 Zadeh L A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets Syst*, 1978, 1: 3–28
- 22 杨纶标, 高英仪. 模糊数学原理及应用. 广州: 华南理工大学出版社, 2005
- 23 邱志平. 非概率集合理论凸方法及其应用. 北京: 国防工业出版社, 2005
- 24 李昆峰. 基于 Info-Gap 理论的结构非概率可靠性方法研究. 武汉: 海军工程大学博士学位论文, 2012
- 25 颜庆津. 数值分析. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2006
- 26 Guo S X, Zhang L, Li Y. Procedures for computing the non-probabilistic reliability index of uncertain structures (in Chinese). *Chin J Comput Mech*, 2005, 22(2): 227–231 [郭书祥, 张陵, 李颖. 结构非概率可靠性指标的求解方法. *计算力学学报*, 2005, 22(2): 227–231]

A non-probabilistic model of structural reliability based on fuzzy convex set model

SUN WenCai^{1,2*} & YANG ZiChun^{1,2}

¹ College of Power Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China;

² Laboratory of High Temperature Structural Composites for Ships, Navy University of Engineering, Wuhan 430033, China

In small sample size problems, it is difficult to judge and control the errors of the ordinary rigid convex model. In view of this, a new uncertainty model named fuzzy convex set model was built, whose properties were systematically researched. Some typical models were established by introducing a new parameter named fuzzy extending parameter into the ordinary convex models. A comprehensive and integral reliability model was presented on the basis of the new uncertainty model. The Gauss-Legendre integral formula was used for the reliability calculation. Two examples were given and showed the rationality and feasibility of the proposed uncertainty and reliability models.

structural reliability, non-probabilistic, fuzzy convex set model, robust reliability, Gauss-Legendre integral formula

PACS: 02.40.Ft, 07.05.Mh, 46.55.+d

doi: 10.1360/SSPMA-2014-00109