中 国 科 学

1983 年 8 月 A 辑 第 8 期

椭圆型拟微分算子在 $L_N^p(R^n)$ 中的 Fredholm 理论的 Banach 代数方法

孙 顺 华

(四川大学数学系,成都)

摘 要

本文利用 Banach 代数方法证明了伪微分算子 N 阶阵在 $L_N^p(R^n)$ $(p>1)$ 中为 Fredholm 的充要条件是:相应的符号矩阵的行列式处处不为零. 对 $p=2$ 或 $N=1$ 的特殊情况,此结果是人们所熟知的.

一、引 言

在文献 [1] 中, Cordes 对某类拟微分算子不仅建立了单个算子,而且建立了算子(无穷维)组在 $L^2(R^n)$ 中的 Fredholm 理论. 在单个算子的情形下, Illner[2] 将 Cordes 的理论推广到 $L^p(R^n)$ 中. 本文中将看到,相应在 $L^p(R^n)$ 中的算子组的 Fredholm 理论,也能由作者的工作[3]得到. 在算子组情形下的困难在于,由拟微分算子(在 $L_N^p(R^n)\equiv\underbrace{L^p(R^n)\oplus\cdots\oplus L^p(R^n)}_{N}$ 中)矩阵生成的子代数(模以紧算子集合),既不是可换的,也不是 C^*-代数. 因此无论是 Corde 或是 Illner 的理论都不能直接用于此文.

值得指出,由 Fredholm 算子的扰动理论,并结合本文定理 3.1, 我们可以推广本文的结果至无穷维算子组情形.

今引入一些基本概念[1,2].

定义 1.1. 以 $CB(R^n)$ 表示在 R^n 上连续且有界的全体函数所组成的代数, 其范数取为寻常的最大模. 我们定义 $CB(R^n)$ 的子代数 A_∞, $CM(R^n)$ 和 M^0 如下:

$$A_\infty=\{a\in C^\infty(R^n);\ \|a\|_{L^\infty}<\infty,\ \lim_{|x|\to\infty}|D^\alpha a(x)|=0\},$$

此处 α 为一切可能的 multi-index;

$$CM(R^n)=\{u\in CB(R^n);\ \lim_{|x|\to\infty}cm_{x,\eta}(u)=0,\ 0<\eta<\infty\},$$

此处 $c_{m,\eta}(u)=\sup\limits_{|x-y|<\eta}|u(y)-u(x)|$;

$$M^0=\{b\in C^\infty(R^n);\ (1+|x|)^{|\alpha|}D^\alpha b(x)=O(1),$$
$$|\alpha|\leqslant[n/2]+1,\text{ 且 } D^\alpha b \text{ 当 } |\alpha|\leqslant n \text{ 时缓增}\}.$$

此外,以 $CM_e(R^n)$ 表示 $CM(R^n)$ 中一切偶函数组成的子代数. 相仿定义 M^0 的子代数 M_e^0.

本文 1981 年 11 月 28 日收到, 1982 年 8 月 20 日收到修改稿.

定义 1.2. 记 $b(D)=F^{-1}bF$ $(b\in M^0)$，此处 F 为 Fourier 变换．以 A_1 表示 M^0 在 CB 中按范数 $\|\cdot\|^\infty$ 的闭包．以 A_2 表示由 $b(D)(b\in M^0)$ 生成的代数，在 $B(L^p)$ ($L^p(R^n)$ 上的全体有界算子）中的闭包．我们把 CM 看成为 L^p 中的有界算子 $u(M)$，其运算为 $u(M)f=u\cdot f$．于是 $\|u(M)\|_{L^p}=\|u\|_\infty$．令 $\mathring{\mathfrak{A}}$ 为 $B(L^p)$ 中由 CM，A_2 和 $\mathfrak{C}$ 生成的子代数，其中 $\mathfrak{C}$ 为 $B(L^p)$ 中全体紧算子子代数．以 $\mathfrak{A}$ 表示 $\mathring{\mathfrak{A}}$ 在 $B(L^p)$ 中的闭包．类似地，以 $\mathfrak{A}_c$，$\mathfrak{A}^c$ 分别表示由 CM_c，A_2，$\mathfrak{C}$ 和 CM，$\{b(D);\ b\in M_c^0\}$，$\mathfrak{C}$ 生成的 $B(L^p)$ 的闭子代数．

定义 1.3. 令 $\tau: B(L^p)\to B(L^p)/\mathfrak{C}$ 为法式同态．对任一 $A=\sum_{i=1}^N a_ib_i(D)\in\mathring{\mathfrak{A}}$，我们在 $\mathring{\mathfrak{A}}$ 上定义一个对合 $*$，并在 $\tau(\mathring{\mathfrak{A}})$ 上定义一个诱导对合 $*$ 如下：

$$A^*=\left(\sum_{i=1}^N a_ib_i(D)\right)^*=\sum_{i=1}^N \bar{a}_i\bar{b}_i(D)=\sum_{i=1}^N \bar{a}_iF^{-1}\bar{b}F,\tag{1.1}$$

以及

$$(\tau A)^*=\tau(A^*).\tag{1.2}$$

由于交换子 $[a(M),b(D)]\in\mathfrak{C}$，$\forall a\in CM$，$b\in M^0$（见文献[2]），在 $\tau(\mathring{\mathfrak{A}})$ 上的(诱导)对合 $*$ 是 $\tau(\mathring{\mathfrak{A}})$ 中的一个同态．我们称 $\mathfrak{A}$ 的闭子代数 $\mathfrak{A}_s$ 是 $(CM, A_2, *, p)$ 型的，如果 i) $\mathfrak{A}_s\cap\mathring{\mathfrak{A}}$ 由(闭)子代数 $\mathfrak{A}_s\cap CM$ 和 $\mathfrak{A}_s\cap A_2$ 生成．ii) 子代数 $\mathfrak{A}_s\cap CM$ 和 $\mathfrak{A}_s\cap A_2$ 在对合 (1.1) 下是完全对称的，亦即对任意 $A\in\mathfrak{A}_s\cap CM$（或 $\mathfrak{A}_s\cap A_2$），恒有：A^* 和 $(I+A^*A)^{-1}$ 均属于 $\mathfrak{A}_s\cap CM$（或 $\mathfrak{A}_s\cap A_2$）．iii) 在 $\tau(\mathfrak{A}_s\cap\mathring{\mathfrak{A}})$ 上由 (1.2) 式给出的(诱导)对合 $*$ 能按范数 $\|\cdot\|_{\tau(B(L^p))}$($=\|\cdot\|_{B(L^p)/\mathfrak{C}}$) 连续延拓至(闭)子代数 $\tau\mathfrak{A}_s$．

注 1.1. 当 $p=2$ 时，$\mathfrak{A}$ 本身是 $(CM, A_2, *, 2)$ 型的．在第三节，我们将证明，对任意 $p>1$，代数 $\mathfrak{A}_c$ 和 $\mathfrak{A}^c$ 均是 $(CM, A_2, *, p)$ 型的．我们不知道 $\mathfrak{A}$ 本身是否是 $(CM, A_2, *, p)$ 型的．

记 $\mathfrak{A}_{N,S}=\{(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant N};\ a_{i,j}\in\mathfrak{A}_s\ 1\leqslant i,j\leqslant N$，其中 $\mathfrak{A}_s$ 为一 $(CM, A_2, *, p)$ 型的代数．显然 $\mathfrak{A}_{N,S}$ 是 $B(L_N^p)$ 的一个子代数．现在可以叙述我们的主要问题如后：什么时候算子 $A(\in\mathfrak{A}_{N,S})$ 在 $L_N^p(R^n)$ 中是 Fredholm 的?

二、G-完全对称 Banach 代数

定义 2.1.[3] 设 R 为一具有单位元 e 的 Banach 代数（未必可交换），$G\subset R$ 为一包含 e 的子代数(未必可交换，也未必在 R 中闭)．我们称 R 为一 G-完全对称 Banach 代数，如果存在一个仅仅在 G 上有定义的对合 $*$，使得

$$\left.\begin{array}{l}\text{a) } (\lambda x+\mu y)^*=\bar{\lambda}x^*+\bar{\mu}y^*,\\ \text{b) } (x^*)^*=x,\\ \text{c) } (xy)^*=y^*x^*,\end{array}\right\}\forall x,y\in G,\ \lambda,\mu\in\boldsymbol{C},$$

d) 对合 $*$ 关于 $\|\cdot\|_R$ 是连续的，亦即若 $\|x_n\|\to 0$ $(n\to\infty)$，则必 $\|x_n^*\|\to 0$ $(n\to\infty$，$\forall x_n\in G$，$n\geqslant 1)$，

e) 在某一辅助范数 $\|\cdot\|_G$ 下，G 成为一个完全对称的 Banach 代数，亦即 i) $*$ 关于 $\|\cdot\|_G$ **连**

续，ii) G 在 $\|\cdot\|_G$ 下完备，iii) $(e+x^*x)^{-1}\in G$, $\forall x\in G$.

引理 2.1.[3] 设 R 为一 G-完全对称的 Banach 代数，则 $x\in G$ 在 R 中可逆的充要条件是 x^* $(\in G)$ 在 R 中可逆.

证. 用反证法. 由反证法的假设，至少存在一 $x\in G$，使得 x 在 R 中可逆，但 x^* 在 R 中不可逆. 因此存在 $T\in R$ 适合

$$xT = Tx = e. \tag{2.1}$$

令 R_x 为 R 中包含 xx^* 的极大可交换子代数. 极大性导致 R_x 的闭性. 由 G 的条件 e)，易知 $(\varepsilon+xx^*)^{-1}\in R_x$, $\forall\varepsilon>0$. 由于 x^* 在 R 中不可逆，故 xx^* 在 R 中亦无逆元. 因而实数零是 xx^* 在 R_x 中的谱集 $\sigma_{R_x}(xx^*)$ 的边界点.

记

$$y_\varepsilon = \frac{(\varepsilon+xx^*)^{-1}}{\|(\varepsilon+xx^*)^{-1}\|_R},\quad \varepsilon>0. \tag{2.2}$$

根据熟知结果(见文献 [4] P.177)，得

$$xx^*y_\varepsilon = y_\varepsilon xx^* = \frac{e}{\|(\varepsilon+xx^*)^{-1}\|_R} - \varepsilon y_\varepsilon \to 0 \quad 当\ \varepsilon\downarrow 0. \tag{2.3}$$

以 x^*y_ε 右乘 (2.1) 式，从 (2.3) 式知，

$$x^*y_\varepsilon \to 0,\ 当\ \varepsilon\downarrow 0. \tag{2.4}$$

由 G 的条件 d) 和 $y_\varepsilon^* = y_\varepsilon$ 这一事实，(2.4) 式导致

$$y_\varepsilon x \to 0,\ 当\ \varepsilon\downarrow 0. \tag{2.5}$$

现在以 y_ε 左乘 (2.1) 式，即得

$$y_\varepsilon = y_\varepsilon xT \to 0,\ 当\ \varepsilon\downarrow 0. \tag{2.6}$$

这与 $\|y_\varepsilon\|_R = 1$ 矛盾.

我们的主要定理为:

定理 2.1.[3] 设 R 为一 G-完全对称 Banach 代数，则 $x\in G$ 在 R 中可逆的充要条件是 x 在 G 中可逆.

证. 根据引理 2.2，我们只需对形如 $x=yy^*$ $(y\in G)$ 的情形来证明定理就够了. 我们仍然用反证法.

根据反证法的假设，存在某 $y\in G$，使得 yy^* 在 R 中有逆元，但此逆元不属于 G. 亦即存在 $\theta\in R\backslash G$，适合

$$yy^*Q = Qyy^* = e. \tag{2.7}$$

不失一般性，假定 yy^* 在 G 中无左逆. 今以 $I_l(G,y)$ 表示完全对称 Banach 代数 G (注意 G 的条件 e)) 中包含 yy^* 的一个极大左理想. 于是 $I_l(G;y)$ 在 G 中闭. 由文献 [4] 知，在 G 上存在一正泛函 $f(x)$，使得

$$f(e)=1,\ f(x^*x)=0,\ \forall x\in I_l(G;y). \tag{2.8}$$

令 Ω 为 R 中包含 yy^* 的一个极大可交换的子代数. 根据 (2.7) 式及 G 的条件 e)，显然有 $(\lambda+yy^*)^{-1}\in\Omega$, $\forall \mathrm{Re}\lambda>0$ 或 $\mathrm{Im}\lambda\neq 0$. Ω 的 Gelfand 空间记为 $\mathscr{M}(\Omega)$. 于是有(见文献 [4]):

$$yy^*(m)\geqslant 0\quad m\in\mathscr{M}(\Omega), \tag{2.9}$$

且

$$(Q\cdot yy^*)(m)=Q(m)yy^*(m)=1,\quad m\in\mathscr{M}(\Omega).\tag{2.10}$$

因此

$$Q(m)>0,\quad m\in\mathscr{M}(\Omega).\tag{2.11}$$

令 $H_\Omega=\{x\in\Omega:x(m)\in\boldsymbol{R}\quad m\in\mathscr{M}(\Omega)\}$. 记 $P_\Omega=\{x\in\Omega;\ x(m)\in\boldsymbol{R}^+\ m\in\mathscr{M}(\Omega)\}$. 显然 $P_\Omega\subset H_\Omega\subset\Omega$, 且 H_Ω 为一实线性空间. 由于 Ω 是可交换的,故锥 $P_\Omega(\subset H_\Omega)$ 含有内点 e. 今以 N_y 表示由 e, yy^* 和 $(yy^*)^2$ 张成的实线性子空间 $(\subset H_\Omega)$. 显然 $N_y\cap P_\Omega$ 含有 P_Ω 的内点 e. 记按条件 (2.8) 确定的 G 上的正泛函 f 在 N_y 上的限制为 $\hat{f}$. 由 f, $\hat{f}$ 的定义,知 $\hat{f}$ 为 N_y 上的正泛函. 至此由熟知的 Klein 定理(见文献 [4] p. 63), $\hat{f}$ 可延拓成 H_Ω 上(关于 P_Ω) 的正泛函 F. 由于 Ω 为可交换 Banach 代数,故 $x^2=x\cdot x\in P_\Omega$, $\forall x\in H_\Omega$ (事实上, $x^2(m)=(x(m))^2\geqslant 0$ $m\in\mathscr{M}(\Omega)$, $x\in H_\Omega$). 又由 $F(x)\geqslant 0$ $x\in P_\Omega$, 即可得 Cauchy-schwartz 不等式

$$|F(xy)|^2\leqslant F(x^2)\cdot F(y^2),\quad \forall x,y\in H_\Omega.\tag{2.12}$$

由 (2.7), (2.8) 及 (2.12) 式得

$$\begin{aligned}1=\hat{f}(e)=F(e)&=F(Qyy^*)\leqslant F(Q^2)\cdot F((yy^*)^2)\\&=F(Q^2)\hat{f}((yy^*)^2)=F(Q^2)f((yy^*)^2)=0.\end{aligned}\tag{2.13}$$

上式导致矛盾. 定理 2.1 得证.

三、关于 $\mathfrak{A}_{N,s}$ 的 Fredholm 理论

命题 3.1. 由(1.2)式给出的,定义在 $\mathfrak{A}_e\cap\mathring{\mathfrak{A}}$ 和 $\mathfrak{A}^e\cap\mathring{\mathfrak{A}}$ 上的对合,关于 $\|\cdot\|_{\tau(B(L^p))}$ 是连续的.

证. 记 $(Tf)(x)\equiv f(-x)$, $(Jf)(x)\equiv\bar{f}(x)$, $x\in R^n$, $f\in L^p(R^n)$. 显见, T^2 和 J^2 均是恒等算子,且 $\|Tf\|=\|Jf\|=\|f\|$, $f\in L^p(R^n)$. 因而对 $A=\sum_{i=1}^N a_ib_i(D)\in\mathfrak{A}_e\cap\mathring{\mathfrak{A}}$, 成立

$$\begin{aligned}A^*f&=\sum_{i=1}^N\bar{a}_iF^{-1}\bar{b}_iFf=J\left(\sum_{i=1}^N a_iFb_iF^{-1}\bar{f}\right)\\&=JT\left(\sum_{i=1}^N(Ta_i)F^{-1}b_iFT\bar{f}\right)=JT\left(\sum_{i=1}^N a_iF^{-1}b_iFT\bar{f}\right)\\&=JTATJf,\quad f\in L^p(R^n),\end{aligned}$$

亦即

$$A^*=JTATJ,\quad A\in\mathfrak{A}_e\cap\mathring{\mathfrak{A}}.\tag{3.1}$$

借助于 (3.1) 式,不难验证

$$\|(\tau A)^*\|_{\tau(B(L^p))}=\|\tau A^*\|_{\tau(B(L^p))}=\|\tau A\|_{\tau(B(L^p))},\quad A\in\mathfrak{A}_e\cap\mathring{\mathfrak{A}}.\tag{3.2}$$

类似地,我们有

$$A^*=JAJ,\quad A\in\mathfrak{A}^e\cap\mathring{\mathfrak{A}}.\tag{3.3}$$

上式同样导致 (3.2) 式对 $A\in\mathfrak{A}^e\cap\mathring{\mathfrak{A}}$ 成立.

推论 3.1. $\mathfrak{A}_e$ 和 $\mathfrak{A}^e$ 均是 $(CM, A_2, *; p)$ 型的

证. 由 $[a(M), b(D)]\in\underline{\mathfrak{C}}$, $\forall a\in CM$, $b\in M^0$ 这一事实,并注意到 CM, A_2 均是完全对

称可换子代数,由命题 3.1 即知,推论 3.1 为真.

引理 3.1. 若代数 $\mathfrak{A}_s$ 是 $(CM, A_2, *, p)$ 型的,则在赋范 $\|\cdot\|_{\tau(B(L^p))}$ 及由 (1.2) 式给出的对合 $*$ 下, $\tau(\mathfrak{A}_s)$ 是一完全对称的可换 Banach 代数.

证. 根据定义,我们只须证明 $(1+\tau A^*\cdot\tau A)^{-1}\in\tau(\mathfrak{A}_s)$, $\forall A\in\mathfrak{A}_s\cap\mathring{\mathfrak{A}}$. 这等价于证明

$$\tau A^*(m)=\overline{\tau A(m)},\quad m\in M_s,\quad A\in\mathfrak{A}_s\cap\mathring{\mathfrak{A}},\tag{3.4}$$

此处 M_s 是 $\tau(\mathfrak{A}_s)$ 的 Gelfand 空间.

今定义 $\pi_1:\mathfrak{A}_s\cap CM\to\tau(\mathfrak{A}_s)$ 及 $\pi_2:\mathfrak{A}_s\cap A_2\to\tau(\mathfrak{A}_s)$, 则 $\pi_1=\tau\circ i_1$, $\pi_2=\tau\circ i_2$, 此处 i_1 和 i_2 分别表示包含映射 $\mathfrak{A}_s\cap CM\to\mathfrak{A}_s$ 和 $\mathfrak{A}_s\cap A_2\to\mathfrak{A}_s$. 以 π_i' 表示 $\pi_i(i=1,2)$ 的对偶映射,则下列映射(见文献 [2] p. 367)

$$\begin{cases}l:M_s\to p_s^n\times H_s^n,\\ l(m)=(\pi_1'(m),\pi_2'(m))\end{cases}\tag{3.5}$$

是映 M_s 成 $p_s^n\times H_s^n$ 中一个紧集的同胚, 此处 p_s^n 和 H_s^n 分别是 $\mathfrak{A}_s\cap CM$ 和 $\mathfrak{A}_s\cap A_2$ 的 Gelfand 空间. 因此任一 $m\in M_s$ 能表示成 $m=(x,\xi)$, 其中 $x\in p_s^n$, $\xi\in H_s^n$, 故对任一 $A=\sum_{i=1}^N a_ib_i(D)$ $(a_i\in\mathfrak{A}_s\cap CM,\ b_i\in\mathfrak{A}_s\cap A_2,\ 1\leqslant i\leqslant N)$, 成立

$$\begin{aligned}\tau A(m)&=\left(\sum_{i=1}^N a_ib_i(D)\right)(m)=\overline{\sum_{i=1}^N a_i(\pi_1'(m))b_i(D)(\pi_2'(m))}\\&=\sum_{i=1}^N a_i^*(\pi_1'(m))b_i^*(D)(\pi_2'(m))=\overline{(\tau A)^*(m)}.\end{aligned}$$

上式第三等式系由下列事实直接得到: $\tau(\mathfrak{A}_s\cap CM)$ 和 $\tau(\mathfrak{A}_s\cap A_2)$ 均是完全对称的可换 Banach 代数.

引理 3.1 得证.

我们记 $\mathfrak{A}_{N,S}=\{(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant N}:a_{ij}\in\mathfrak{A}_s,\ 1\leqslant i,\ j\leqslant N$, 此处 $\mathfrak{A}_s$ 为一 $(CM, A_2, *, p)$ 型代数$\}$. 我们的基本定理如下:

定理 3.1. $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant N}\in\mathfrak{A}_{N,S}$ 在 $L_N^p(R^n)$ 上为 Fredholm 的,当且仅当

$$\det((\tau a_{ij})(m))_{1\leqslant i,j\leqslant N}\neq 0,\quad\forall m\in M_s,$$

其中 M_s 为 $\mathfrak{A}_s$ 的 Gelfand 空间.

证. 令 $G=\tau\mathfrak{A}_{N,S}=\{(\tau a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant N}:(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant N}\in\mathfrak{A}_{N,S}\}$, 其中赋范 $\|\cdot\|_G=\|\cdot\|_{B(L_N^p(R^n))/\underset{\sim}{C}}$, 而 $\underset{\sim}{C}$ 表示 $B(L_N^p(R^n))$ 中的全体紧算子所组成的子代数. 在 G 的一稠集上, 我们引入对合 $*$ 如下:

$$(\tau A)^*=(\tau a_{ij})^*_{1\leqslant i,j\leqslant N}\equiv(\tau a_{ij}^*)^T_{1\leqslant i,j\leqslant N},\quad a_{ij}\in\mathfrak{A}_s\cap\mathring{\mathfrak{A}},1r\leqslant i,\ j\leqslant N,\tag{3.6}$$

其中符号 T 表示转置矩阵. 由 $\mathfrak{A}_s$ 的假设条件 iii), (3.6) 式给出的对合 $*$ 能按范数 $\|\cdot\|_G$ 连续地延拓到整个 G 上. 记 $R=B(L_N^p(R^n))/\underset{\sim}{C}$. 于是由引理 3.1 易知, R 为一 G-完全对称的 Banach 代数.

众知周知, $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant N}$ 是 Fredholm 的,当且仅当 τA 在 $B(L_N^p(R^n))/\underset{\sim}{C}(\equiv R)$ 中有逆. 根据定理 2.1, 后者又等价于 τA 在 G 中可逆. 由于 $\tau\mathfrak{A}_s$ 为一可换 Banach 代数,易知, τA

在 G 中可逆的充要条件为:

$$\det((\tau a_{ij})(m))_{1\leqslant i,j\leqslant N}\neq 0,\ \forall m\in M_s.$$

定理 3.1 得证.

注 3.1. 以 P^n, P_e^n, H^n 和 H_e^n 分别表示代数 CM, CM_e, A_1 和 $A_{1e}=\{b\in A_1:b(x)=b(-x)\ \forall x\in R^n\}$ 的 Gelfand 空间,则相似于文献 [2] 中的证明,可得

$$M_e=\partial(P_e^n\times H^n),\quad M^e=\partial(P^n\times H_e^n).$$

此处 M^e 和 M^e 分别是代数 $\tau\mathfrak{A}_e$ 和 $\tau\mathfrak{A}^e$ 的 Gelfand 空间. 此外,在自然嵌入下, R^n 稠密于诸空间 P^n, P_e^n, H^n 和 H_e^n.

四、无界算子的 Fredholm 准则

设 $N_{ij}=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m_j}a_\alpha^{(i,j)}(x)D^\alpha$ $(1\leqslant i,j\leqslant N)$ 分别为系数 $a_\alpha^{(i,j)}\in CM_e$ 的 m_j 阶 $(1\leqslant j\leqslant N)$ 线性微分算子,于是算子

$$L=(N_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant N}\cdot\begin{pmatrix}(1-\Delta)^{-m_1/2} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & (1-\Delta)^{-m_N/2}\end{pmatrix}$$

属于 $\mathfrak{A}_{N,e}=\{(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant N}:a_{i,j}\in\mathfrak{A}_e,\ 1\leqslant i,\ j\leqslant N\}$. 显然, $N=(N_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant N}:W_{p,m_1}\oplus\cdots\oplus W_{p,m_N}\to L_N^p$ 是 Fredholm 的, 当且仅当 $L:L_N^p\to L_N^p$ 是 Fredholm 的. 因此, 由推论 3.1, 定理 3.1 和注 3.1 得

定理 4.1. 算子 $N=(N_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant N}:W_{p,m_1}\oplus\cdots\oplus W_{p,m_N}\to L_N^p$ 为 Fredholm 的, 如果它满足

$$\inf_{x\in R^n}\left|\lim_{|\xi|\to\infty}\det\left(\sum_{|\alpha|\leqslant m_j}a_\alpha^{(i,j)}(x)(1+|\xi|^2)^{-m_j/2}\cdot\xi^\alpha\right)_{1\leqslant i,j\leqslant N}\right|>0$$

及

$$\inf_{\xi\in R^n}\left|\lim_{|x|\to\infty}\det\left(\sum_{|\alpha|\leqslant m_j}a_\alpha^{(i,j)}(x)(1+|\xi|^2)^{-m_j/2}\cdot\xi^\alpha\right)_{1\leqslant i,j\leqslant N}\right|>0.$$

在一些特殊情况下,我们不仅能明显地写出 Fredholm 性质成立的充分条件, 而且也能写出其必要条件. 例如,考察算子

$$\begin{cases}N_\lambda=\begin{pmatrix}\lambda-\Delta & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda-\Delta\end{pmatrix}+(V_{ij}(M))_{1\leqslant i,j\leqslant N}:W_{p,2}\oplus\cdots\oplus W_{p,2}\to L_N^p, \\ \text{其中 } V_{ij}(x)\in CS(R^n),\ p>1,\ \lambda \text{ 为复数,而代数 } CS(R^n) \text{ 将在下面马上给出.}\end{cases}\tag{4.1}$$

算子 N_λ 在物理上是有直接意义的(见文献 [5]). 现在我们定义 $CS(R^n)$ 如下 (参见文献 [1] p. 133):

$$CS(R^n)=\{a\in C(R^n):a\circ S^{-1}\in C(B^n)\}.$$

此处 $B^n=\{y\in R^n:|y|\leqslant 1\}$ 是 R^n 中的闭单位球,而 $S(x)=x/(1+|x|^2)^{1/2},x\in R^n$. 显然 $CS(R^n)$ 为 $CM(R^n)$ 的一个子代数. 今以 $\mathfrak{A}_c$ 表示 $B(L^p)$ 中由 $CS(R^n)$, $\{b(D):b\in M_c^0\}$ 和 $\mathbb{C}$ 生成的代数. 易知 $\mathfrak{A}_c\subset\mathfrak{A}^e$, 且(注意命题 3.1) $\mathfrak{A}_c$ 是 $(CM, A_2, *, P)$ 型的. 因此由定理 3.1 直接得到

$$\begin{cases} N:\underbrace{W_{p,2}\oplus\cdots\oplus W_{p,2}}_{N}\to L_N^p \text{ 是 Fredholm 的,当且仅当} \\ \det\left\{\begin{pmatrix}\left(F^{-1}\dfrac{\lambda+|\xi|^2}{1+|\xi|^2}F\right)(m) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \left(F^{-1}\dfrac{\lambda+|\xi|^2}{1+|\xi|^2}F\right)(m)\end{pmatrix}+\left(\left(V_{ij}F^{-1}\dfrac{1}{1+|\xi|^2}F\right)_{1\leqslant i,j\leqslant N}(m)\right)\right\} \\ \neq 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (4.2) \\ \forall m\in M_c,\text{ 此处 } M_c \text{ 为 } \tau\mathfrak{A}_c \text{ 的 Gelfand 空间.}\end{cases}$$

此外不难验证 $CS(R^n)$ 的 Gelfand 空间同胚于 L^n· 与文献 [2] 相似，可得 $M_c=(\partial B^n)\times H_c^n\cup(B^n\times\partial(H_c^n))$，这里我们已通过映射 S 将 R^n 嵌入到 B^n 中. 由 (3.5) 式知，对任意 $m\in B^n\times\partial(H_c^n)$，(4.2) 式中的行列式值恒为 1. 相似地，对任意 $m\in\partial B^n\times H_c^n$，相应的行列式值为:

$$\det\left(\begin{pmatrix}\dfrac{\lambda+|\xi|^2}{1+|\xi|^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \dfrac{\lambda+|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\end{pmatrix}+\frac{(V_{ij}\circ S^{-1}(y))_{1\leqslant i,j\leqslant N}}{(1+|\xi|^2)}\right),\ \forall|y|=1,\ \xi\in H_c^n.$$

从而我们得到

定理 4.2. 由 (4.1) 式给出的映 $\underbrace{W_{p,2}\oplus\cdots\oplus W_{p,2}}_{N}$ 到 L_N^p 的算子 N_λ 是 Fredholm 的，当且仅当

$$\inf_{|y|=1,\xi\in R^n}\left|\det\left(\begin{pmatrix}\dfrac{\lambda+|\xi|^2}{1+|\xi|^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \dfrac{\lambda+|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\end{pmatrix}+\frac{(V_{ij}\circ S^{-1}(y))_{1\leqslant i,j\leqslant N}}{(1+|\xi|^2)}\right)\right|>0.$$

参 考 文 献

[1] Cordes, H. O., *Lectutre Notes in Math.*, No. 756, Spring-Verlag, 1979.
[2] Illner, R., *Commun. on Partial Diff. Equ.*, **2**(1977), 359—393.
[3] 孙顺华,科学通报, **24** (1979), 385—388.
[4] Naimark, M. A., *Normed Algebras*, Russian, 1956.
[5] Talenti, G., *Symposia Math.*, Vol. VII, 1979, 185—232.