



论 文

集成于薄板的压电型随机振动能量收集器件优化设计

田燕萍*, 张熙伦

杭州电子科技大学机械工程学院, 杭州 310018

* E-mail: tianyanp@sina.cn

收稿日期: 2016-03-15; 接受日期: 2016-08-15; 网络出版日期: 2016-10-28

国家自然科学基金(批准号: 11302064, 51405118)资助项目

摘要 将压电薄膜粘贴于方形薄板表面即构成实用的振动能量收集器件, 本文研究此类器件在受到宽带随机点激励作用时以平均输出功率最大为目标的优化设计问题, 具体包括压电片布置位置和尺寸要求、最优负载电阻等。首先, 导出机电耦合系统关于位移和输出电压的随机偏微分-积分方程组, 通过模态分析技术消去空间项得到关于主坐标和电压的无限维随机常微分方程组。进而, 由线性随机振动理论建立平均输出功率的解析表达, 优化问题据此展开。研究表明: 宽带激励作用时, 压电片最优中心位置处于激励点及与之相应的 3 个对称点; 在最优布置条件下, 平均输出功率随压电片尺寸增加近于单调增加, 而增速渐缓, 据此可定义最优尺寸; 在最优布置条件下, 平均输出功率随外接电阻的变化有极值出现, 可由此断定最优负载电阻。上述研究揭示了对称最优布置位置的存在性及输出功率对布置位置的敏感性, 对平板型随机振动能量收集器件的优化设计有一定的指导意义。

关键词 压电型能量收集器件, 宽带随机振动, 薄板, 优化设计, 平均输出功率

1 引言

振动能量收集技术的发展晚于太阳能和风能等能量收集技术, 这是由于相比于后两者, 该技术能收集到的能量较少, 不足以产生变革性影响。而随着集成电路技术的进步, 电子元器件的几何尺寸和功耗迅速下降, 上述局面得以彻底扭转^[1]。例如, 直接收集周围环境中的振动能量, 可用于实现对大型传感

网络独立供电, 从而彻底摆脱对电池的依赖性, 而电池的定期替换通常是繁琐的甚至需要付出极高代价的工作。无疑地, 直接收集部分环境振动能量从而构建自供电电子设备, 具有极其重要的经济效益和社会价值。

振动能量收集技术多采用电磁感应、电容变化和压电效应等 3 种机电转化机制^[2~4]。由于压电装置结构简单, 且具有发热小、无电磁干扰和易于微型化等

引用格式: 田燕萍, 张熙伦. 集成于薄板的压电型随机振动能量收集器件优化设计. 中国科学: 技术科学, 2016, 46: 1254~1262
Tian Y P, Zhang X L. Optimal design of plate-based random vibration energy harvesting system (in Chinese). Sci Sin Tech, 2016, 46: 1254~1262, doi: 10.1360/N092016-00099

优点, 压电机制在振动能量收集技术中得以大量采用^[1,4,5]。压电型振动能量收集器件的通常形式是, 将压电片粘贴于主结构表面, 主结构在外载荷作用下振动从而引起压电片出现正负交替应变, 压电片通过压电效应产生电压输出, 供给能源给外界负载。在最初的研究工作中, 主结构为形式上最简单的一维梁结构, 其中以悬臂梁结构为主导^[6~8]。基于梁结构的压电型振动能量收集器件在理论分析上相对简单, 并在应用上具有很强的适应性。注意到, 平面结构或近平面结构在工程和工业领域大量存在, 如运载工具车身、机床平台台面、多层建筑外墙或隔板等, 因此, 集成于平板的振动能量收集器件的研究具有重要的实际应用价值^[9,10]。

在机理研究方面, 压电型振动能量收集器件被简化为一个偶联电路系统的单自由度机械振子, 其重点在于准确预测系统在确定性或随机载荷作用下的输出功率。这归结为求解耦合的确定性/随机常微分方程组, 前者相应于确定性激励情形, 而后者相应于随机激励情形。这方面的研究已臻于成熟^[11~14]。在具体的压电型振动能量收集器件研究中, 多数工作都是针对梁型能量收集器件进行的, 且在这些工作中大多集中于谐和外激情形下的理论分析、数值计算、实验研究, 以及压电片形状和尺寸的优化等^[15~18], 在随机激励作用下的优化问题成果很少^[19]。近来, 在确定性激励作用下的板型压电振动能量收集器件方面也已有了不少工作^[9,10], 而其随机方面的研究尚属空白。由于环境激励的本质随机性, 为将其应用于工程实际, 研究宽带随机载荷下以平均输出功率最大为目标的板型能量收集器件优化设计势在必行。

本文即以集成于薄板表面的压电型振动能量收集器件为研究对象, 研究随机激励作用下的优化设计问题。首先, 应用经典板壳理论、压电力学理论及随机振动理论, 导出关于系统位移和电压的随机偏微分-积分方程组, 而后建立限带白噪声作用下平均输出功率的无穷级数表达式。在详细探讨无穷级数收敛性的基础上, 依据此级数式讨论以平均输出功率最大为目标的结构优化设计。具体讨论压电片的最优及最差布置位置, 压电片最优尺寸的存在性以及相应于最大平均输出功率的最优负载的确定等。本文的研究过程和结果对随机振动、特别是宽带随机振动的能量收集技术具有一定的指导意义。

2 集成于薄板的压电型随机振动能量收集器件模型建立

集成于薄板的压电型振动能量收集器件模型化如图 1 所示。以平直薄板为主结构, 其长、宽、高分别为 a, b, h 。矩形压电片完美粘贴于平板上表面, 其长、宽、厚分别为 l_p, w_p, h_p 。压电片上下面分别布置柔性电极, 而外界电阻 R 直接与上下电极相连。建立如图 1 所示坐标系统 $O-xyz$, 参考平面 $z=0$ 取为未变形时平板中面。压电片中心位置坐标记为 (x_m, y_m) , 两典型角点坐标为 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 。平板位置 (x_0, y_0) 处施加随机的集中载荷 $f(t)$ 。

一般的正交各向异性压电材料的物理特性由如下本构方程描述^[10]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & -e_{31} \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & -e_{32} \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & 0 & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ E_3 \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

式中, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ 为正应力和剪应力分量, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ 为正应变和剪应变分量, D_3 和 E_3 分别表示沿板厚方向的电位移和电场强度, Q_{ij} 表示弹性常数, e_{ij} 和 ε_{33}^S 分别表示压电常数和介电常数。而一般正交各向异性材料的本构方程可通过删去式(1)中的电学相关项得到。本文压电片和主结构均取为各项同性材料, 于是有 $e_{31}=e_{32}$, 且弹性常数表示为

$$Q_{11}=Q_{22}=\frac{E}{1-\nu^2}, Q_{12}=Q_{21}=\frac{EV}{1-\nu^2}, Q_{66}=\frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (2)$$

式中, E 为材料弹性模量, ν 为泊松比。基于经典板壳理论的小变形假设, 板内任意一点的应变可表示为

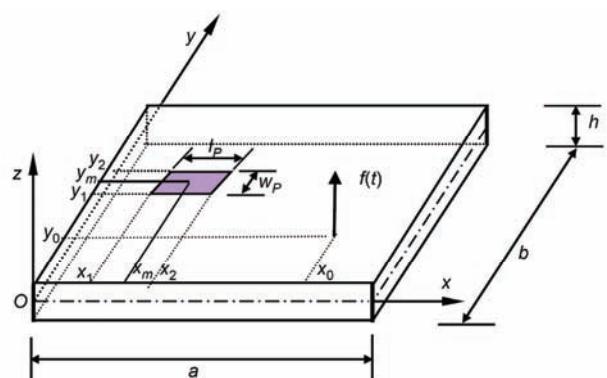


图 1 (网络版彩图)集成于薄板的压电型振动能量收集器件模型

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \varepsilon_z = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (3)$$

式中, w 为板中面沿 z 方向的横向位移.

薄板的运动控制方程表述为如下偏微分形式^[9]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 (M_x^S + M_x^P)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 (M_{xy}^S + M_{xy}^P)}{\partial x \partial y} \\ & + \frac{\partial^2 (M_y^S + M_y^P)}{\partial y^2} - c \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} \\ & - (\rho h + \rho_p h_p) \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} \\ & + f(t) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

式中, M_x, M_y, M_{xy} 表示单位长度的弯矩和扭矩, ρ 表示材料密度, 而上标“S”和“P”分别表示平板和压电层的信息, c 为平板阻尼系数. 薄板单位长度的弯矩和扭矩通过应力定义为

$$\begin{Bmatrix} M_x^S \\ M_y^S \\ M_{xy}^S \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz. \quad (5)$$

将本构方程代入得到用横向位移表示的母板弯矩和扭矩:

$$\begin{Bmatrix} M_x^S \\ M_y^S \\ M_{xy}^S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ -D \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

式中, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ 为平板的弯曲刚度. 压电层的弯矩和扭矩定义为

$$\begin{Bmatrix} M_x^P \\ M_y^P \\ M_{xy}^P \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h+h_p}{2}} \begin{Bmatrix} H(x-x_1) - H(x-x_2) \\ H(y-y_1) - H(y-y_2) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz, \quad (7)$$

其中, $H(\cdot)$ 为 Heaviside 阶跃函数. 将本构关系代入之得到:

$$\begin{aligned} M_x^P = M_y^P &= [H(x-x_1) - H(x-x_2)] \\ &\times [H(y-y_1) - H(y-y_2)] \theta V, \\ M_{xy}^P &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

式中, $\theta = e_{31} \frac{h+h_p}{2}$, $V(t) = -E_3 h_p$ 为压电片输出电压.

由于压电片厚度远小于平板厚度, 上述推导中忽略了压电层刚度的贡献^[8]. 将式(6)和(8)代入式(4)可得:

$$\begin{aligned} & D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + c \frac{\partial w}{\partial t} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ & - \theta V \left\{ \left[\frac{d\delta(x-x_1)}{dx} - \frac{d\delta(x-x_2)}{dx} \right] \right. \\ & \cdot [H(y-y_1) - H(y-y_2)] + [H(x-x_1) - H(x-x_2)] \\ & \left. \cdot \left[\frac{d\delta(y-y_1)}{dy} - \frac{d\delta(y-y_2)}{dy} \right] \right\} \\ & = f(t) \delta(x-x_0) \delta(y-y_0), \end{aligned} \quad (9)$$

式中, $\delta(\cdot)$ 为 Dirac delta 函数.

外电路电学方程表示为

$$\frac{d}{dt} \int_A D_3 dA = \frac{V}{R}. \quad (10)$$

同样地, 将本构关系代入之得到

$$C_p + \frac{V}{R} + \theta \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial t} \right) dx dy = 0, \quad (11)$$

式中, $C_p = \varepsilon_{33}^S l_p w_p / h_p$. 式(9)和(11)构成了集成于薄板的压电型振动能量收集器件的控制方程组, 其基本变量为系统位移和输出电压, 且两组方程相互耦合. 首要目标是结合恰当的边界条件和初始条件, 通过求解相应的定解问题最终给出输出功率 $P = V^2/R$ 的平均值.

3 宽带激励作用下器件的随机响应分析

以常用的四边简支板为例进行研究, 而所采用的分析方法适用于其他任意边界条件, 只需相应地调整振型形式即可. 四边简支板的边界条件表示为

$$\begin{aligned} x = 0, a, \quad w &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \\ y = 0, b, \quad w &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

结合平板无阻尼自由振动方程:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (13)$$

得到各阶振型:

$$\varphi_{ir}(x, y) = 2 \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{r\pi y}{b}. \quad (14)$$

及相应的固有频率:

$$\omega_{ir} = \left[\left(\frac{i\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{r\pi}{b} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{D}{\rho h}}. \quad (15)$$

各阶振型满足正交条件^[20,21]:

$$\int_0^a \int_0^b \rho h \varphi_{ir} \varphi_{ks} dx dy = \rho h a b \delta_{ir} \delta_{ks}, \quad (16)$$

式中, δ_{ir} 为 Kronecker delta 函数, 即当 $i=r$ 时, $\delta_{ir}=1$; 当 $i \neq r$ 时, $\delta_{ir}=0$.

通过模态展开, 式(9)的解可表示为

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \varphi_{ir}(x, y) \eta_{ir}(t). \quad (17)$$

式(17)代入式(9), 并应用 Galerkin 积分方法可得:

$$\frac{d^2 \eta_{ir}}{dt^2} + \frac{c}{\rho h} \frac{d \eta_{ir}}{dt} + \omega_{ir}^2 \eta_{ir} - \tilde{\theta}_{ir} V(t) = \frac{f(t)}{\rho h a b} \varphi_{ir}(x_0, y_0), \quad (18)$$

式中,

$$\tilde{\theta}_{ir} = \frac{\theta}{\rho h a b} \left[\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi_{ir}}{\partial x} \Big|_{x_1}^{x_2} dy + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \varphi_{ir}}{\partial y} \Big|_{y_1}^{y_2} dx \right]. \quad (19)$$

将式(17)代入式(11)可得:

$$C_p \frac{dV}{dt} + \frac{V}{R} + \rho h a b \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \tilde{\theta}_{ir} \frac{d\eta_{ir}}{dt} = 0. \quad (20)$$

无限维的方程式(18)和(20)即构成了关于主坐标和输出电压的控制方程组. 相比于式(9)和(11), 这里不再包含偏微分项和积分项, 而其代价则是维数无限且包含无穷级数项.

考虑周期激励作用下的稳态响应, 令激励 $f(t)=e^{j\omega t}$, 主坐标响应和电压响应分别为

$$\eta_{ir}(t) = H_{ir}(\omega) e^{j\omega t}, \quad V(t) = H_V(\omega) e^{j\omega t}, \quad (21)$$

式中, ω 为激励频率, j 为虚数单位, $H_{ir}(\omega)$, $H_V(\omega)$ 分别为模态频率响应函数和电压频率响应函数. 将式(21)代入式(18)和(20), 并消去 $e^{j\omega t}$, 可得:

$$\begin{aligned} -H_{ir}(\omega) \omega^2 + \frac{j c \omega}{\rho h} H_{ir}(\omega) + \omega_{ir}^2 H_{ir}(\omega) \\ -\tilde{\theta}_{ir} H_V(\omega) = \frac{\varphi_{ir}(x_0, y_0)}{\rho h a b}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$j \omega C_p H_V(\omega) + \frac{H_V(\omega)}{R} + \rho h a b \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \tilde{\theta}_{ir} H_{ir}(\omega) j \omega = 0. \quad (23)$$

联立之求得:

$$H_V(\omega) = \frac{-\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} j \omega \frac{\tilde{\theta}_{ir} \varphi_{ir}(x_0, y_0)}{\omega_{ir}^2 - \omega^2 + j \frac{c \omega}{\rho h}}}{j \omega C_p + \frac{1}{R} + \rho h a b \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\tilde{\theta}_{ir} j \omega \tilde{\theta}_{ir}^2}{\omega_{ir}^2 - \omega^2 + j \frac{c \omega}{\rho h}}}, \quad (24)$$

$$H_{ir}(\omega) = \frac{\frac{\varphi_{ir}(x_0, y_0)}{\rho h a b} + \tilde{\theta}_{ir} H_V(\omega)}{\omega_{ir}^2 - \omega^2 + j \frac{c \omega}{\rho h}}. \quad (25)$$

随机激励 $f(t)$ 用零均值限带白噪声表示, 其功率谱密度为^[22]

$$S_f(\omega) = \begin{cases} s_0, & \text{当 } |\omega| < \omega_0, \\ 0, & \text{当 } |\omega| > \omega_0, \end{cases} \quad (26)$$

式中, s_0 为常值. 能量收集器件的平均输出功率均值表示为

$$E[P] = E\left[\frac{V^2}{R}\right] = \frac{1}{R} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} H_V(\omega) s_0 H_V(-\omega) d\omega. \quad (27)$$

平板任意点的响应均方值亦可相应地解析出.

4 器件优化设计

在进行具体的器件优化设计之前, 首先讨论级数收敛性问题, 这在控制计算精度方面是至关重要的. 给出典型情形下的系统电压频响函数图线, 据此判定所给出的外激励带宽宽度. 讨论给定激励作用位置、激励带宽及压电片尺寸条件下, 压电片中心位置的变化所引起的平均输出功率变化规律, 为之后的优化设计奠定基础.

如无特殊说明, 如下算例中所用到的激励参数取值为 $s_0=100$, 阻尼系数为 $c=20$, 薄板的几何和物理参数取值为 $a=0.58$ m, $b=0.54$ m, $h=1.96 \times 10^{-3}$ m, $E=70$ GPa, $\mu=0.2$, $\rho=2700$ kg/m³. 压电薄膜的材料参数和几何参数取为 $E=66$ GPa, $\varepsilon_{33}^S=10.38 \times 10^{-9}$ F/m, $e_{31}=-12.54$ C/m², $h_P=0.267 \times 10^{-3}$ m, 外接电阻值为 $R=6$ kΩ^[9].

以 $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} f(i, r)$ 的求解为例简述对无穷级数的截

断处理。首先取 $k=1$, 计算下式:

$$T_k = \sum_{i=1}^{10k} \sum_{r=1}^{10k} f(i, r), \quad T_{k+1} = \sum_{i=1}^{10(k+1)} \sum_{r=1}^{10(k+1)} f(i, r). \quad (28)$$

如果 $\frac{T_{k+1} - T_k}{T_k} < 0.01$, 则停止计算, 取 $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} f(i, r)$

$\approx T_{k+1}$; 反之, 则取 $k=k+1$, 返回计算。图 2 给出了典型情形下, 平均输出功率的收敛性分析结果, 其中横坐标表示无穷级数的截断项数, 而纵坐标为输出功率均值。由图可知, 随着求和项数的增加, 输出功率均值趋于稳定。取前 200 项即可取得具有足够精度的结果。典型情形下的输出电压频率响应函数如图 3 所示。对此典型结构形式, 圆频率为 6000 rad/s 时覆盖了超过 20 个模态, 因此可认为对该结构而言, 外部激励若覆盖 6000 rad/s 的频率成分, 则可视为典型宽带过程。

图 4 为给定激励位置($x_0=a/3$, $y_0=b/4$)、激励带宽($\omega_0=6000$)及压电片尺寸($l_p=0.01a$, $w_p=0.01b$, 分别取主结构长、宽的 1%)的情况下, 平均输出功率随压电片中心位置的变化规律。观察发现如下几个特征: (1) 随着压电片中心位置变化, 平均输出功率峰谷交替出现, 但不具有周期性, 峰值和谷值相差数倍; (2) 平均输出功率值沿着长和宽两条中心线近似对称分布, 平均输出功率最大的 4 个峰值点坐标分别是(0.322a, 0.243b), (0.678a, 0.243b), (0.322a, 0.757b), (0.678a, 0.757b), 呈对称分布。这极其类似于连续体随机振动中独特的速度强化现象。而这里的近似性

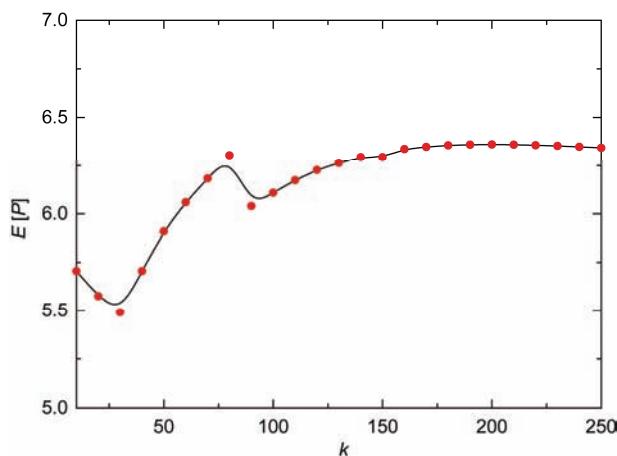


图 2 (网络版彩图)无穷级数的收敛性分析

$x_0=a/3, y_0=b/4, x_m=a/3, y_m=b/3, l_p=0.01a, w_p=0.01b, \omega_0=6000$

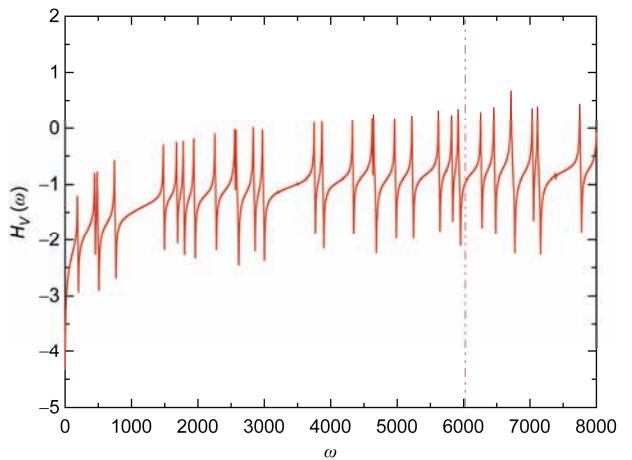


图 3 (网络版彩图)输出电压频响函数 $H_V(\omega)$

$x_0=a/3, y_0=b/3, x_m=a/3, y_m=b/3, l_p=0.01a, w_p=0.01b$

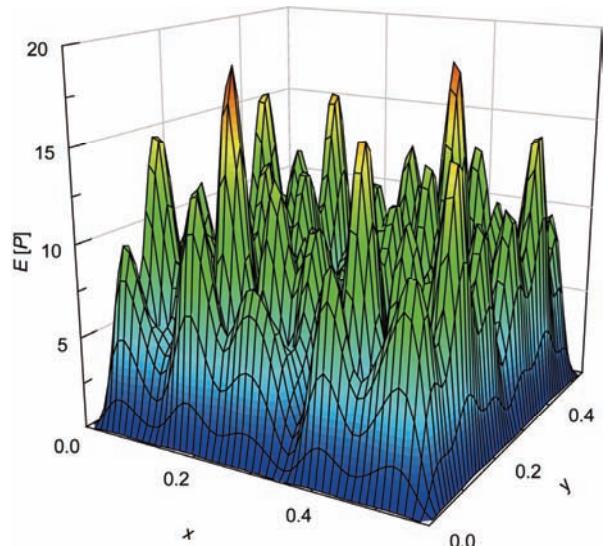


图 4 (网络版彩图)平均输出功率随压电片中心位置的变化规律

$x_0=a/3, y_0=b/4, l_p=0.01a, w_p=0.01b, \omega_0=6000$

是由于压电片粘贴导致的结构不对称性引起的。第一个特征表征了压电片最优粘贴位置的存在性及平均输出功率对位置的敏感性; 第二个特征提示我们可以仅以 1/4 板为研究对象, 所得到的最优布置位置可依据对称性映射出其他 3 个最优位置。

4.1 压电片最优和最差布置位置

以下正式展开对结构优化设计问题的讨论。具体包括压电片的最优及最差布置位置、压电片最优尺

寸及器件最优负载电阻的确定。图5所示为给定压电片尺寸($l_p=0.01a$, $w_p=0.01b$)和激励点位置的条件下,压电片最优中心位置(x_m , y_m)随激励带宽的变化关系。图5(a)的激励点位置($x_0=a/3$, $y_0=b/3$)处于对角线上,而图5(b)的激励点位置($x_0=a/3$, $y_0=b/4$)处于非对角线上,依此两种代表性情形可得有意义的结论。图5中,圆点表示压电片最优水平中心位置 x_m ,对应左侧纵坐标,而菱形点表示压电片最优竖向中心位置 y_m ,对应右侧纵坐标。由图可知,当激励带宽较小时,压电片最优中心位置随激励带宽的变化而剧烈跳动,未呈现出明显的规律性;而当激励带宽较大(大于4000)时,上述两种情形的压电片最优中心位置都几乎稳定在激励作用点位置附近。由于真实环境激励带宽有一定的波动性,小带宽情形下最优位置的波动性使得其优化结果没有实际意义。对于带宽较宽的情形,只需将压电片布置于激励点附近即有大的功率

输出。又由于前述最优位置的对称性特征,所得结论更具意义,在激励点不适宜布置压电片时,可布置于对称的其他3个位置上而不影响其输出功率。相应于前文关于压电片最优中心位置的讨论,这里给出上述两种典型情形下压电片最差布置位置随激励带宽的变化关系,如图6所示。由图可知,随着激励带宽的变化,最差布置位置剧烈波动,且未表现出任何规律性。甚至在某些带宽下,最差位置与激励点位置相距很近,也即与最优位置相距很近。为阐明压电片位置优化的意义,图7给出了压电片布置于最优位置和最差位置时的平均输出功率比较结果。由图可知,随着激励带宽的增加,最优平均输出功率和最差平均输出功率相差越来越多,在宽带情形下甚至相差数10倍。这进一步说明,优化压电片粘贴位置对提高功率输出具有重要意义,特别是在宽带激励下更是如此。

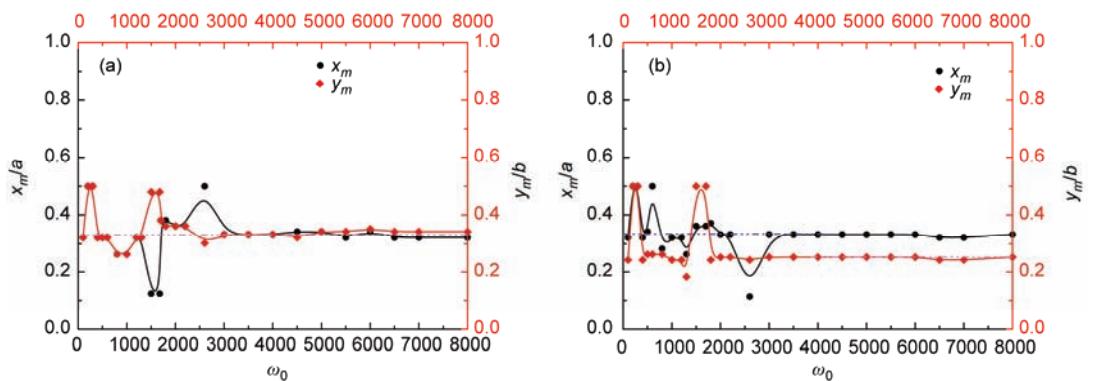


图5 (网络版彩图)压电片最优位置随激励带宽的变化关系

(a) $x_0=a/3$, $y_0=b/3$; (b) $x_0=a/3$, $y_0=b/4$

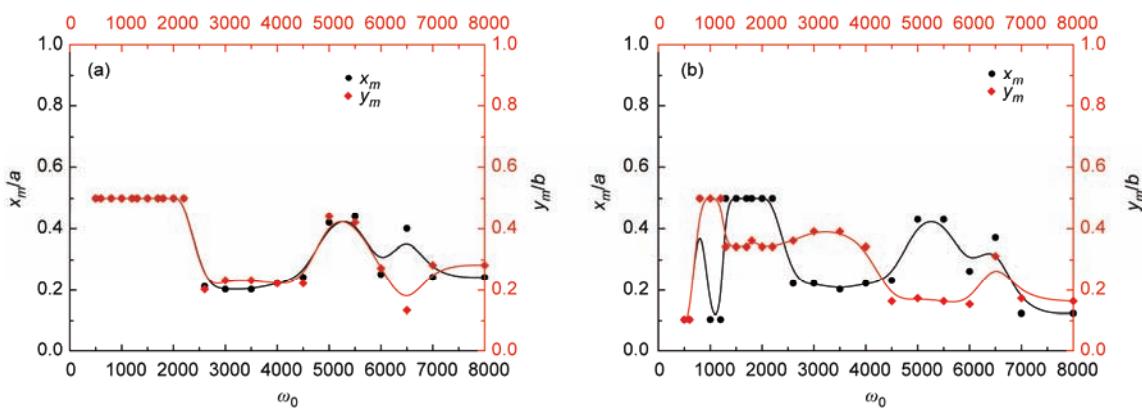


图6 (网络版彩图)不同带宽下压电片最差位置

(a) $x_0=a/3$, $y_0=b/3$; (b) $x_0=a/3$, $y_0=b/4$

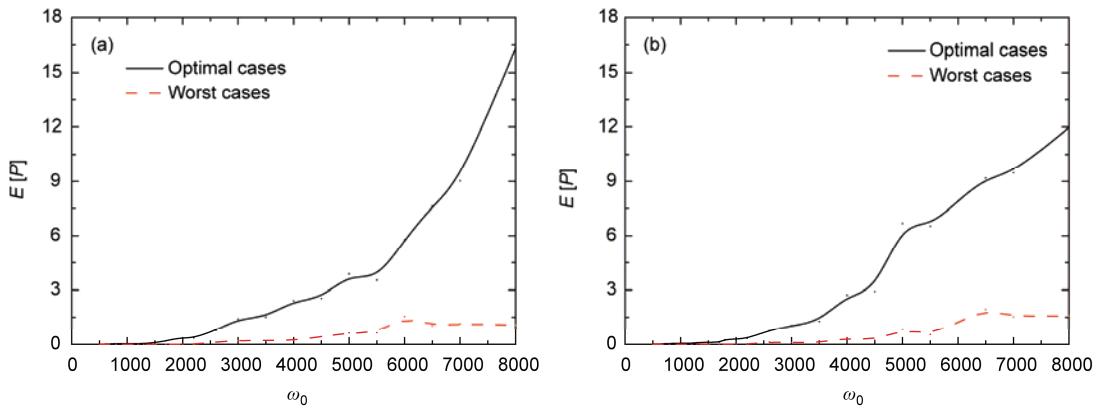


图 7 (网络版彩图)最优与最差平均输出功率随激励带宽的变化关系

(a) $x_0=a/3, y_0=b/3$; (b) $x_0=a/3, y_0=b/4$

4.2 压电片最优尺寸

上述的位置优化是在给定压电片尺寸的前提下进行的, 压电片尺寸取为 $l_p=0.01a, w_p=0.01b$, 即长宽分别为母板的 1%. 本节将压电片布置于激励作用点, 即最优位置处, 指定宽带激励(其带宽为 $\omega_0=6000$), 讨论压电片尺寸对平均输出功率的影响, 如图 8 所示. 由图可知, 随着压电片尺寸的增加, 输出功率整体上呈增加趋势, 当压电片尺寸较大时出现小的波动. 当压电片尺寸较小时, 随着尺寸增加, 平均输出功率迅速增加; 而当压电片尺寸达到一定值时, 提高其尺寸引起的平均输出功率增大不明显. 因此, 通过设定一定的准则, 如输出功率达到最大输出功率的 80%, 可

以得到更有实用价值的压电片优化尺寸.

4.3 最优负载电阻讨论

以下讨论中, 取压电片尺寸为 $l_p=0.01a, w_p=0.01b$, 压电片中心位置布置于激励作用点位置, 即 $x_m=x_0, y_m=y_0$, 并给定激励带宽 $\omega_0=6000$. 图 9 给出了平均输出功率随外接电阻的变化关系. 对图示两种情况都有如下结论: 随着负载电阻的增加, 平均输出功率先增大后减小, 存在最优的负载电阻使得平均输出功率最大. 由此可知, 要使输出能量最大, 负载电阻的选择也是一个关键性因素, 最优负载电阻易采用本文的分析方法直接给出. 最优负载电阻的存在性与已有文献中的结果一致^[12].

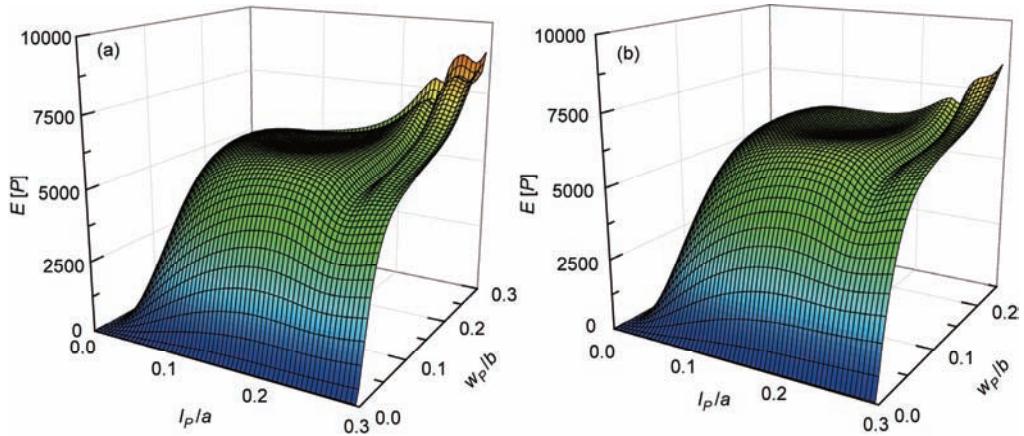


图 8 (网络版彩图)平均输出功率随压电片尺寸的变化关系

(a) $x_0=x_m=a/3, y_0=y_m=a/3$; (b) $x_0=x_m=a/3, y_0=y_m=a/4$

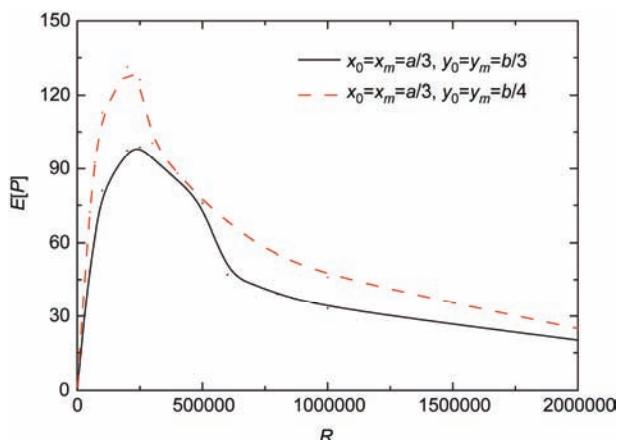


图 9 (网络版彩图)平均输出功率随外接电阻的变化关系

5 讨论与结论

本文系统研究了集成于薄板的压电型宽带随机振动能量收集器件的优化设计问题。建立了关于主结构位移的非线性随机偏微分方程和关于输出电压的常微分方程，二者相互耦合。而后截断之得到关于主坐

标和输出电压的非线性随机常微分方程组，通过线性随机振动理论导出了平均输出功率的解析表达式，据此讨论结构优化问题。首先论证了平均输出功率对压电片布置位置的近似对称特征，从而将研究局限于 $1/4$ 板。讨论了压电片的最优和最差布置位置随激励带宽的变化关系，研究表明：对于窄带激励情形，最优布置位置没有规律性可言，而对宽带激励情形，最优布置位置趋近于激励作用点及其 3 个对称位置。压电片布置于最优及最差位置的平均输出功率差别可达数 10 倍，从而证实了最优位置研究的重要意义。此外，讨论了压电片优化尺寸及最优负载电阻。随着压电片尺寸增大，平均输出功率总体上呈现上升趋势，可给定某一准则确定最优尺寸；平均输出功率显著依赖于负载电阻值，需恰当选择之以期得到大的平均输出功率。

本文的优化设计方法为集成于平板的压电型宽带振动能量收集器件的工业化应用奠定了理论基础。该方法可直接推广于不同约束条件的情形，只需替换相应的振型函数即可。对集成于壳体的振动能量收集器件的研究亦可按类似方法展开。

参考文献

- 1 Anton S R, Sodano H A. A review of power harvesting using piezoelectric materials (2003–2006). *Smart Mater Struct*, 2007, 16: R1–R21
- 2 Mizuno M, Chetwynd G C. Investigation of a resonance microgenerator. *J Micromech Microeng*, 2003, 13: 209–216
- 3 Meninger S, Mur-Miranda J O, Amirtharajah R, et al. Vibration-to-electric energy conversion. *IEEE T VLSI Syst*, 2001, 9: 64–76
- 4 Kim H S, Kim J H, Kim J. A review of piezoelectric energy harvesting based on vibration. *Int J Precis Eng Manuf*, 2011, 12: 1129–1141
- 5 刘祥建, 陈仁文. 压电振动能量收集装置研究现状及发展趋势. 振动与冲击, 2012, 31: 169–176
- 6 Saadon S, Sidek O. A review of vibration-based MEMS piezoelectric energy harvesters. *Energy Conv Manag*, 2011, 52: 500–504
- 7 Erturk A, Tarazaga P A, Farmer J R, et al. Effects of strain nodes and electrode configuration on piezoelectric energy harvesting from cantilevered beams. *J Vib Acoust*, 2009, 131: 011010
- 8 Erturk A, Inman D J. An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from base excitations. *Smart Mater Struct*, 2009, 18: 025009
- 9 Aridogan U, Basdogan I, Erturk A. Analytical modeling and experimental validation of a structurally integrated piezoelectric energy harvester on a thin plate. *Smart Mater Struct*, 2014, 23: 045039
- 10 Aridogan U, Basdogan I, Erturk A. Multiple patch-based broadband piezoelectric energy harvesting on plate-based structures. *J Intell Mater Syst Struct*, 2014, 25: 1664–1680
- 11 Karami M A, Inman D J. Equivalent damping and frequency change for linear and nonlinear hybrid vibrational energy harvesting systems. *J Sound Vibr*, 2011, 330: 5583–5597
- 12 Daqaq M F, Masana R, Erturk A, et al. On the role of nonlinearities in vibratory energy harvesting: A critical review and discussion. *Appl Mech Rev*, 2014, 66: 040801
- 13 Tian Y P, Wang Y, Jin X L, et al. Optimal load resistance of randomly excited nonlinear electromagnetic energy harvester with Coulomb friction. *Smart Mater Struct*, 2014, 23: 095001
- 14 Xu M, Jin X L, Wang Y, et al. Stochastic averaging for nonlinear vibration energy harvesting system. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 78: 1451–1459
- 15 Rupp C J, Evgrafov A, Maute K, et al. Design of piezoelectric energy harvesting systems: A topology optimization approach based on multilayer plates and shells. *J Intell Mater Syst Struct*, 2009, 20: 1923–1939

- 16 Friswell M I, Adhikari S. Sensor shape design for piezoelectric cantilever beams to harvest vibration energy. *J Appl Phys*, 2010, 108: 014901
- 17 Wickenheiser A M. Design optimization of linear and nonlinear cantilevered energy harvesters for broadband vibration. *J Intell Mater Syst Struct*, 2011, 22: 1213–1225
- 18 Wang Q, Wu N. Optimal design of a piezoelectric coupled beam for power harvesting. *Smart Mater Struct*, 2012, 21: 085013
- 19 田燕萍, 金肖玲, 王永. 强化现象启发的随机振动能量收集器优化设计. *浙江大学学报(工学版)*, 2016, 50: 934–940
- 20 季文美, 方同, 陈松淇. 机械振动. 北京: 科学出版社, 1985
- 21 Rayleigh J W S. *The Theory of Sound*. New York: Dover Publications, 1945
- 22 朱位秋. 非线性随机动力学与控制-Hamilton 理论体系框架. 北京: 科学出版社, 2003

Optimal design of plate-based random vibration energy harvesting system

TIAN YanPing & ZHANG XiLun

School of Mechanical Engineering, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China

Pasting piezoelectric thin films on a rectangular plate constitutes a practical vibration energy harvester. This manuscript investigates the optimal design of energy harvesters excited by wideband random point force with the objective to maximizing the mean output power, including the position of piezoelectric patch, the dimension and the load resistance. First, derive the stochastic partially differential-integral equations with respect to the displacement and output voltage, and then by eliminating the partial variables through modal expansion technique, the stochastic ordinary differential equation with infinite dimensions with respect to principal coordinates and voltage is derived. The analytical expression on the mean output power is derived through the linear random vibration theory, based on that the optimal design is discussed in detail. The analytical results show that as for the wideband excitation, the optimal positions of the piezoelectric patch include the self- and the symmetric positions of the exciting point. With the optimal position, the mean output power almost monotonically increases with the dimension of the piezoelectric patch and the increasing speed declines. The optimal dimension can be determined base on the above results. The optimal load resistance is derived by the existence of extreme value of the relation curve between the mean power and load resistance. This manuscript discloses the symmetry of the optimal position and the sensitivity of mean power on position of piezoelectric patch, and provides certain guidance for the design of thin plate-based vibration energy harvesters.

piezoelectric energy harvester, wideband random vibration, thin plate, optimal design, mean output power

doi: 10.1360/N092016-00099