非线性陀螺系统的稳定准则

张 光 枢
(北京航空学院理论力学教研室)

摘　　要

本文根据 Ляпунов 的稳定性理论，研究了陀螺系统在非线性耗散力与非线性保守力作用下的稳定性问题，得到了非线性陀螺系统的稳定准则．结果表明：线性系统的稳定准则也同样适用于非线性系统，从而推广了 KTC 定理的应用范围．

一、引　　言

研究陀螺系统的稳定性，在当代工程技术上有重要意义[1]．

早在十九世纪七十年代，Thomson 和 Tait[2] 首先谈到了耗散力对陀螺系统稳定性的重要意义；指出了陀螺系统在有无耗散力作用时稳定性的根本区别．这个问题，涉及到天体形状和飞行器的姿态稳定与控制等许多重要领域．Kelvin 的陀螺实验，为研究耗散力对陀螺系统稳定性的影响提供了有力的证据．后来，Четаев 根据 Ляпунов 的稳定性理论，建立了有耗散力作用下陀螺系统的稳定准则（即 KTC 定理）[3-7]，从而由理论上解决了这个问题．这些准则，一直到现在对研究陀螺系统的稳定性都有着十分重要的意义．

六十年代以来，由于空间技术的发展提出了空间飞行器姿态的稳定与控制问题，从而使这个力学中的经典问题与当代工程技术紧密地结合起来[1]．国外许多从事力学与工程技术的工作者也在这方面进行了大量研究．

然而，迄今为止关于陀螺系统稳定性的研究基本上还是属于线性系统理论的范畴．KTC 定理是在线性系统的条件下证明的，对于非线性系统 KTC 定理是否适用并没有一个普遍解答．本文根据 Ляпунов 的稳定性理论解决了这个问题，得到了多自由度非线性陀螺系统的稳定准则，其结果与线性系统相同．本文所给出的证明方法同样适用于线性系统，因而可以简化线性系统理论中关于这些定理的证明．

二、运动微分方程

研究 n 个自由度的陀螺系统，其运动微分方程可以通过 Lagrange 方程来描述：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + F_i + G_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

或写成矩阵形式：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\bar{q}}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \bar{q}} = -\frac{\partial U}{\partial \bar{q}} + \bar{F} + \bar{G},$$

本文 1986 年 10 月 13 日收到，1987 年 3 月 4 日收到修改稿．

其中每一项均为 n 维列矢量，这是由 n 个二阶微分方程所构成的方程组．T 与 U 分别表示系统的动能与势能．记 $\dot{\bar{q}} = \bar{p}$,则上述方程可用 $2n$ 个一阶方程表示:

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\bar{q}} = \bar{p},\\&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \bar{p}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \bar{q}} = -\frac{\partial U}{\partial \bar{q}} + \bar{F} + \bar{G},\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中 $\bar{p}$ 是表示广义速度的 n 维列矢量．假定系统的约束稳定，则动能是广义速度的齐次二次型:

$$T = \frac{1}{2}\bar{p}^T\bar{M}\bar{p}, \tag{2}$$

其中 $\bar{M}$ 是系统的 $n \times n$ 维广义质量矩阵,它是广义坐标的非线性函数

$$\bar{M} = \bar{M}(\bar{q}),$$

势能是广义坐标的非线性函数

$$U = U(\bar{q}). \tag{3}$$

$\bar{F}$ 为系统的耗散力,它是广义坐标与广义速度的非线性函数,而且当广义速度为零时耗散力必为零:

$$\left.\begin{aligned}&\bar{F} = \bar{F}(\bar{p}, \bar{q}),\\&\bar{F}(0, \bar{q}) \equiv \bar{0}.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$\bar{G}$ 是系统的陀螺力,按定义它是广义速度的线性函数

$$\bar{G} = \bar{g}\bar{p}, \tag{5}$$

其中 $\bar{g}$ 是 $n \times n$ 维的反对称矩阵,它是广义坐标的函数

$$\bar{g} = \bar{g}(\bar{q}),\ \bar{g} = -\bar{g}^T.$$

根据耗散力的性质

$$\bar{F}^T\bar{p} \leqslant 0, \tag{6}$$

其中等号只有 $\bar{p} = \bar{0}$ 时成立,因此，$\bar{p} \neq \bar{0}$ 时耗散力的功总是负值.

根据陀螺力的性质,陀螺力作功恒为零:

$$\bar{G}^T\bar{p} \equiv 0. \tag{7}$$

对于保守力,若保守系统平衡位置的势能极小则平衡稳定,又根据平衡不稳定定理可得到下面关于平稳稳定的充分必要条件.

引理．若保守系统势能在平衡位置上可展成幂级数

$$U = u_m(\bar{q}) + u(\bar{q}), \tag{8}$$

则平衡稳定的充分必要条件是平衡位置上的势能极小．其中 $u_m(\bar{q})$ 表示 $\bar{q}$ 的 m 次型，$m \geqslant 2$，$u(\bar{q})$ 表示所有高于 m 次型各项的和.

证．根据 Lagrange 的平衡稳定定理,若平衡位置势能极小则平衡稳定,于是立即证明其充分性．根据 Ляпунов 的平衡不稳定定理,若由 (8) 式所表示的平衡位置势能极大，则平衡不稳定．又根据 Четаев 的平衡不稳定定理知[3],对于由 m 次型 $U = u_m(\bar{q})$ ($m \geqslant 2$) 所表示的势能在平衡位置处既非极小又非极大,则平衡位置不稳定．因此,可以推断对于 (8) 式所示势能在平衡位置上具有非极小值又非极大值的情况下，同样是平衡不稳定的．因为在平衡位置附近由 (8) 式所示势能函数的定号性或变号性是由其最低次项 $u_m(\bar{q})$ 决定的,因而证明了

必要性.

根据引理,若平衡位置稳定,则U是$\bar{q}$的正定函数;若平衡位置不稳定,则U是$\bar{q}$的负定函数或变号函数.

三、基本定理

基于保守力、耗散力与陀螺力的上述性质,可以证明非线性陀螺系统下列定理.

定理 1. 若保守系统孤立的平衡位置稳定,则在耗散力与陀螺力的作用下不改变平衡的稳定性.

证. 以保守系统的 Hamilton 函数(系统的机械能)为V函数:

$$V = T + U.$$

根据方程 (1) 将V对时间求一次导数

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{d}{dt}(T+U)\\ &= \left(\frac{\partial T}{\partial \bar{q}}\right)^T \bar{p} + \left(\frac{\partial T}{\partial \bar{p}}\right)^T \dot{\bar{p}} + \left(\frac{\partial U}{\partial \bar{q}}\right)^T \bar{p},\end{aligned}$$

由于T是$\bar{p}$的齐二次型,利用齐次函数定理将上式进一步整理得到:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \left(\frac{\partial T}{\partial \bar{q}}\right)^T \bar{p} + \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial \bar{p}}\right)^T \bar{p}\right] - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \bar{p}}\right)^T \bar{p} + \left(\frac{\partial U}{\partial \bar{q}}\right)^T \bar{p}\\ &= \left(\frac{\partial T}{\partial \bar{q}}\right)^T \bar{p} + 2\frac{dT}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \bar{p}}\right)^T \bar{p} - \left(\frac{\partial U}{\partial \bar{q}}\right)^T \bar{p} + 2\frac{dU}{dt}\\ &= \left[\frac{\partial T}{\partial \bar{q}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \bar{p}}\right) - \frac{\partial U}{\partial \bar{q}}\right]^T \bar{p} + 2\frac{d}{dt}(T+U).\end{aligned}$$

代入方程 (1)

$$\frac{dV}{dt} = \bar{F}^T\bar{p} + \bar{G}^T\bar{p}.$$

根据 (7) 式的结果,最后有

$$\frac{dV}{dt} = \bar{F}^T\bar{p}.$$

V函数正定. 这是因为保守系统孤立的平衡位置稳定. 根据引理,U是$\bar{q}$的正定函数,对于T虽然同时与$\bar{q}$, $\bar{p}$有关,但只要$\bar{p} \neq 0$总有$T > 0$,而且仅当$\bar{p} = \bar{0}$才有$T = 0$,因此,T是$\bar{p}$的正定函数,故V是$\bar{q}$, $\bar{p}$的正定函数. 至于$\dot{V}$,根据上面所得结果则是$\bar{q}$, $\bar{p}$的半负定函数. 根据 Ляпунов 的稳定定理,立即证明系统的平衡是稳定的.

应当指出,由于定理条件是系统受耗散力作用,因此,对于非完全耗散力$\dot{V}$甚至也不可能是$\bar{p}$的负定函数,所以,更不可能是$\bar{q}$, $\bar{p}$的负定函数,$\dot{V}$只能是半负定的. 对于完全耗散力,$\dot{V}$虽是$\bar{p}$的负定函数,但对于$\bar{q}$, $\bar{p}$而言仍是半负定的. 因此,只能证明系统的运动稳定,但不是渐近稳定.

定理 2. 若保守系统孤立的平衡位置不稳定,则在完全耗散力与陀螺力的作用下,不可能使平衡稳定.

证. 仍以保守系统的 Hamilton 函数为 V 函数:

$$V = T + U.$$

由定理 1 的证明得到

$$\frac{dV}{dt} = \bar{F}^T\bar{p}.$$

由于保守系统孤立的平衡位置不稳定,根据引理,U 是 $\bar{q}$ 的负定函数或变号函数. T 是 $\bar{p}$ 的正定函数. 因此, V 是 $\bar{q}$, $\bar{p}$ 的变号函数. 至于 $\dot{V}$ 对于 $\bar{q}$, $\bar{p}$ 则是半负定的. 但由于系统有完全耗散性,利用 Красовский 定理可以证明系统是不稳定的,只要证明下面的集合 $\bar{S}$ 存在:

$$\bar{S} = \{\bar{q}, \bar{p}|_{\dot{V}=0}\} = \{\bar{0}\}, \tag{9}$$

即使 $\dot{V} = 0$ 的点集 $\bar{S}$ 除 $\bar{q} = \bar{0}$, $\bar{p} = \bar{0}$ 外, $\bar{S}$ 不再包含系统 (1) 其它解的轨线.

事实上,满足条件 (9) 式是易于证明的. 由于系统有完全耗散性, $\dot{V} = 0$ 时必有 $\bar{p} = \bar{0}$. 因此, $\bar{q} = \bar{C}$,或 $\bar{C} = \bar{0}$,或 $\bar{C} \neq \bar{0}$. 可以证明,在定理条件下 $\bar{q} = \bar{C} \neq \bar{0}$ 不存在. 将 $\bar{p} = \bar{0}$ 代入 (1) 式并注意到动能的表示式 (2) 得到

$$-\frac{\partial U}{\partial \bar{q}} + \bar{F} + \bar{G} = \bar{0}.$$

但是当 $\bar{p} = \bar{0}$ 时必有 $\bar{F} = \bar{0}$, $\bar{G} = \bar{0}$,故

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{q}} = \bar{0}.$$

然而由定理条件知道,保守系统的平衡位置是孤立的,即除了原点外在平衡位置附近不存在其它位置使势能有极值,故必有

$$\bar{q} = \bar{C} = \bar{0}.$$

因此,使 $\dot{V} = 0$ 的点集 $\bar{S}$ 除 $\bar{q}=\bar{0}$, $\bar{p}=\bar{0}$ 的原点外,不再包含方程 (1) 解的其它轨线,条件 (9) 式满足并得到证明,根据 Красовский 的不稳定定理[8]立即证明系统的平衡是不稳定的.

上述证明方法对于线性系统同样成立,因此,本定理结论对于非线性系统或线性系统都是正确的.

定理 3. 若保守系统孤立的平衡位置稳定,则在完全耗散力与陀螺力的作用下可使稳定变为渐近稳定.

证. 取

$$V = T + U,$$

则

$$\frac{dV}{dt} = \bar{F}^T\bar{p}.$$

由于保守系统孤立的平衡位置稳定,根据引理,U 是 $\bar{q}$ 的正定函数,故 V 函数正定. 至于 $\dot{V}$,根据定理 2 证明,由于保守系统的平衡位置是孤立的,耗散力是完全的,则条件 (9) 式满足,根据 Красовский 的渐近稳定定理[8],立即证明系统的平衡是渐近稳定的.

本定理的证明方法,对于线性系统同样成立. 因此,本定理不论对于非线性系统或线性系统都是正确的.

这样,我们将线性系统中的 KTC 定理推广到非线性系统,而且所给出的证明方法对于线

性或非线性系统都有普遍意义.

四、应 用

关于陀螺系统的线性理论,已在工程上得到广泛应用并成功地用来解释某些现象. 然而,严格的线性关系是比较少的,大量问题是拟线性或非线性的. 根据上面的讨论,我们完全可以将线性系统理论推广到非线性系统中去,因而扩大了 KTC 定理的应用范围.

1. 椭球体的旋转运动 由平衡稳定性理论知,在重力作用下椭球体只有对于短轴的平衡位置是稳定的,对于中轴与长轴的平衡位置是不稳定的. 根据线性系统理论,如果没有耗散力作用、椭球体分别绕短轴(最大惯量主轴)和长轴(最小惯量主轴)的旋转是稳定的,绕中轴旋转是不稳定的. 如果有完全耗散力的作用,则不论耗散力是线性还是非线性的,根据定理 3,椭球体只有绕短轴旋转才是稳定的,而且渐近稳定.

2. 陀螺转子形状 根据上面讨论看出,陀螺转子形状应设计成扁自旋体,其自转轴相当于椭球体短轴,因而转子运动不但具有动力稳定性而且也具有长期稳定性,在任意耗散力(线性或非线性)的作用下,运动仍然是稳定的. 如果耗散力是完全的则运动是渐近稳定的. 这个结果与线性完全耗散力作用下所得到的结果一致.

3. 飞行器的姿态稳定 在完全耗散力作用下,不论耗散力是线性还是非线性的,形状为长自旋体的飞行器不可能通过绕纵轴旋转来稳定飞行姿态,因为这相当于椭球体绕长轴的旋转运动,根据定理 2,绕该轴的旋转运动必然是不稳定的. 相反,对于扁自旋体飞行器,由于这时自旋轴属于最大惯量主轴,则在任何耗散力作用下,根据定理 1,绕纵轴旋转必然稳定. 如果耗散力是完全的,根据定理 3,绕纵轴旋转必然是渐近稳定的. 由线性系统理论解释的 Explorer-1 号与 Syncon 号卫星的姿态稳定问题[1],也完全可以用本文的非线性系统理论说明.

五、结 论

本文证明了非线性陀螺系统的稳定准则,其结果与线性系统理论相同,因而大大推广了 KTC 定理的应用范围. 主要结论是:

1. 保守系统稳定,则在耗散力与陀螺力的作用下系统仍然稳定.

2. 保守系统不稳定,则在完全耗散力的作用下不可能通过增强陀螺力使系统稳定.

3. 保守系统稳定,则在完全耗散力与陀螺力的作用下系统渐近稳定.

参 考 文 献

[1] 卡普兰, M. H., 空间飞行器动力学和控制,科学出版社, 1981, 26—70.

[2] Thomson, W., Tait, P. G., *Treatise on Natural Philosophy*, 2nd ed., Cambridge Univ., Press, 1912.

[3] Четаев, Н. Г., *Устойчивость движения*, 1965.

[4] Меркин, Д. Р., *Гироскопические системы*, 1956.

[5] 高为柄,运动稳定性,北京航空学院, 1984, 129—167; 281—364.

[6] 王照林,现代控制理论基础,国防工业出版社, 1981, 214—254.

[7] 马格努斯, K., 陀螺理论与应用,贾书惠等译,国防工业出版社, 1983, 241—323.

[8] Красовский, Н. Н., *Некоторые задачи теории устойчивости движения*, 1959, 80—85.