

颗粒尺寸对通道内颗粒静止角的影响

周英^{①*}, 张国琴^②

① 台州学院物理与电子工程学院, 台州 318000;

② 浙江水利水电专科学校, 杭州 310018

* E-mail: yingzhou@zj.com

收稿日期: 2008-11-19; 接受日期: 2008-12-05

台州学院青年项目基金资助项目(编号: 06QN08)

摘要 通过实验研究颗粒在通道中的崩塌现象, 考察固定通道宽度条件下, 颗粒直径大小对通道内所堆积颗粒的静止角 θ_r 的影响. 研究发现静止角 θ_r 随颗粒直径 d 的倒数 $\lambda=1/d$ 的增大呈指数衰减趋势. 本实验对 5 种不同直径的颗粒其抬高斜面倾角 θ 的过程中静止角 θ_r 的涨落进行研究, 发现静止角 θ_r 的涨落随颗粒直径的增大而增大.

关键词

颗粒物质
崩塌
静止角
颗粒直径

颗粒体系是能量耗散的非线性复杂体系, 其运动规律的研究与人类的生产和生活有着密切的联系. 颗粒物质崩塌现象的研究是颗粒物质研究中一个重要的组成部分, 泥石流、雪崩、山崩、地震等都与颗粒物质的崩塌有着紧密的联系, 因此, 颗粒物质崩塌现象的研究就显得尤为重要. 近年来, 人们对颗粒物质的崩塌现象开展了大量的研究^[1-10]. Nowak 等人^[1]研究绕水平轴转动的树脂玻璃圆筒内湿颗粒物质的崩塌现象, 发现崩塌角 θ_m 与圆筒宽度 W 和颗粒直径 d 有关. 当保持颗粒直径 d 不变时, 崩塌角 θ_m 随圆筒宽度 W 的增加而减小, 服从指数衰减规律为

$$\theta_m = a_0 \exp(-b_0 W) + c_0,$$

其中 $a_0 = 23.3$, $b_0 = 0.33$, $c_0 = 30$, 并且发现当颗粒直径 $d = 1.0$ mm, 在通道宽度 $W > 11.5$ cm 时, 通道边界两墙体对崩塌角 θ_m 的影响较小, 可以忽略; 而当保持圆筒宽度 W 不变时, 崩塌角 θ_m 也随颗粒直径 d 的增加而减小. Lee 等人^[2]通过二维分子动力学的方法研究颗粒系统的崩塌, 得出静止角 θ_r 随通道宽度 W 的增大而减小, 在 $W = 35\bar{d}$ (\bar{d} 为颗粒直径的平均值) 时趋于某一定值, 并且, 这个定值与摩擦系数 μ 有关.

Liu 等人^[3]研究有限尺度颗粒系统表面的崩塌本质, 得出要使静止角 θ_r 和崩塌角 θ_m 可以区分, 且当 $\delta = \theta_m - \theta_r \approx 2^\circ$ 时, 系统的临界尺度 $L \approx 30d$, 并且发现随着通道宽度 W 与颗粒直径 d 之比 W/d 的增大, 静止角 θ_r 和崩塌角 θ_m 均减少. Dorbolo^[4]研究水平平板上球形单层颗粒的崩塌现象, 发现当通道宽度 W 与颗粒直径 d 之比 W/d 较小时, 崩塌角 θ_m 较大, 分析其原因为在窄通道宽度下, 单层颗粒容易在两壁之间成拱, 拱的形成导致崩塌角 θ_m 增大. 以上研究均主要集中于研究静止角或崩塌角与通道宽度的关系, 可得出一个共同的结论: 在保持颗粒直径不变的条件下, 静止角或崩塌角随通道宽度的增大而减小, 但对于保持通道宽度不变的条件下, 静止角或崩塌角随颗粒直径的变化却很少涉及, 因此, 本文设计一实验, 着重研究在保持通道宽度不变的条件下, 通道内颗粒的静止角随颗粒直径的变化关系.

1 实验装置

实验装置如图 1 所示. 带刻度的崩塌凹槽长 80.00 cm, 宽 10.00 cm, 高 12.00 cm, 由一块底部玻璃和两侧金属铝板构成, 作为颗粒崩塌的通道, 整个

凹槽与水平面之间的夹角(称斜面倾角)为 θ , θ 角连续可调并可通过精度为 0.1° 的角传感器测定. 本实验所采用的颗粒为同种材料的塑性球形玻璃珠, 直径最小为 0.20 mm , 最大为 5.00 mm . 因底部玻璃较光滑, 颗粒与底部玻璃之间的摩擦系数较小, 易发生滑动, 因此, 为了阻止颗粒的整体滑动, 在凹槽一端固定一高为 0.50 cm 的挡板(称为出口处挡板), 而另一端封闭; 同时, 本实验所采用的斜面倾角在 $0^\circ\sim 12.5^\circ$ 之间. 整个装置开始时处于水平状态, 也即斜面倾角 θ 为零度, 用另一挡板挡住整个凹槽出口处, 此时, 在槽中随机堆积颗粒. 当颗粒在槽中堆积到一定的高度时(从出口处挡板上端开始计算为 9.50 cm), 拿掉挡板, 则发生崩塌现象. 崩塌后槽中颗粒堆表面与水平面之间的夹角即为通道内所堆积颗粒的静止角 θ_r . 缓慢抬高斜面倾角, 则颗粒又将发生崩塌, 崩塌后其静止角 θ_r 的大小可以通过计算斜面倾角 θ 和槽中颗粒堆积的倾角 α 而得出. 本实验主要研究固定通道宽度条件下, 颗粒直径大小对静止角的影响.

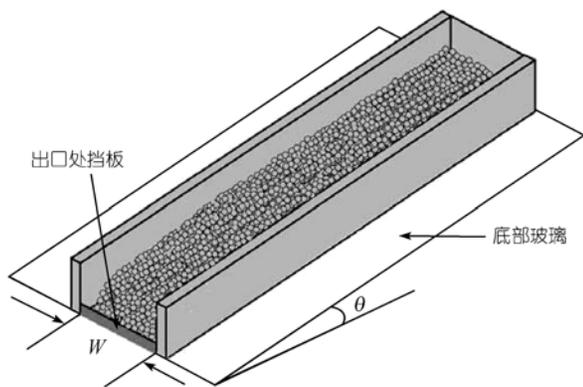


图 1 实验装置示意图

2 实验结果与讨论

本实验对 5 种不同直径的塑性球形颗粒进行研究, 其颗粒直径分别为 $(0.30\pm 0.10)\text{ mm}$, $(0.90\pm 0.10)\text{ mm}$, $(1.50\pm 0.10)\text{ mm}$, $(2.75\pm 0.25)\text{ mm}$ 和 $(4.75\pm 0.25)\text{ mm}$. 由于颗粒堆两次崩塌之间的时间间隔远远大于崩塌的持续时间, 因此, 颗粒堆的崩塌属于间歇崩塌. 图 2 所示即为不同斜面倾角下静止角 θ_r 随颗粒直径 d 的变化关系, 数据点 B0, B5, B7 和 B9 分别代表斜面倾角为 0° , 5.0° , 7.0° 和 9.0° 时的情形, 为描述方便, 本

文图中的颗粒直径均取其平均值. 由实验结果可以看出, 在给定斜面倾角的条件下, 随颗粒直径 d 的增大, 静止角 θ_r 增大.

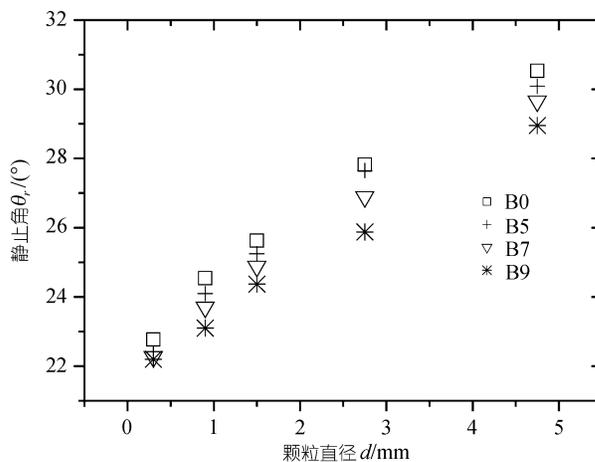


图 2 不同斜面倾角下静止角 θ_r 随颗粒直径 d 的变化关系
数据点 B0, B5, B7 和 B9 分别代表斜面倾角为 0° , 5.0° , 7.0° 和 9.0° 时的情形

以往研究者的研究主要集中于保持颗粒直径大小 d 不变, 改变通道宽度 W 的方法研究颗粒堆的崩塌现象. 保持颗粒直径不变, 增大通道宽度, 则通道宽度 W 与颗粒直径 d 的比值 W/d 增大, 与保持通道宽度不变的情形下, 减少颗粒直径的效果类同. 因此, 本文采用 $\lambda = 1/d$ 作为横坐标进一步研究静止角. 图 3 所示即为不同斜面倾角下静止角 θ_r 随 λ 的变化关系, 数据点 B0, B5, B7 和 B9 分别代表斜面倾角为 0° , 5.0° , 7.0° 和 9.0° 时的情形, 从图 3 上可以看出, 静止角 θ_r 随 λ 的增大而减小, 对实验数据点进行拟合发现, 静止角 θ_r 随 λ 的增大呈指数衰减趋势, 图 3 中虚线所示即为斜面倾角 7.0° 时的指数衰减拟合曲线, 拟合方程为

$$\theta_r = a \exp\left(-\frac{\lambda}{b}\right) + c,$$

其中系数 $a = 11.4$, $b = 0.42$, $c = 22.5$.

本实验对不同斜面倾角的情形进行研究, 发现静止角 θ_r 随 λ 的增大呈指数衰减是一个普遍趋势, 与斜面倾角的大小无关.

静止角随颗粒直径的增大而增大, 分析其机理为颗粒堆成拱所致. 本实验中两侧墙体并非绝对光滑, 而是具有一定的摩擦系数, 则颗粒与墙体之间由于摩擦的存在而成拱, 拱的存在可以提高沙堆的稳

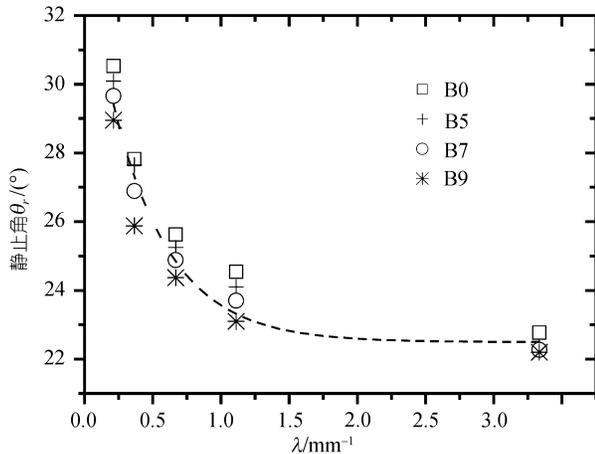


图3 不同斜面倾角下静止角 θ_r 随 λ 的变化关系

数据点 B0, B5, B7 和 B9 分别代表斜面倾角为 0° , 5.0° , 7.0° 和 9.0° 时的情形, 其中虚线所示是斜面倾角为 7.0° 时的指数拟合曲线

定性. 在保持通道宽度不变的条件下, 增大颗粒直径, 则颗粒直径的倒数 $\lambda = 1/d$ 减少, 墙体的边界效应影响变大, 使颗粒堆的结构较为稳定, 颗粒中的力链较为稳固, 所成的拱不容易破裂, 导致静止角增大. 反之, 若颗粒直径变小, 则颗粒直径的倒数 $\lambda = 1/d$ 就增大, 墙体的边界效应影响减少, 颗粒堆内部所成的拱较为不稳定、容易破裂, 导致静止角减少. 在本实验条件下, 当颗粒直径小于 0.90 mm , 也即 $\lambda > 1.10 \text{ mm}^{-1}$ 时, 两侧墙体对颗粒堆的影响越来越小, 可忽略不计,

此时静止角 θ_r 就趋于通道宽度无穷大时的静止角, 因此导致随 λ 的增大, 静止角 θ_r 呈指数衰减趋势.

实验最后对不同直径的颗粒, 静止角的涨落进行研究, 发现颗粒直径越大, 静止角 θ_r 的涨落越大. 在本实验条件下, 大直径的颗粒($d = (4.75 \pm 0.25) \text{ mm}$)静止角 θ_r 的涨落为 0.94° , 而小直径的颗粒($d = (0.30 \pm 0.10) \text{ mm}$)静止角 θ_r 的涨落为 0.08° . 对于颗粒直径如何影响静止角的涨落及崩塌的物理机理等问题, 我们将通过实验与计算机模拟相结合开展进一步的研究.

3 结论

通过颗粒在宽度固定的通道中发生崩塌的实验, 研究了颗粒直径大小对静止角的影响. 结果表明, 在本实验条件下, 颗粒堆两次崩塌之间的时间间隔远大于崩塌的持续时间, 颗粒堆的崩塌属于间歇崩塌, 得出静止角 θ_r 随颗粒直径 d 的倒数 $\lambda = 1/d$ 的增大呈指数衰减的结论, 这一变化趋势适用于任一斜面倾角, 理论分析其原因为颗粒堆成拱所致. 同时得出在本实验条件下, 当 $\lambda > 1.10 \text{ mm}^{-1}$ 时, 两侧墙体对颗粒堆的影响较小, 此时静止角趋向于通道宽度无穷大时的静止角. 本实验最后对不同直径的颗粒其静止角 θ_r 的涨落进行研究, 得出静止角 θ_r 的涨落随颗粒直径的增大而增大的结论.

参考文献

- Nowak S, Samadani A, Kudrolli A. Maximum angle of stability a wet granular pile. *Nat Phys*, 2005, 1(1): 50—52 [\[DOI\]](#)
- Lee J, Herrmann H J. Angle of repose and angle of marginal stability: Molecular dynamics of granular particles. *J Phys A-Math Gen*, 1993, 26(2): 373—383 [\[DOI\]](#)
- Liu C H, Jaeger H M, Nagel S R. Finite-size effects in a sandpile. *Phys Rev A*, 1991, 43(12): 7091—7092 [\[DOI\]](#)
- Dorbolo S. Stability limit of a granular monolayer. *Eur Phys J E*, 2005, 17(1): 77—81 [\[DOI\]](#)
- Albert R, Albert I, Hornbaker D, et al. Maximum angle of stability in wet and dry spherical granular media. *Phys Rev E*, 1997, 56(6): R6271—R6274 [\[DOI\]](#)
- Jaeger H M, Liu C H, Nagel S R. Relaxation at the angle of repose. *Phys Rev Lett*, 1989, 62(1): 40—43 [\[DOI\]](#)
- Aguirre M A, Nerone N, Calvo A, et al. Influence of the number of layers on the equilibrium of a granular packing. *Phys Rev E*, 2000, 62(1): 738—743 [\[DOI\]](#)
- Hill K M, Gioia G, Tota V V. Structure and Kinematics in dense free-surface granular flow. *Phys Rev Lett*, 2003, 91(6): 064302-1—4
- Zhou Y C, Xu B H, Yu A B. Numerical investigation of the angle of repose of monosized spheres. *Phys Rev E*, 2001, 64(2): 021301-1—8
- Borzsonyi T, Halsey T C, Ecke R E. Two scenarios for avalanche dynamics in inclined granular layers. *Phys Rev Lett*, 2005, 94(20): 208001-1—4