中国科学 : 数学 2017 年 第 47 卷 第 12 期 : 1879 ∼ 1890
SCIENTIA SINICA Mathematica

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

论 文

群胚的粗上同调和 Connes-Chern 特征映射

献给钱敏教授 90 华诞

唐翔[1*], WILLETT Rufus[2], 姚一隽[3]

1. Department of Mathematics, Washington University, St. Louis, MO 63130, USA;
2. Department of Mathematics, University of Hawai'i, Honolulu, HI 96822, USA;
3. 复旦大学数学科学学院, 上海 200433
E-mail: xtang@math.wustl.edu, rufus.willett@hawaii.edu, yaoyijun@fudan.edu.cn

收稿日期: 2017-06-12; 接受日期: 2017-11-07; 网络出版日期: 2017-11-28; * 通信作者
美国国家科学基金 (批准号: DMS1363250, DMS1401126 和 DMS1564281) 和国家自然科学基金 (批准号: 11522107, 11231002 和 11420101001) 资助项目

摘要 本文引入群胚上粗上同调群的概念, 构造了一个从群胚粗上同调群映到群胚 Roe $*$- 代数循环上同调群的 Connes-Chern 特征映射. 作为例子, 本文构造了平坦 G- 主丛所定义的和乐 (holonomy) 群胚上的一个粗上同调类.

关键词 群胚 粗几何 循环上同调

MSC (2010) 主题分类 58H10, 58B34

1 引言

在 20 世纪 70 年代末 80 年代初, Connes 和他的合作者们, 在一系列文章 (参见文献 [1–4]) 中, 建立了对闭流形上叶状结构的纵向指标定理的理论. 这是非交换几何的发展中一项奠基性的工作.

非紧流形上的叶状结构也是很常见的. 例如,

(1) 紧流形 M 上的 G- 主丛的全空间 P, 当 G 是非紧的时候, 是非紧的. P 上的一个平坦联络定义了 P 上的一个叶状结构.

(2) 紧流形 M 上的一个叶状结构自然提升到 M 的覆盖空间 N 上的叶状结构. 当 N 非紧时, 我们得到非紧流形 N 上的一个叶状结构.

(3) 紧流形 M 上的叶状结构自然提升到其所对应的 Connes 纤维丛 $\mathcal{M}$ 上的一个叶状结构 (参见文献 [2–5]).

从文献 [6] 开始, 我们对非紧流形 X 上叶状结构的纵向指标定理进行系统地研究. 我们的研究受到粗几何研究[7–10] 的启发. 考虑叶状结构所对应的和乐李群胚 $\mathsf{G} \rightrightarrows \mathsf{G}_0$. 在 X 上取定一个完备的 Riemann 度量, 由此我们可以得到群胚 G 上的一个粗结构. 一般地, 我们考虑一个局部紧群胚 G 上的粗结构 $\mathcal{E}$. 在文献 [6] 中, 我们引入了群胚 G 上的 Roe C^*- 代数 $C^*_{\mathcal{E}}(\mathsf{G})$, 并且在 Connes 切群胚的帮助

英文引用格式: Tang X, Willett R, Yao Y J. Coarse groupoid cohomology and Connes-Chern character (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1879–1890, doi: 10.1360/N012017-00123

下, 我们证明了 X 上的一个纵向椭圆微分算子的指标定义了代数 $C^*_{\mathcal{E}}(\mathsf{G})$ 的 K- 群 $K_0(C^*_{\mathcal{E}}(\mathsf{G}))$ 中的一个元素. 这里继续对非紧流形上的叶状结构的纵向指标定理进行研究. 在非交换几何中, 一个 (拓扑) 代数的 K- 群和它的循环上同调群有一个自然的配对. 本文主要研究光滑子代数 $C^\infty_{\mathcal{E}}(\mathsf{G})$ 的循环上同调群. 具体地, 我们构造代数 $C^\infty_{\mathcal{E}}(\mathsf{G})$ 上的一类循环上同调类. 在未来的工作中, 我们会用本文所定义的循环上同调类和它们与 K- 群的配对来研究纵向椭圆微分算子的指标.

我们的工作受到本文第一作者在文献 [11] 中构造的启发. Pflaum 等在文献 [11, 命题 1.4] 中构造了一个从群胚的上同调群到群胚代数 $C^\infty_c(\mathsf{G})$ 的循环上同调的特征映射. 由于这里考虑群胚 G 的单位空间 G_0 可能是非紧的, 光滑 Roe $*$- 代数 $C^\infty_{\mathcal{E}}(\mathsf{G})$ 比 $C^\infty_c(\mathsf{G})$ 要大. 特别地, $C^\infty_{\mathcal{E}}(\mathsf{G})$ 中的函数在 G 上可能没有紧支集. 所以, 我们需要对文献 [11, 命题 1.4] 中的构造进行适当的修改. 我们的修改受到 Roe [8] 给出的度量空间上的粗上同调群概念的影响. 我们在定义 2.3 中引入了群胚 G 的粗上同调群 $HX^\bullet(\mathsf{G})$ 的概念, 并且在定理 2.4 中构造了一个从 $HX^\bullet(\mathsf{G})$ 到代数 $C^\infty_{\mathcal{E}}(\mathsf{G})$ 的循环上同调群的特征映射. 在第 4 节中, 作为例子, 我们考虑闭流形 M 上 G- 主丛 P 上的平坦联络所定义的叶状结构. 在流形 M 的万有覆盖和 $\mathbb{R}^n$ 同胚的假设下, 我们构造了其所对应的和乐 (holonomy) 群胚 $\mathsf{H}_{\mathcal{F}}$ 上的一个粗上同调类. 在未来的工作中我们会用这个上同调类及它的推广来研究平坦 G- 主丛上的指标定理和数域 $\mathbb{C}$ 的代数 K- 群.

2 群胚的粗上同调

粗上同调的概念是由 Roe [10] 在研究度量空间的粗几何时引入的. 为了研究群胚上的粗几何, 本节引入群胚上粗上同调的概念.

2.1 群胚上的粗结构和 Roe $*$- 代数

本小节简要回顾群胚上的粗结构以及其上的 Roe $*$- 代数. 局部紧 Hausdorff 群胚上的粗结构的概念是由 Higson 等在文献 [12, 第 2 节] 中引入的.

群胚是每一个态射 (morphism) 都可逆的小范畴 $\mathsf{G} \rightrightarrows \mathsf{G}_0$. 用 $s, t : \mathsf{G} \to \mathsf{G}_0$ 表示 G 上的结构映射. G 上的乘法把满足 $t(g_1) = s(g_2)$ 的一对态射 (g_1, g_2) 映到 $m(g_1, g_2) \in \mathsf{G}$. 如果 G 是一个局部紧的空间, 以及 $s, t : \mathsf{G} \to \mathsf{G}_0$、逆映射 $i : g \to g^{-1}$、单位 $e : \mathsf{G}_0 \to \mathsf{G}$ 和乘法映射 m 都是连续的, 那么称 G 是局部紧的.

定义 2.1 局部紧群胚 $\mathsf{G} \rightrightarrows \mathsf{G}_0$ 上的粗结构 (coarse structure) $\mathcal{E}$ 由 G 上的邻缘集 (entourage) E 组成, 满足以下性质:

(1) 每一个邻缘集 E 是 G 上的开集;

(2) E 是邻缘集当且仅当 $E^{-1} := \{g \in \mathsf{G} \mid g^{-1} \in E\}$ 是邻缘集;

(3) 对任意邻缘集 E 和 F, $E \cdot F := \{g_1 g_2 \mid g_1 \in E, g_2 \in F\}$ 和 $E \cup F$ 都是邻缘集;

(4) 对任意邻缘集 E 和 G_0 中的任意紧集 C, $E \cap s^{-1}(C)$ 和 $F \cap t^{-1}(C)$ 在 G 中的闭包是紧集;

(5) 所有邻缘集的并是 G.

当 G 和 G_0 都是流形, 而且相关的结构映射 s、t、e、m 和 i 都是光滑映射, 以及 s 和 t 是浸入时, 称 G 是一个李群胚. 为简单起见, 本文假设所考虑的李群胚的每一个 t- 纤维, $t^{-1}(x)$ $(x \in \mathsf{G}_0)$ 都是连通的.

由于 $t:\mathsf{G}\to\mathsf{G}_0$ 是浸入的, 它的诱导映射 $t_*:T\mathsf{G}\to T\mathsf{G}_0$ 的核限制在 G_0 上是一个向量丛. 我们用 A 表示这个向量丛, $\ker(t_*:T\mathsf{G}\to T\mathsf{G}_0)\mid_{\mathsf{G}_0}$. 映射 $s:\mathsf{G}\to\mathsf{G}_0$ 诱导了一个向量丛映射 $\rho:A\to TM$. 本文中, 李群胚中的箭头是从左向右的. 由此, 与李群的情形类似, 李群胚上的乘法定义了 G 在 G 上的右作用, $\mathsf{G}\times_{\mathsf{G}_0}\mathsf{G}\to\mathsf{G},(h,g)\mapsto hg$. 不难验证, 元素 g 的作用是一个从 $t^{-1}(s(g))$ 到 $t^{-1}(t(g))$ 的光滑同胚. 这个作用的商空间和群胚 G 的单位空间 G_0 同胚. 同时, 群胚 G 在 G 上的右作用诱导了 G 在向量丛 $\ker(t_*:T\mathsf{G}\to T\mathsf{G}_0)$ 上的作用. 对应的商空间 $\ker(t_*:T\mathsf{G}\to T\mathsf{G}_0)/\mathsf{G}$ 和 A 同胚. 在此同胚下, A 的截面和 $\ker(t_*:T\mathsf{G}\to T\mathsf{G}_0)$ 的 G- 不变截面一一对应. $\ker(t_*:T\mathsf{G}\to T\mathsf{G}_0)$ 上的 G- 不变截面集合上有一个自然的李括号结构, 于是, 上述同胚也定义了在 A 的截面集合上的李括号结构 $[\cdot,\cdot]_A$. 这个李括号可以看成是流形 M 上切向量场之间李括号的推广. 不难验证向量丛映射 $\rho:A\to TM$ 是一个李代数同态. 合在一起, $(A,[\cdot,\cdot]_A,\rho)$ 构成了一个李代数胚.

利用 $\ker(t_*:T\mathsf{G}\to T\mathsf{G}_0)/\mathsf{G}$ 和 A 的同胚, 李代数胚上的一个光滑欧氏度量定义了 $\ker(t_*:T\mathsf{G}\to T\mathsf{G}_0)$ 上的一个 Riemann 度量. 由此, 对任意的 $x\in\mathsf{G}_0$, 我们对李群胚的 t- 纤维 $t^{-1}(x)$ 定义了一个 Riemann 度量结构. 在文献 [6, 命题 2.7] 中, 我们解释了如何从李代数胚 $(A,[\cdot,\cdot]_A,\rho)$ 上的度量定义对应的李群胚上的粗结构, 其中的例子包括完备 Riemann 流形上 (正则) 叶状结构所对应的和乐 (holonomy) 李群胚.

局部紧群胚 G 上的 Haar 系统是满足以下条件的一族测度 $\{\mu^x\}_{x\in\mathsf{G}_0}$: (1) 对任意 $x\in\mathsf{G}_0$, μ^x 是 t- 纤维, 纤维 G^x ($\mathsf{G}^x=\{g:t(g)=x\}$) 上的一个满支集的正则 Borel 测度; (2) 测度族 $x\mapsto\mu^x$ 是连续的; (3) 测度族 $\{\mu^x\}_{x\in\mathsf{G}_0}$ 关于 G 的右作用不变. 称一个 Haar 系统有有限几何, 如果对于每一个邻缘集 E, $\sup_{x\in\mathsf{G}_0}\mu^x(E\cap\mathsf{G}^x)$ 是有限的.

给定局部紧群胚 G 上的粗结构 $\mathcal{E}$ 和有有限几何的 Haar 系统 $\{\mu^x\}$, 我们在文献 [6, 定义 3.3] 定义了一个 Roe $*$- 代数 $C_{\mathcal{E}}(\mathsf{G})$. 定义如下, $C_{\mathcal{E}}(\mathsf{G})$ 由支集包含在 $\mathcal{E}$ 的某个邻缘集里的有界连续复值函数 f 组成:

$$f^*(g):=\overline{f(g^{-1})},\quad (f_1*f_2)(g):=\int_{\mathsf{G}^{t(g)}}f_1(gh^{-1})f_2(h)d\mu^{t(g)}(h).$$

在文献 [6, 定义 3.9] 中, 我们定义了 $C_{\mathcal{E}}(\mathsf{G})$ 的 C^*- 代数完备化 $C^*_{\mathcal{E}}(\mathsf{G})$, 称为群胚 G 上的 Roe C^*- 代数. 由于本文的主要研究目标是 $C_{\mathcal{E}}(\mathsf{G})$ 上的循环上同调, 我们在此不对 $C^*_{\mathcal{E}}(\mathsf{G})$ 的具体定义进行回顾了. 代数 $C_{\mathcal{E}}(\mathsf{G})$ 中的光滑函数 $f\in C^\infty(\mathsf{G})$ 构成 $C_{\mathcal{E}}(\mathsf{G})$ 的一个 $*$- 子代数, 我们称其为 $(\mathsf{G},\mathcal{E})$ 的光滑 Roe $*$- 代数 $C^\infty_{\mathcal{E}}(\mathsf{G})$.

2.2 度量空间的粗上同调

为了研究非紧度量空间上的指标定理, Roe 在文献 [8, 定义 2.7] 中引入了粗上同调的概念. 我们以下作简要回顾. (M,d) 是一个度量空间.

对每一个自然数 $q\in\mathbb{N}$, 考虑乘积空间

$$M^{q+1}=\underbrace{M\times\cdots\times M}_{q+1}$$

和其中的对角闭子流形

$$\Delta_q(M):=\{(x,\dots,x):x\in M\}\subseteq M^{q+1}.$$

在 M^{q+1} 上考虑由以下公式定义的度量 d^{q+1}:

$$d^{q+1}((x_0,\dots,x_q),(y_0,\dots,y_q)):=\max\{d(x_0,y_0),\dots,d(x_n,y_n)\}.$$

对每一个 $R>0$, 定义集合 $\mathrm{Pen}(\Delta_q;R)$ 如下:

$$\mathrm{Pen}(\Delta_q;R):=\{(x_0,\dots,x_n)\in M^{q+1}:d^{q+1}((x_0,\dots,x_n),\Delta_q)\leqslant R\}.$$

定义 2.2 给定 $q\geqslant 0$, 度量空间 (M,d) 上的粗 q- 复形 $CX^q(M)$ 由 M^{q+1} 上满足以下条件的局部有界 Borel 函数 φ 组成, $\varphi:M^{q+1}\to\mathbb{R}$, 对任意的 $R>0$, 闭包

$$\overline{\mathrm{Supp}(\varphi)\cap\mathrm{Pen}(\Delta_q;R)}\subseteq M^{q+1}$$

是紧集. 定义复形 $CX^\bullet(M)$ 上的导子 $\partial:C^qX(M)\to C^{q+1}X(M)$ 如下:

$$\partial\varphi(x_0,\dots,x_{q+1}):=\sum_{i=1}^{q+1}(-1)^i\varphi(x_0,\dots,\widehat{x}_i,\dots,x_{q+1}).$$

复形 $(CX^\bullet(M),\partial)$ 的上同调群定义了度量空间 (M,d) 上的粗上同调群 $HX^\bullet(M)$.

注 2.1 Roe 在文献 [8, 第 2 章] 中解释粗上同调群对度量空间之间的映射具有协变的性质. 当 M 是紧的时, 粗上同调群 $HX^q(M)$ $(q\geqslant 1)$ 是平凡的. 对于一般的空间 M, 存在一个自然的映射 c 从粗上同调群映到紧支集的 Alexander-Spanier 上同调群,

$$c:HX^\bullet(M)\to H_c^\bullet(M).$$

2.3 群胚的粗上同调

考虑群胚 $\mathsf{G}\rightrightarrows\mathsf{G}_0$ 上的一个粗结构 $\mathcal{E}$. 考虑空间

$$\mathsf{G}^{(n)}:=\{(g_1,\dots,g_n):t(g_1)=s(g_2),\dots,t(g_{n-1})=s(g_n)\}.$$

对 $\mathcal{E}$ 中的任意邻缘集 $E_1,\dots,E_n$, 定义 $\mathsf{G}^{(n)}$ 上的邻缘集

$$E_1\circ\cdots\circ E_n:=\{(g_1,\dots,g_n)\in\mathsf{G}^{(n)}:g_1\in E_1,\dots,g_n\in E_n\}.$$

以上邻缘集 $E_1\circ\cdots\circ E_n$ 组成了集合

$$\mathcal{E}^{(n)}:=\{E_1\circ\cdots\circ E_n:E_1,\dots,E_n\in\mathcal{E}\}.$$

不难验证, 所有邻缘集 $E_1\circ\cdots\circ E_n\in\mathcal{E}^{(n)}$ 的并集是 $\mathsf{G}^{(n)}$. 考虑映射 $f_i^n:\mathsf{G}^{(n)}\to\mathsf{G}^{(n-1)}$,

$$\begin{aligned}
&f_0^n(g_1,\dots,g_n)=(g_2,\dots,g_n),\\
&f_1^n(g_1,\dots,g_n)=(g_1g_2,\dots,g_n),\\
&\vdots\\
&f_{n-1}^n(g_1,\dots,g_n)=(g_1,\dots,g_{n-1}g_n),\\
&f_n^n(g_1,\dots,g_n)=(g_1,\dots,g_{n-1}).
\end{aligned}$$

引理 2.1 对任意邻缘集 $E_1,\dots,E_n\in\mathcal{E}$, $0\leqslant i\leqslant n$, $E_1\circ\cdots\circ E_n$ 在 f_i^n 下的像是一个邻缘集.

证明 不难计算, 当 $i=0,n$ 时, $f_0^n(E_1\circ\cdots\circ E_n)=E_2\circ\cdots\circ E_n$, $f_n^n(E_1\circ\cdots\circ E_n)=E_1\circ\cdots\circ E_{n-1}$; 当 $0\leqslant i\leqslant n$ 时,

$$f_i^n(E_1\circ\cdots\circ E_n)=E_1\circ\cdots\circ(E_i\cdot E_{i+1})\circ\cdots\circ E_n.$$

定义 2.1 中的性质 (3) 要求 $E_i\cdot E_{i+1}$ 是一个邻缘集, 所以, $f_i^n(E_1\circ\cdots\circ E_n)$ $(i=1,\ldots,n-1)$ 也是一个邻缘集. □

定义 2.3　给定 $k\geqslant 0$, 群胚 G 上的粗 k- 复形 $CX^k(\mathsf{G})$ 由满足以下条件的 $\mathsf{G}^{(k)}$ 上的函数 $\varphi:\mathsf{G}^{(k)}\to\mathbb{R}$ 组成:

(1) 函数 φ 是局部有界的实值 Borel 函数;

(2) 对任意 $E_1,\ldots,E_k\in\mathcal{E}$, 支集 $\mathrm{Supp}(\varphi)$ 与 $E_1\circ\cdots\circ E_k$ 的交集在 $\mathsf{G}^{(k)}$ 中的闭包是紧的.

不难验证, 群胚 G 上的粗 k- 复形 $CX^k(\mathsf{G})$ 构成一个线性空间. 下面讨论粗复形 $CX^\bullet(\mathsf{G})$ 上的导子.

引理 2.2　对任意 $\varphi\in CX^k(\mathsf{G})$, 定义 $\partial(\varphi):\mathsf{G}^{(k+1)}\to\mathbb{R}$ 如下:

$$\begin{aligned}\partial(\varphi)(g_0,\ldots,g_k):=&\,\varphi(g_1,\ldots,g_k)-\varphi(g_0g_1,\ldots,g_k))+\varphi(g_0,g_1g_2,\ldots,g_k)+\cdots\\&+(-1)^k\varphi(g_0,\ldots,g_{k-1}g_k)+(-1)^{k+1}\varphi(g_0,\ldots,g_{k-1}).\end{aligned}$$

函数 $\partial(\varphi)$ 属于 $CX^{k+1}(\mathsf{G})$.

证明　我们需要证明函数 $\partial(\varphi)$ 满足定义 2.3 中的条件 (1) 和 (2). 由于映射 f_i^{k+1} $(i=0,\ldots,k+1)$ 是连续的, 不难得出 $(f_i^{k+1})^*\varphi$ 是局部有界的实值 Borel 函数. 这是条件 (1). 我们注意到函数 $\partial(\varphi)$ 可以写成

$$(f_0^{k+1})^*\varphi-(f_1^{k+1})^*\varphi+\cdots+(-1)^{k+1}(f_{k+1}^{k+1})^*\varphi.$$

所以, 为了证明条件 (2), 我们只需证明 $(f_i^{k+1})^*\varphi$ 属于 $CX^{k+1}(\mathsf{G})$ $(i=0,\ldots,k)$. 我们的证明分成两种情形.

对 $i=0$ 或 $i=k$, 证明是类似的. 我们来解释 $i=0$ 时的证明. 支集 $\mathrm{Supp}((f_0^{k+1})^*\varphi)$ 可以写成

$$\{(g_0,\ldots,g_k)\in\mathsf{G}^{(k+1)}:(g_1,\ldots,g_k)\in\mathrm{Supp}(\varphi)\}.$$

对任意的邻缘集 $E_0,\ldots,E_k\in\mathcal{E}$, 支集 $\mathrm{Supp}((f_0^{k+1})^*\varphi)$ 与 $E_0\circ\cdots\circ E_k$ 的交可以写成

$$\mathrm{Supp}((f_0^{k+1})^*\varphi)\cap E_0\circ\cdots\circ E_k=\{(g_0,\ldots,g_k)\in\mathsf{G}^{(k+1)}:g_0\in E_0,(g_1,\ldots,g_k)\in\mathrm{Supp}(\varphi)\cap E_1\circ\cdots\circ E_k\}.$$

考虑如下映射 $s^k:\mathsf{G}^{(k)}\to\mathsf{G}_0$:

$$s^k(g_1,\ldots,g_k):=s(g_1)\in\mathsf{G}_0.$$

支集 $\mathrm{Supp}((f_0^{k+1})^*\varphi)$ 与 $E_0\circ\cdots\circ E_k$ 的交集是以下集合的子集:

$$E(\varphi,k+1,0):=E_0\cap s^{-1}(s^{k+1}(\mathrm{Supp}(\varphi)\cap E_1\circ\cdots\circ E_k))\times\mathrm{Supp}(\varphi)\cap E_1\circ\cdots\circ E_k.$$

由假设 $\varphi\in CX^k(\mathsf{G})$, $\mathrm{Supp}(\varphi)\cap E_1\circ\cdots\circ E_k$ 在 $\mathsf{G}^{(k)}$ 中的闭包是紧集. 由于映射 $s^{k+1}:\mathsf{G}^{k+1}\to\mathsf{G}_0$ 是连续的, 可知像集 $s^{k+1}(\mathrm{Supp}(\varphi)\cap E_1\circ\cdots\circ E_k)$ 在 G_0 中的闭包也是紧集. 由邻缘集的性质知,

$$E_0\cap s^{-1}(s^{k+1}(\mathrm{Supp}(\varphi)\cap E_1\circ\cdots\circ E_k))$$

在 G 中的闭包是紧集. 由此可知集合

$$E(\varphi,k+1,0)=E_0\cap s^{-1}(s^{k+1}(\mathrm{Supp}(\varphi)\cap E_1\circ\cdots\circ E_k))\times\mathrm{Supp}(\varphi)\cap E_1\circ\cdots\circ E_k$$

在 $\mathsf{G}\times\mathsf{G}^{(k)}$ 中的闭包是紧集. 因为 $\mathrm{Supp}((f_0^{k+1})^*\varphi)\cap E_0\circ\cdots\circ E_k$ 在 $\mathsf{G}^{(k)}$ 中的闭包是紧集 $\overline{E(\varphi,k+1,0)}$ 中的闭子集, 我们得出支集 $\mathrm{Supp}((f_0^{k+1})^*\varphi)$ 与 $E_0\circ\cdots\circ E_k$ 的交集在 $\mathsf{G}^{(k+1)}$ 中的闭包是也紧集. 于是 $(f_0^{k+1})^*\varphi$ 属于 $CX^{k+1}(\mathsf{G})$.

对 $i=1,\dots,k-1$, 证明也是类似的. 我们下面解释 $i=1$ 的情形. 此时支集 $(f_1^k)^*(\varphi)$ 可以写成

$$\{(g_0,\dots,g_k)\in\mathsf{G}^{(k+1)}:(g_0g_1,\dots,g_k)=f_1^{k+1}(g_0,\dots,g_k)\in\mathrm{Supp}(\varphi)\}.$$

对任意的邻缘集 $E_0,\dots,E_k\in\mathcal{E}$, 引理 2.1 证明了集合 $f_1^{k+1}(E_0\circ\cdots E_k)$ 还是一个邻缘集. 由 φ 属于 $C^kX(\mathsf{G})$ 的假设, 我们可以推出集合 $f_1^{k+1}(E_0\circ\cdots E_k)$ 和函数 φ 的支集 $\mathrm{Supp}(\varphi)$ 的交集在 $\mathsf{G}^{(k)}$ 的闭包是紧集. 由此, 我们推出集合 $f_1^{k+1}(E_0\circ\cdots E_k)$ 和 $\mathrm{Supp}(\varphi)$ 交集在 s^{k+1} 下的像在 G_0 中的闭包是紧集. 进一步, 集合 $E_0\circ\cdots\circ E_k$ 与支集 $\mathrm{Supp}(\varphi\circ f_1^{k+1})$ 的交集是集合

$$\begin{aligned}E(\varphi,k+1,1)&:=E_0\cap s^{-1}(f_1^{k+1}(E_0\circ\cdots E_k)\cap\mathrm{Supp}(\varphi))\times(f_1^{k+1}(E_0\circ\cdots E_k)\cap\mathrm{Supp}(\varphi))\\&\subseteq\mathsf{G}\times\mathsf{G}^{(k)}\end{aligned}$$

的子集. 由前解释, $E(\varphi,k+1,1)$ 在 $\mathsf{G}\times\mathsf{G}^{(k)}$ 中的闭包是一个紧集. 考虑自然嵌入, $i:\mathsf{G}^{(k+1)}\hookrightarrow\mathsf{G}\times\mathsf{G}^{(k)}$, $E_0\circ\cdots\circ E_k\cap\mathrm{Supp}(\varphi\circ f_1^{k+1})$ 在 $\mathsf{G}^{(k+1)}$ 中的闭包在 i 下的像是闭包 $\overline{E(\varphi,k+1,1)}$ 中的一个闭子集. 由于我们已知闭包 $\overline{E(\varphi,k+1,1)}$ 是紧集, 我们得出 $E_0\circ\cdots\circ E_k\cap\mathrm{Supp}(\varphi\circ f_1^{k+1})$ 在 $\mathsf{G}^{(k+1)}$ 中的闭包在嵌入 i 下的像是紧集. 所以, $E_0\circ\cdots\circ E_k\cap\mathrm{Supp}(\varphi\circ f_1^{k+1})$ 在 $\mathsf{G}^{(k+1)}$ 中的闭包是紧集. 于是, $(f_1^{k+1})^*\varphi$ 属于 $CX^{k+1}(\mathsf{G})$. $\square$

引理 2.2 保证了我们以下的定义的合理性.

定义 2.4 群胚 $(\mathsf{G},\mathcal{E})$ 的粗上同调 $HX^\bullet(\mathsf{G})$ 由复形 $CX^\bullet(\mathsf{G})$ 及其导子 $\partial:CX^k(\mathsf{G})\to CX^{k+1}(\mathsf{G})$ 的上同调群定义.

例 2.1 文献 [6, 注 2.3] 解释了当 G_0 是紧致的时, G 上只有一个唯一的粗结构 $\mathcal{E}$. 这个粗结构 $\mathcal{E}$ 由 G 中的相对紧致的开集组成. G 上的粗复形和 G 上的 Borel 上同调复形是一致的. 所以, 当 G_0 是紧致时, $HX^\bullet(\mathsf{G})$ 与 $H^\bullet_{\mathrm{Borel}}(\mathsf{G})$ 是同构的.

例 2.2 如果 G 是度量空间 (M,d) 的配对群胚, $\mathsf{G}(M)=M\times M\rightrightarrows\mathsf{G}_0=M$, 那么群胚 $\mathsf{G}(M)$ 的粗上同调复形可以与 Roe [8] 定义的 (M,d) 上的粗上同调复形同构. 于是, $\mathsf{G}(M)$ 的粗上同调群 $HX^\bullet(\mathsf{G}(M))$ 与 (M,d) 的粗上同调群 $HX^\bullet(M)$ 同构.

注 2.2 读者可以把本节中群胚粗上同调群的定义 2.4 与文献 [13, 定义 2.2] 和 [14, 定义 17] 中的叶状结构的粗上同调群的定义进行比较. 两者定义的主要区别在于, 定义 2.4 利用了群胚的乘法结构, 而文献 [13,14] 中的构造没有考虑这个方面的性质.

2.4 循环上同调

考虑群胚 G 上的粗结构 $\mathcal{E}$. 第 2.1 小节介绍了群胚 G 的光滑 Roe $*$- 代数 $C^\infty_{\mathcal{E}}(\mathsf{G})$. 下面研究子代数 $C^\infty_{\mathcal{E}}(\mathsf{G})$ 上的多重线性泛函和循环上同调群. 为此, 首先回顾群胚 G 上的不变测度的概念, 给定一个单位空间 G_0 上的测度 ν, 测度 ν 诱导了群胚 G 上的一个测度 $m^{\mu,\nu}$ 如下 (参见文献 [15, 定义 3.1]): 对任意 G 上的有紧支集的 Borel 函数 f, 有

$$\int_{\mathsf{G}}fdm^{\mu,\nu}:=\int_{\mathsf{G}_0}d\nu(x)\int_{\mathsf{G}^x}f(g)d\mu^{t(g)}(g).$$

如果测度 $m^{\mu,\nu}$ 在 G 上的求逆映射 $i : \mathsf{G} \to \mathsf{G}$ (即 $i(g) = g^{-1}$) 下保持不变,

$$i_*(m^{\mu,\nu}) = m^{\mu,\nu},$$

那么称测度 ν 是 G- 不变的. 如果 G 存在不变测度 ν, 那么称 G 是幺模群胚. 以下篇幅中假设群胚 G 是幺模的. 我们选定一个 G- 不变测度 ν. 给定 $\varphi \in CX^k(\mathsf{G})$, 定义代数 $C^\infty_{\mathcal{E}}(\mathsf{G})$ 上的一个 $(k+1)$- 线性泛函 $\mathrm{ch}(\varphi)$. 对任意 $f_0, \dots, f_k \in C^\infty_{\mathcal{E}}(\mathsf{G})$, 定义

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}_k(\varphi)(f_0, \dots, f_k) := \int_{\mathsf{G}_0} d\nu(x) \int_{(g_1,\dots,g_k)\in \mathsf{G}^{(k)}} & d\mu^x(g_1\cdots g_k)\cdots d\mu^x(g_{k-1}g_k) d\mu^x(g_k) \\ & \times f_0((g_1\cdots g_k)^{-1}) f_1(g_1)\cdots f_k(g_k)\varphi(g_1, \dots, g_k).\end{aligned}$$

不难验证, 对每一个 $\varphi \in CX^k(\mathsf{G})$, 以上积分是收敛的.

为进一步研究映射 $\mathrm{ch}_\bullet$ 的性质, 我们简要回顾代数 $C^\infty_{\mathcal{E}}(\mathsf{G})$ 上的循环上同调的定义. 复形 $C^k(C^\infty_{\mathcal{E}}(\mathsf{G}))$ 由 $C^\infty_{\mathcal{E}}(\mathsf{G})$ 上的 $(k+1)$- 线性泛函组成. 定义导子 $b : C^k(C^\infty_{\mathcal{E}}(\mathsf{G})) \to C^{k+1}(C^\infty_{\mathcal{E}}(\mathsf{G}))$ 如下:

$$\begin{aligned}b(\Psi)(f_0, \dots, f_{k+1}) := & \Psi(f_0 * f_1, \dots, f_{k+1}) - \Psi(f_0, f_1 * f_2, \dots, f_{k+1}) \\ & + \Psi(f_0, f_1, f_2 * f_3, \dots, f_{k+1}) + \cdots + (-1)^k \Psi(f_0, \dots, f_k * f_{k+1}) \\ & + (-1)^{k+1}\Psi(f_{k+1} * f_0, \dots, f_k).\end{aligned}$$

循环群 $\mathbb{Z}_{k+1} := \mathbb{Z}/(k+1)\mathbb{Z}$ 作用在复形 $C^k(C^\infty_{\mathcal{E}}(\mathsf{G}))$ 上. 假设 t_{k+1} 是 $\mathbb{Z}_{k+1}$ 的生成元. 群元素 t_{k+1} 在 $C^k(C^\infty_{\mathcal{E}}(\mathsf{G}))$ 上的作用如下:

$$t_{k+1}(\Psi)(f_0, \dots, f_k) := \Psi(f_k, f_0, \dots, f_{k-1}).$$

同时定义 $\mathbb{Z}_{k+1}$ 在 G 的粗上同调复形 $CX^k(\mathsf{G})$ 上的作用如下:

$$t_{k+1}(\varphi)(g_1, \dots, g_k) := \varphi((g_1\cdots g_k)^{-1}, g_1, \dots, g_{k-1}).$$

读者可自行验证以上的公式定义了循环群 $\mathbb{Z}_{k+1}$ 在复形 $C^k(C^\infty_{\mathcal{E}}(\mathsf{G}))$ 和 $CX^k(\mathsf{G})$ 的作用. 如果 $CX^k(\mathsf{G})$ 和 $C^k(C^\infty_{\mathcal{E}}(\mathsf{G}))$ 中的上链满足以下不变性:

$$t_{k+1}(\varphi) = (-1)^k\varphi, \quad t_{k+1}(\Psi) = (-1)^k\Psi,$$

那么称它们是循环上链. 我们用 $CX^k_\lambda(\mathsf{G})$ 和 $C^k_\lambda(C^\infty_{\mathcal{E}}(\mathsf{G}))$ 代表循环上链组成的子复形. 不难验证导子 $\partial : CX^\bullet(\mathsf{G}) \to C^{\bullet+1}X(\mathsf{G})$ 和 $b : C^\bullet(C^\infty_{\mathcal{E}}(\mathsf{G}) \to C^{\bullet+1}(C^\infty_{\mathcal{E}}(\mathsf{G})$ 保持循环上链组成的子复形. 称复形 $CX^k_\lambda(\mathsf{G})$ 的同调群为群胚 G 的循环粗上同调群, 记为 $HX^\bullet_\lambda(\mathsf{G})$. 称复形 $C^k_\lambda(C^\infty_{\mathcal{E}}(\mathsf{G}))$ 的上同调群为代数 $C^\infty_{\mathcal{E}}(\mathsf{G})$ 的循环上同调群, 记为 $H^\bullet_\lambda(C^\infty_{\mathcal{E}}(\mathsf{G}))$.

定理 2.1 假设群胚 G 是幺模的. 映射 $\mathrm{ch} : CX^\bullet(\mathsf{G}) \to C^\bullet(C^\infty_{\mathcal{E}}(\mathsf{G}))$ 满足以下性质:

(1) $\mathrm{ch}_{k+1}(\partial\varphi) = b(\mathrm{ch}_k(\varphi))$;

(2) $\mathrm{ch}_k(t_{k+1}(\varphi)) = t_{k+1}(\mathrm{ch}_k(\varphi))$.

由此, 映射 $\mathrm{ch}_\bullet$ 诱导了一个从群胚 G 的循环粗上同调群到代数 $C^\infty_{\mathcal{E}}(\mathsf{G})$ 上的循环上同调群的映射,

$$\mathrm{ch}_\bullet : HX^\bullet_\lambda(\mathsf{G}) \to H^\bullet_\lambda(C^\infty_{\mathcal{E}}(\mathsf{G})).$$

以下称映射 $\mathrm{ch}_\bullet$ 为群胚 G 粗上同调的 Connes-Chern 特征映射.

证明 我们首先证明 (1). 对任意的 $f_0,\dots,f_{k+1}\in C_{\mathcal{E}}^{\infty}(\mathsf{G})$, 我们计算赋值

$$\mathrm{ch}_{k+1}(\partial\varphi)(f_0,\dots,f_{k+1}).$$

以下计算由映射 $\mathrm{ch}_\bullet$ 的定义和测度族 $\{\mu^x\}_{x\in\mathsf{G}_0}$ 的右平移不变性得到:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}_{k+1}(\partial\varphi)(f_0,\dots,f_{k+1}) &= \int_{\mathsf{G}_0} d\nu(x)\int_{(g_1,\dots,g_k,g_{k+1})\in\mathsf{G}^{(k+1)}} d\mu^x(g_1\cdots g_{k+1})\cdots d\mu^x(g_kg_{k+1})d\mu^x(g_{k+1})\\
&\quad\times f_0((g_1\cdots g_{k+1})^{-1})f_1(g_1)\cdots f_{k+1}(g_{k+1})\partial\varphi(g_1,\dots,g_{k+1})\\
&= \int_{\mathsf{G}_0} d\nu(x)\int_{(g_1,\dots,g_k,g_{k+1})\in\mathsf{G}^{(k+1)}} d\mu^x(g_1\cdots g_{k+1})\cdots d\mu^x(g_kg_{k+1})d\mu^x(g_{k+1})\\
&\quad\times f_0((g_1\cdots g_{k+1})^{-1})f_1(g_1)\cdots f_{k+1}(g_{k+1})\\
&\quad\times(\varphi(g_2,\dots,g_{k+1})-\varphi(g_1g_2,\dots,g_{k+1})+\cdots+(-1)^k\varphi(g_1,\dots,g_kg_{k+1})\\
&\quad+(-1)^{k+1}\varphi(g_1,\dots,g_k))\\
&= \mathrm{ch}_k(\varphi)(f_0*f_1,\dots,f_{k+1})-\mathrm{ch}_k(\varphi)(f_0,f_1*f_2,\dots,f_{k+1})+\cdots\\
&\quad+(-1)^k\,\mathrm{ch}_k(\varphi)(f_0,\dots,f_k*f_{k+1})+(-1)^{k+1}\,\mathrm{ch}_k(\varphi)(f_{k+1}*f_0,\dots,f_k)\\
&= b(\mathrm{ch}_k(\varphi))(f_0,\dots,f_{k+1}).
\end{aligned}$$

接下来证明 (2). 对任意的 $f_0,\dots,f_k\in C_{\mathcal{E}}^{\infty}(\mathsf{G})$, 我们计算以下赋值:

$$\mathrm{ch}_k(t_{k+1}(\varphi))(f_0,\dots,f_k).$$

由映射 $\mathrm{ch}_\bullet$ 的定义, 可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}_k(t_{k+1}(\varphi))(f_0,\dots,f_k) &= \int_{\mathsf{G}_0} d\nu(x)\int_{(g_1,\dots,g_k)\in\mathsf{G}^{(k)}} d\mu^x(g_1\cdots g_k)\cdots d\mu^x(g_{k-1}g_k)d\mu^x(g_k)\\
&\quad\times f_0((g_1\cdots g_k)^{-1})f_1(g_1)\cdots f_k(g_k)t_{k+1}(\varphi)(g_1,\dots,g_k).
\end{aligned}$$

根据 $t_{k+1}(\varphi)$ 的定义, 可得

$$t_{k+1}(\varphi)(g_1\cdots,g_k)=\varphi((g_1\cdots g_k)^{-1},g_1,\dots,g_{k-1}).$$

我们得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}_k(t_{k+1}(\varphi))(f_0,\dots,f_k) &= \int_{\mathsf{G}_0} d\nu(x)\int_{(g_1,\dots,g_k)\in\mathsf{G}^{(k)}} d\mu^x(g_1\cdots g_k)\cdots d\mu^x(g_{k-1}g_k)d\mu^x(g_k)\\
&\quad\times f_0((g_1\cdots g_k)^{-1})f_1(g_1)\cdots f_k(g_k)\varphi((g_1\cdots g_k)^{-1},g_1,\dots,g_{k-1}).
\end{aligned}$$

由于测度族 $\{\mu^x\}_{x\in\mathsf{G}_0}$ 是右平移不变的, 我们可以把以上积分写成如下表达式:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathsf{G}_0} d\nu(x)\int_{(g_1,\dots,g_k)\in\mathsf{G}^{(k)}} d\mu^{t(g_k^{-1})}(g_1\cdots g_{k-1})\cdots d\mu^{t(g_k^{-1})}(g_{k-1})d\mu^x(g_k)\\
&\quad\times f_0((g_1\cdots g_k)^{-1})f_1(g_1)\cdots f_k(g_k)\varphi((g_1\cdots g_k)^{-1},g_1,\dots,g_{k-1}).
\end{aligned}\tag{2.1}$$

假设了群胚 G 是幺模的, 则有以下等式:

$$d\nu(x)d\mu^x(g_k)=d\nu(t(g_k^{-1}))d\mu^{t(g_k^{-1})}(g_k^{-1})=d\nu(s(g_k))d\mu^{s(g_k)}(g_k^{-1}).$$

由此我们可以把 (2.1) 中的积分写成关于 $t(g_k^{-1})$ 积分,

$$\int_{\mathsf{G}_0} d\nu(t(g_k^{-1}))\int_{(g_1,\dots,g_k)\in\mathsf{G}^{(k)}} d\mu^{t(g_k^{-1})}(g_1\cdots g_{k-1})\cdots d\mu^{t(g_k^{-1})}(g_{k-1})d\mu^{t(g_k^{-1})}(g_k^{-1})$$
$$\times f_0((g_1\cdots g_k)^{-1})f_1(g_1)\cdots f_k(g_k)\varphi((g_1\cdots g_k)^{-1},g_1,\dots,g_{k-1}).$$

我们作变换 $h_1=(g_1\cdots g_k)^{-1}$, $h_2=g_1,\dots,$ $h_k=g_{k-1}$. 注意到 $g_k=(h_1\cdots h_k)^{-1}$. 于是,

$$\mathrm{ch}_k(t_{k+1}(\varphi))(f_0,\dots,f_k)$$

可以表达如下:

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}_k(t_{k+1}(\varphi))(f_0,\dots,f_k)&=\int_{\mathsf{G}_0} d\nu(x)\int_{(g_1,\dots,g_k)\in\mathsf{G}^{(k)}} d\mu^x(h_k)\cdots d\mu^x(h_2\cdots h_k)d\mu^x(h_1\cdots h_k)\\&\quad\times f_0(h_1)f_1(h_2)\cdots f_{k-1}(h_k)f_k((h_1\cdots h_k)^{-1})\varphi(h_1,h_2,\dots,h_k)\\&=t_{k+1}(\mathrm{ch}_k(\varphi))(f_0,\dots,f_k).\end{aligned}$$

由此, 我们完成了定理 2.1 的证明. □

3　平坦 G- 主丛

本节介绍从平坦 G- 主丛得到的一个例子.

3.1　叶状结构和群胚

考虑李群 G 及闭流形 M 上的一个平坦 G- 主丛 P. 我们用以下方式来刻画 P. 假设 $\widehat{M}$ 是 M 的万有覆盖. 我们用 Γ 代表流形 M 的基本群 $\pi_1(M)$. 群 Γ 自由和恰当地作用在流形 $\widehat{M}$ 上. 这个作用的商空间是 M. M 上的平坦 G- 主丛由和乐 (holonomy) 表示 $\alpha:\Gamma\to G$ 决定. 表示 α 诱导了群 Γ 在 G 上的右平移作用. 由此, Γ 作用在乘积空间 $\widehat{M}\times G$ 上. 平坦 G- 主丛的全空间 P 可以表达成此作用的商空间 $(\widehat{M}\times G)/\Gamma$. 李群 G 在 G 上的左作用诱导了 G 在 P 上的自由和恰当的左作用. P 和此作用组成了 M 上的 G- 主丛结构.

在乘积空间 $\widehat{M}\times G$ 上有一个平凡的叶状结构 $\widehat{\mathcal{F}}$ 由形如 $\widehat{M}\times\{g\}$ $(g\in G)$ 的子流形组成. 群 Γ 的每一个元素 γ 把子流形 $\widehat{M}\times\{g\}$ 映到 $\widehat{M}\times\{g\alpha(\gamma)\}$. 于是, $\widehat{\mathcal{F}}$ 诱导了主丛 P 上的叶状结构. 覆盖映射 $\pi:\widehat{M}\to M$ 提升到主丛上 $\pi:P\to M$ 的结构映射. 它的诱导映射 $d\pi:TP\to TM\mathcal{F}$ 限制在 $\mathcal{F}$ 上, $d\pi_p:\mathcal{F}_p\to T_{\pi(p)}M$ 是一个同构. 流形 P 上的叶状结构 $\mathcal{F}$ 上关于 G 在 P 上右作用不变, 于是, $\mathcal{F}$ 定义了 G- 主丛 P 上一个平坦联络 ∇.

以下考虑 G- 主丛 P 上的叶状结构 $\mathcal{F}$ 所定义的和乐群胚 $\mathsf{H}_{\mathcal{F}}$. 根据定义, $\mathsf{H}_{\mathcal{F}}$ 由叶状结构 $\mathcal{F}$ 中和乐等价的路径组成. 在我们的例子中, P 上叶状结构 $\mathcal{F}$ 中路径 l 的和乐是其所对应的 M 上的路径 $\pi(l)$ 关于联络 ∇ 的和乐决定的. 假设和乐表示 $\alpha:\Gamma\to G$ 是单同态. 在此假设下, 我们的群胚 $\mathsf{H}_{\mathcal{F}}$ 有以下相对简单的结构.

考虑配对李群胚 $\widehat{M}\times\widehat{M}\rightrightarrows\widehat{M}$ 和流形 G 的乘积 $\widehat{M}\times\widehat{M}\times G\rightrightarrows\widehat{M}\times G$,

$$\forall\,(\hat{x},\hat{y},g)\in\widehat{M}\times\widehat{M}\times G,\quad s(\hat{x},\hat{y},g)=(\hat{x},g),\quad t(\hat{x},\hat{y},g)=(\hat{y},g).$$

基本群 Γ 对角作用在 $\widehat{M}\times\widehat{M}\times G$ 和 $\widehat{M}\times G$ 上. 群胚 $\mathsf{H}_{\mathcal{F}}$ 可以如下定义:

$$\mathsf{H}_{\mathcal{F}}:=(\widehat{M}\times\widehat{M}\times G)/\Gamma\rightrightarrows\mathsf{H}_{\mathcal{F},0}:=(\widehat{M}\times G)/\Gamma=P.$$

注意到, 当群 G 是非紧的时, 群胚 $\mathsf{H}_{\mathcal{F}}$ 的单位空间 P 是非紧的.

选取 $\widehat{M}$ 上的一个 Γ- 不变的 Riemann 度量 g 及其所对应的的度量体积元 Ω. 我们可以验证 $s^*(\Omega)\wedge t^*(\Omega)$ 定义了配对群胚 $\widehat{M}\times\widehat{M}\rightrightarrows\widehat{M}$ 上的一个不变测度. 进一步, 在 G 上取一个右不变 Haar 测度 dg. 不难验证, $s^*(\Omega)\wedge t^*\Omega\wedge dg$ 定义了 $\widehat{M}\times\widehat{M}\times G\rightrightarrows\widehat{M}\times G$ 上的不变测度. 进一步可以验证这个测度在群 Γ 的作用下也是不变的. 于是, $s^*(\Omega)\wedge t^*\Omega\wedge dg$ 定义了群胚 $\mathsf{H}_{\mathcal{F}}$ 的不变测度. 所以, 我们得出群胚 $\mathsf{H}_{\mathcal{F}}$ 是幺模的.

3.2 粗闭链

本节假设万有覆盖 $\widehat{M}$ 和欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 同胚. 在此条件下, 我们构造群胚 $\mathsf{H}_{\mathcal{F}}$ 上的一个粗闭链.

选取在 $\widehat{M}$ 上的一个有紧支集 X 的连续函数 λ. 为简单起见, 不妨假设 $\lambda\Omega$ 在 X 上的积分是 1. 另外, 选取在 G 上一个有紧支集 L 的连续函数 χ.

对任意 $x_0,x_1,\dots,x_n\in\widehat{M}$, 用 $\Delta(x_0,\dots,x_n)$ 代表 $\widehat{M}=\mathbb{R}^n$ 中顶点为 $x_0,\dots,x_n$ 的定向线性单纯复形. 定义 $\mathsf{H}_{\mathcal{F}}$ 上的一个 n- 上链 φ. 我们用 $[x_0,x_1,g]$ 代表 $(x_0,x_1,g)\in\widehat{M}\times\widehat{M}\times G$ 在 $\mathsf{H}_{\mathcal{F}}=(\widehat{M}\times\widehat{M}\times G)/\Gamma$ 下的像. 由于 Γ 在 $\widehat{M}\times\widehat{M}\times G$ 和 $\widehat{M}\times G$ 上的作用是自由的, 任意 $(h_1,\dots,h_n)\in\mathsf{H}_{\mathcal{F}}^{(n)}$ 可以表达如下:

$$h_1=[x_0,x_1,g],\quad h_2=[x_1,x_2,g],\quad \dots,\quad h_n=[x_{n-1},x_n,g].$$

定义 $\mathsf{H}_{\mathcal{F}}$ 上的 n- 上链 φ 如下:

$$\varphi(h_1,\dots,h_n):=\sum_{\gamma\in\Gamma}\chi(g\alpha(\gamma))\int_{\Delta(x_0\cdot\gamma,\dots,x_n\cdot\gamma)}\lambda\Omega.$$

注意到, 由于 Γ 在 $\widehat{M}$ 上的作用是恰当的, 以及集合 X 是预紧集, 因此只会有有限个 γ 使得集合 $\Delta(x_0\cdot\gamma,\dots,x_n\cdot\gamma)$ 和 X 的交集是非空的. 所以, 函数 φ 的定义中的求和是一个有限求和.

性质 3.1 函数 φ 是群胚 $\mathsf{H}_{\mathcal{F}}$ 上的一个循环闭粗上链.

证明 考虑乘积空间

$$Y:=\underbrace{\widehat{M}\times\cdots\times\widehat{M}}_{n+1}\times G$$

上如下定义的函数 Φ:

$$\Phi(x_0,\dots,x_n,g):=\chi(g)\int_{\Delta(x_0,\dots,x_n)}\lambda\Omega.$$

因为 $\Delta(x_0,\dots,x_n)$ 关于 $(x_0,\dots,x_n)$ 是连续的, χ 和 λ 都是连续函数, 我们可以得出函数 Φ 在空间 Y 上是连续的.

群 Γ 在 $\widehat{M}$ 上的作用是自由且恰当的. 于是, 对于任意 $\widehat{M}=\mathbb{R}^n$ 中的有界球 B, 最多只有有限个群元素 $\gamma_1,\dots,\gamma_k$ 使得

$$(B\cdot\gamma_i)\cap\operatorname{supp}(\lambda)\neq\emptyset,\quad i=1,\dots,k.$$

由此, 如果 $(x_0,\dots,x_n)\in B$, 那么 Y 上的函数

$$\overline{\Phi}(x_0,\dots,x_n,g):=\sum_{\gamma\in\Gamma}\chi(g\alpha(\gamma))\int_{\Delta(x_0\cdot\gamma,\dots,x_n\cdot\gamma)}\lambda\Omega=\sum_{i=1}^{k}\chi(g\alpha(\gamma_i))\int_{\Delta(x_0\cdot\gamma_i,\dots,x_n\cdot\gamma_i)}\lambda\Omega$$

对于 $(x_0,\dots,x_n,g)$ 是连续的.

群 Γ 自由恰当的对角作用在流形 Y 上, 这个作用的商空间与 $\mathsf{H}_{\mathcal{F}}^{(n)}$ 同胚. 不难验证函数 $\overline{\Phi}$ 关于群 Γ 在 Y 上的作用是不变的, 且 $\overline{\Phi}$ 是函数 φ 在 Y 上的拉回. 因此, 我们可以得出 φ 是 $\mathsf{H}_{\mathcal{F}}^{(n)}$ 上的连续函数.

群胚 $\mathsf{H}_{\mathcal{F}}$ 的粗结构由以下的邻缘集组成:

$$E=\{[x_0,x_1,g]\mid x_0-x_1\in B\}.$$

以上 B 是 $\widehat{M}$ 上一个中心在原点的有界开球. 于是, $\mathsf{H}_{\mathcal{F}}^{(n)}$ 上的一个邻缘集有如下的形式:

$$E_1\circ\cdots\circ E_n:=\{([x_0,x_1,g],[x_1,x_2,g],\dots,[x_{n-1},x_n,g])\mid x_0-x_1\in B_1,\dots,x_{n-1}-x_n\in B_n\}.$$

以上 $B_1,\dots,B_n$ 是 $\widehat{M}$ 上的 n 个中心在原点的有界开球. 由此得出, 如果 $\Delta(x_0,\dots,x_n)$ 与 X 的交集非空, 那么存在一个正数 R, 满足对每一个 $i=1,\dots,n$, x_i 到集合 X 的距离小于 R. 由于 X 是紧集, 通过使用三角不等式, 我们可以得出存在一个可能更大的正数 R', 对每一个 $i=1,\dots,n$, x_i 属于中心在原点半径为 R' 的球 B. 由此, 如果 $\Phi(x_0,\dots,x_n,g)\neq 0$, 那么 $x_0,\dots,x_n\in B$ 且 $g\in L$ (函数 χ 在 G 上的紧支集). 我们特别指出这里的球 B 只依赖于集合 X 和开球 $B_1,\dots,B_n$, 而与 $x_0,\dots,x_n$ 和 γ 无关.

假设 $\{([x_0^i,x_1^i,g^i],\dots,[x_{n-1}^i,x_n^i,g^i])\}$ 是 $E_1\circ\cdots\circ E_n$ 与 $\operatorname{supp}(\varphi)$ 交集的一个无限子集. 由函数 φ 的定义, 我们得出存在 $\gamma_i\in\Gamma$ 使得 $\Phi(x_0^i\cdot\gamma_i,\dots,x_n^i\cdot\gamma_i,g^i\alpha(\gamma_i))\neq 0$. 由以上的讨论知, $x_0^i\cdot\gamma_i\in B,\dots,x_n^i\cdot\gamma_i\in B$, $g^i\alpha(\gamma_i)\in L$. 因为 B 和 L 都是预紧的, 所以, $\{(x_0^i\cdot\gamma_i,\dots,x_n^i\cdot\gamma_i,g^i\alpha(\gamma_i))\}$ 中存在收敛的子序列. 由此得出它们在商空间 $\mathsf{H}_{\mathcal{F}}^{(n)}$ 的像 $\{([x_0^i,x_1^i,g^i],\dots,[x_{n-1}^i,x_n^i,g^i])\}$ 也有收敛的子序列. 所以, $E_1\circ\cdots\circ E_n$ 与 $\operatorname{supp}(\varphi)$ 交集是一个预紧集.

应用 Stokes 定理, 我们可以直接验证

$$\Phi(x_1,\dots,x_n,g)-\Phi(x_0,x_2,\dots,x_n,g)+\cdots+(-1)^{n+1}\Phi(x_0,\dots,x_n,g)=0.$$

由此可以直接验证 $\partial\varphi=0$. 通过直接计算, 我们不难验证 φ 是循环的. 所以, 我们得出 φ 是群胚 $\mathsf{H}_{\mathcal{F}}$ 上的一个循环闭粗上链. $\square$

注 3.1 我们在本节中并不要求万有覆盖 $\widehat{M}$ 与 $\mathbb{R}^n$ 等距同胚.

注 3.2 性质 3.1 引出一个很自然的问题: 粗上同调类 $[\varphi]$ 是不是平凡的? 文献 [8, 例 (2.20) 和 (3.40)] 建议在一般的时候 φ 是非平凡的. 由此可以应用定理 2.1 得到代数 $C_{\mathcal{E}}^{\infty}(\mathsf{H}_{\mathcal{F}})$ 上的一个循环上同调类 $\operatorname{ch}(\varphi)$. 我们将在未来的文章中对这个问题从指标定理的角度对 $\operatorname{ch}(\varphi)$ 进行研究, 从而得出 $[\varphi]$ 是不平凡的.

致谢 感谢 Jerry Kaminker 教授与我们的讨论. 感谢上海数学中心为我们提供良好的合作访问机会.

参考文献

1 Connes A. Sur la théorie non commutative de l'intégration. In: Algèbres d'Opérateurs (Séminaire sur les Algébres d'Opérateurs, Les Plans-sur-Bex, Suisse, 13–18 mars 1978) (in French). Lecture Notes in Mathematics, vol. 725. Berlin: Springer, 1979, 19–143

2 Connes A. Cyclic cohomology and the transverse fundamental class of a foliation. In: Geometric Methods in Operator Algebras (Kyoto, 1983). Pitman Research Notes in Mathematics Series, 123. Harlow: Longman Sci Tech, 1986, 52–144

3 Connes A. Noncommutative Geometry. San Diego: Academic Press, 1994
4 Connes A, Skandalis G. The longitudinal index theorem for foliations. Publ Res Inst Math Sci, 1984, 20: 1139–1183
5 Zhang W. Vanishing theorems on foliations. Ann of Math (2), 2017, 185: 1035–1068
6 Tang X, Willett R, Yao Y. Roe C^*-algebra for groupoids and generalized Lichnerowicz vanishing theorem for foliated manifolds. ArXiv:1605.0711, 2016
7 Roe J. An index theorem on open manifolds, I; II. J Differential Geom, 1988, 27: 87–113; 115–136
8 Roe J. Coarse Cohomology and Index Theory on Complete Riemannian Manifolds. Providence: Amer Math Soc, 1993
9 Roe J. Index Theory, Coarse Geometry, and Topology of Manifolds. CBMS Conference Proceedings 90. Providence: Amer Math Soc, 1995
10 Roe J. Lectures on Coarse Geometry. University Lecture Series 31. Providence: Amer Math Soc, 2003
11 Pflaum M, Posthuma H, Tang X. The localized longitudinal index theorem for Lie groupoids and the van Est map. Adv Math, 2015, 270: 223–262
12 Higson N, Pedersen E, Roe J. C^*-algebras and controlled topology. K-Theory, 1997, 11: 209–239
13 Heitsch J. Coarse cohomology for foliations: The general case. Illinois J Math, 2002, 46: 1061–1076
14 Heitsch J, Hurder S. Coarse cohomology for families. Illinois J Math, 2001, 45: 323–360
15 Renault J. A Groupoid Approach to C^*-Algebras. Lecture Notes in Mathematics, vol. 793. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1980

Coarse groupoid cohomology and Connes-Chern character

TANG Xiang, WILLETT Rufus & YAO YiJun

Abstract We introduce the concept of coarse groupoid cohomology for a groupoid equipped with a coarse structure. We construct a Connes-Chern character map from the coarse groupoid cohomology to the cyclic cohomology of the smooth coarse Roe algebra of the groupoid. As an example, we construct a cyclic coarse cocycle on the holonomy groupoid associated to a flat principal G-bundle for a Lie group G.

Keywords groupoid, coarse geometry, cyclic cohomology

MSC(2010) 58H10, 58B34

doi: 10.1360/N012017-00123