

Vilenkin 群上的 Gibbs-Butzer 微分算子*

苏维宜

(南京大学数学系, 南京 210093)

摘要 在局部紧 Vilenkin 群(简称 V 群)上定义仿微分算子, 讨论它的主要性质; 借助仿线性化基本定理, 研究 Gibbs-Butzer(简称 G-B) 微分算子, 并给出该类算子应用的例.

关键词 仿微分算子 仿线性化 Gibbs-Butzer 导数 Vilenkin 群

1 仿微分算子

我们采用文献[1]与[2]中的记号、定义以及定理和所引参考文献. 例如 G 为 V 群, $C^p(G)$ 为 G 上的 Hölder 空间, 等等.

先证明非线性函数的仿线性化基本定理.

定理 1 设 $F(y^1, \dots, y^N): \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ 是 $\mathbb{R}^N$ 上的 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ 函数, 在任一紧子集 $K \subset \mathbb{R}^N$ 上具有有界导数. 若 $u^j(x) \in C^p(G)$, $j=1, \dots, N$ 是 G 上的实值函数, 且对 $x \in G$, F 作为 G 上的函数, 若

$$\frac{\partial F}{\partial y^j}(u^1(x), \dots, u^N(x)) \in C^p(G), \quad j=1, \dots, N, \quad \text{则}$$

$$F(u^1(x), \dots, u^N(x)) = \sum_{j=1}^N \tilde{J} \frac{\partial F}{\partial y^j}(u^1(x), \dots, u^N(x)) u^j(x) + R(x), \quad (1)$$

其中 $R \in C^{2p}(G)$.

证 设 $u(x) = (u^1(x), \dots, u^N(x))$, 则 $F(u^1, \dots, u^N) = F \circ u$. 令 $u^j = \sum_{l=0}^{\infty} (u^j)_l$, $j=1, \dots, N$, 与 $u = \sum_{l=0}^{\infty} u_l$ 分别是 u^j 与 u 的 L-P 型分解^[2], $S_k u = \sum_{l=0}^{k-1} u_l$ 是 u 的部分和. 有

$$F \circ u = F \circ (\lim_k S_k u) = \sum_{k=0}^{\infty} \{F \circ (S_{k+1} u) - F \circ (S_k u)\}.$$

对于固定的 $N_0 \in \mathbb{N}$, 有 $F \circ (S_{k+1} u) - F \circ (S_k u) = \tilde{r}_k \cdot u_k + S_{k-N_0}(F' \circ u) \cdot u_k$, 其中“ $\cdot$ ”是内积, 而

$$\tilde{r}_k = \int_0^1 F' \circ (t S_{k+1} u + (1-t) S_k u) dt - S_{k-N_0}(F' \circ u).$$

故

$$F \circ u = F(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{r}_k \cdot u_k + \sum_{k=0}^{\infty} S_{k-N_0}(F' \circ u) \cdot u_k \equiv J_1 + J_2.$$

上式第二项 J_2 是仿积 $\sum_{j=1}^N \tilde{J} \frac{\partial F}{\partial y^j}(u^1(x), \dots, u^N(x)) u^j(x)$. 因为

$$F' \circ u = \text{grad } F(u) = \left(\frac{\partial F}{\partial y^1}(u^1, \dots, u^N), \dots, \frac{\partial F}{\partial y^N}(u^1, \dots, u^N) \right),$$

$$S_{k-N_0}(F' \circ u) = \left(S_{k-N_0} \frac{\partial F}{\partial y^1}(u), \dots, S_{k-N_0} \frac{\partial F}{\partial y^N}(u) \right),$$

可推出

$$J_2 = \sum_{k=0}^{\infty} S_{k-N_0}(F' \circ u) \cdot u_k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^N \left(S_{k-N_0} \frac{\partial F}{\partial y^j}(u) \right) (u^j)_k =$$

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-N_0} \left(\frac{\partial F}{\partial y^j}(u) \right)_l (u^j)_k = \sum_{j=1}^N \tilde{J} \frac{\partial F}{\partial y^j}(u^1(x), \dots, u^N(x)) u^j(x).$$

下面仅需证明 $J_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{r}_k \circ u_k \in C^{2\rho}(G)$. 令 $\tilde{r}_k \equiv \text{I}_k + \text{II}_k + \text{III}_k$, 其中

$$\text{I}_k = \int_0^1 F' \circ (t S_{k+1} u + (1-t) S_k u) dt - F' \circ (S_{k+1} u),$$

$$\text{II}_k = S_{k+1}(F' \circ u) - S_{k-N_0}(F' \circ u), \quad \text{III}_k = F' \circ (S_{k+1} u) - S_{k+1}(F' \circ u).$$

对于 II_k , 有

$$\text{II}_k = \left(\sum_{l=k-N_0}^k \left(\frac{\partial F}{\partial y^1}(u^1, \dots, u^N) \right)_l, \dots, \sum_{l=k-N_0}^k \left(\frac{\partial F}{\partial y^N}(u^1, \dots, u^N) \right)_l \right).$$

考虑 $1 \leq \alpha \leq N$,

$$\frac{\partial F}{\partial y^\alpha}(u^1, \dots, u^N)(x) = \frac{\partial F}{\partial y^\alpha}(u^1(x), \dots, u^N(x)) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\partial F}{\partial y^\alpha}(u^1(x), \dots, u^N(x)) \right)_l.$$

由假设

$$\left\| \left(\frac{\partial F}{\partial y^\alpha}(u^1(x), \dots, u^N(x)) \right)_l \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq c m_l^{-\rho},$$

可得

$$\left\| \sum_{l=k-N_0}^k \left(\frac{\partial F}{\partial y^\alpha}(u^1(x), \dots, u^N(x)) \right)_l \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq c \sum_{l=k-N_0}^k m_l^{-\rho} \leq c' m_k^{-\rho}. \quad (2)$$

对于 III_k , 有

$$\text{III}_k = \left(\frac{\partial F}{\partial y^1} \left(\sum_{l=0}^k (u^1)_l, \dots, \sum_{l=0}^k (u^N)_l \right), \dots, \frac{\partial F}{\partial y^N} \left(\sum_{l=0}^k (u^1)_l, \dots, \sum_{l=0}^k (u^N)_l \right) \right) -$$

$$\left(\sum_{l=0}^k \left(\frac{\partial F}{\partial y^l} (u^1, \dots, u^N) \right)_l, \dots, \sum_{l=0}^k \left(\frac{\partial F}{\partial y^N} (u^1, \dots, u^N) \right)_l \right) \equiv (b_1, \dots, b_N).$$

也考虑 $1 \leq \alpha \leq N$,

$$\begin{aligned} b_\alpha &= \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{\partial F}{\partial y^\alpha} \left(\sum_{l=0}^k (u^1)_l, \dots, \sum_{l=0}^k (u^N)_l \right) \right)_s - \sum_{s=0}^k \left(\frac{\partial F}{\partial y^\alpha} (u^1, \dots, u^N) \right)_s = \\ &= \sum_{s=0}^k \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y^\alpha} \left(\sum_{l=0}^k (u^1)_l, \dots, \sum_{l=0}^k (u^N)_l \right) \right)_s - \left(\frac{\partial F}{\partial y^\alpha} (u^1, \dots, u^N) \right)_s \right] + \\ &= \sum_{s=k+1}^{\infty} \left(\frac{\partial F}{\partial y^\alpha} \left(\sum_{l=0}^k (u^1)_l, \dots, \sum_{l=0}^k (u^N)_l \right) \right)_s \equiv \sum_{s=0}^k g_s + \sum_{s=k+1}^{\infty} h_s. \end{aligned}$$

先估计 $\sum_{s=k+1}^{\infty} h_s$.

$$\left\| \sum_{s=k+1}^{\infty} h_s \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \sum_{s=k+1}^{\infty} \left\| \left(\frac{\partial F}{\partial y^\alpha} \left(\sum_{l=0}^k (u^1)_l, \dots, \sum_{l=0}^k (u^N)_l \right) \right)_s \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \sum_{s=k+1}^{\infty} c m_s^{-\rho} \leq c m_{k+1}^{-\rho}.$$

而后对 $\sum_{s=0}^k g_s$, 注意到

$$\begin{aligned} g_s &= \int_G (\varphi_t(\eta))^\vee(t) \frac{\partial F}{\partial y^\alpha} \left(\sum_{l=0}^k (u^1)_l, \dots, \sum_{l=0}^k (u^N)_l \right) (x-t) dt - \\ &= \int_G (\varphi_t(\eta))^\vee(t) \frac{\partial F}{\partial y^\alpha} (u_1, \dots, u^N) (x-t) dt = \\ &= \int_G (\varphi_t(\eta))^\vee(x-t) \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial y^\alpha} \left(\sum_{l=0}^k (u^1)_l, \dots, \sum_{l=0}^k (u^N)_l \right) (t) - \frac{\partial F}{\partial y^\alpha} (u^1, \dots, u^N) (t) \right\} dt. \end{aligned}$$

将中值定理用于上述积分中的第二个因子 $\{\dots\}$, 由 F 在紧集上的有界性假设以及 $\varphi^\vee$ 支集的紧性, 得

$$\|g_s\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq c \left\| u - \sum_{l=0}^k u_l \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq c' \sum_{l=k+1}^{\infty} m_l^{-\rho} \leq c' m_k^{-\rho}.$$

因此

$$\|III_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq c(k+1) m_k^{-\rho}. \quad (3)$$

最后, 对于 I_k , 有

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^1 \left\{ \frac{\partial F}{\partial y^1} (t S_{k+1} u + (1-t) S_k u) - \frac{\partial F}{\partial y^1} (S_{k+1} u), \dots, \frac{\partial F}{\partial y^N} (t S_{k+1} u + \right. \\ &\quad \left. (1-t) S_k u) - \frac{\partial F}{\partial y^N} (S_{k+1} u) \right\} dt. \end{aligned}$$

当 $1 \leq \alpha \leq N$ 时, 得

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial F}{\partial y^\alpha} (t S_{k+1} u + (1-t) S_k u) - \frac{\partial F}{\partial y^\alpha} (S_{k+1}) = \\
& \frac{\partial F}{\partial y^\alpha} (t S_{k+1} u^1 + (1-t) S_k u^1, \dots, t S_{k+1} u^N + (1-t) S_k u^N) - \\
& \frac{\partial F}{\partial y^\alpha} (S_{k+1} u^1, \dots, S_{k+1} u^N) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^\alpha \partial y^1} (\theta^1, \dots, \theta^N) (t-1) (S_{k+1} u^1 - S_k u^1) + \dots + \\
& \frac{\partial^2 F}{\partial y^\alpha \partial y^N} (\theta^1, \dots, \theta^N) (t-1) (S_{k+1} u^N - S_k u^N).
\end{aligned}$$

这样,

$$\|I_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq c \|u_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq c(k+1) m_k^{-\rho}. \quad (4)$$

联合 (2) ~ (4) 式, 定理得证.

为建立 G-B 微分算子与 G-B 微分方程的理论, 需要在 V 群上引进仿微分算子的概念.

首先考虑象征类 $\mathcal{S}_\rho^m$ (注意到, 这里的象征类是对仿微分算子而言的, 应区别于拟微分算子的象征类 $S_{\rho,\delta}^m$, 参看文献[2] 中定义 A).

定义 1 (象征 $\mathcal{S}_\rho^m$) 若函数 $l(x, \xi): G \times \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ 满足

(i) $l(\cdot, \xi) \in C^0(G)$, $\rho \in \mathbb{R}^+$,

$l(x, \cdot) \in C^\infty(\Gamma) \equiv \{g \in \mathcal{S}' : g \text{ 具有任意 } r \text{ 阶 G-B 导数, } r \geq 0\}$,

(ii) 对每个 $v \in \mathbb{P}$, 存在常数 c_v , 使当 $m \in \mathbb{R}$ 与 $\eta \in \Gamma$ 时,

$$\|\Delta_\eta^\xi l(x, \xi)\|_{C^r} \leq c_v |\eta|^v \langle \xi \rangle^{m-v}$$

成立, 则称 l 为象征. 所有象征所成的函数类称为象征类, 记为 $\mathcal{S}_\rho^m$.

称 $\omega(\xi, \eta): \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ 为仿截函数, 若它满足

$$\omega(\xi, \eta) = \psi(\xi, \eta) s(\eta), \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned}
\psi(\xi, \eta) &= \begin{cases} 1, & |\xi| \leq m_{N_1} |\eta|, \\ 0, & |\xi| > m_{N_1} |\eta|, \end{cases} \\
s(\eta) &= \begin{cases} 0, & |\eta| \leq m_{N_3}, \\ 1, & |\eta| > m_{N_4}, \end{cases}
\end{aligned} \quad (6)$$

这里 $N_1, N_2 \in \mathbb{Z}$, $N_1 < N_2$ 与 $N_3, N_4 \in \mathbb{Z}$, $N_3 < N_4$ 是固定的整数.

定义 2 (仿微分算子) 若 $l \in \mathcal{S}_\rho^m$ 是一个象征, $\omega(\xi, \eta) = \psi(\xi, \eta) \cdot s(\eta)$ 是仿截函数, 则称由下式定义的算子 P_l

$$(P_l u)^\wedge(\xi) = \int_\Gamma \omega(\xi - \eta, \eta) l^\wedge(\xi - \eta, \eta) u^\wedge(\eta) d\eta, \quad u \in S(G) \quad (7)$$

为具有象征 $l \in \mathcal{S}_\rho^m$ 的仿微分算子.

注 1 当 $l(x, \xi) = a(x)$ 时, (5) 式退化为仿积^[1]; 而当 (5) 式中仿截函数为 1 时, 则成为拟微分算子^[3]. 由此可将仿微分算子视为仿积与拟微分算子在某种意义下的推广.

象征的分解定理如下.

定理 2 设 $m \leq 0$, $\rho \in \mathbb{R}^+$, 则对于 $l \in \mathcal{S}_\rho^m$, 有

$$l(x, \xi) = \sum_{k,j=0}^{\infty} \omega_{kj}(x) \varphi_{kj}(\xi), \quad (8)$$

其中

$$\omega_{kj}(x) = \begin{cases} \int_{\Gamma} l(x, \xi) \Phi_{\Gamma_0}(\xi) \bar{\chi}_{V(k)}(\xi) d\xi, & j=0, \\ \int_{\Gamma} l(x, \eta) \Phi_{\Gamma_0 \setminus \Gamma_{j-1}}(\xi) \bar{\chi}_{V(k)}(\xi) d\xi, & j>0. \end{cases} \quad (9)$$

而且 $|\eta| = m_j |\xi|$,

$$\varphi_{kj}(\xi) = \begin{cases} \Phi_{\Gamma_0}(\xi) \chi_{V(k)}(\xi), & j=0, \\ \Phi_{\Gamma_j \setminus \Gamma_{j-1}}(\xi) \chi_{V(k)}(\theta) = \Phi_{\Gamma_0 \setminus \Gamma_{j-1}}(\theta) \chi_{V(k)}(\theta), & j>0, \end{cases} \quad (10)$$

$|\theta| = m_j^{-1} |\xi|$. 级数 (8) 是绝对一致收敛的. $\omega_{kj} \in C^p(G)$ 满足: 当 $k, j \rightarrow \infty$ 时, $\{\|\omega_{kj}\|_{C^p(G)}\}$ 是速降的. 进而, $\varphi_{kj} \in C^\infty(\Gamma)$ 具有紧支集, 且对任意 $s \in \mathbb{R}^+$, 绝对值 $|\varphi_{kj}^{(s)}(\xi)|$ 一致有界. 这里 (9) 和 (10) 式中的记号 $\{\chi_{V(k)}(\xi)|_{\Gamma_0}\}_{k=0}^\infty$ 和 $\{V(k)\}_{k=0}^\infty$ 都与文献 [2] 中含义相同.

上述定理 2 的证明较复杂, 我们省略它. 据此定理, 可改写算子 P_l 为

$$\begin{aligned} (P_l u)^\wedge(\xi) &= \int_{\Gamma} \omega(\xi - \eta, \eta) \sum_{k,j=0}^{\infty} \omega_{kj}^\wedge(\xi - \eta) \varphi_{kj}(\eta) u^\wedge(\eta) d\eta = \\ &= \sum_{k,j=0}^{\infty} \int_{\Gamma} \omega(\xi - \eta, \eta) \omega_{kj}^\wedge(\xi - \eta) \varphi_{kj}(\eta) u^\wedge(\eta) d\eta = \sum_{k,j=0}^{\infty} (J_{\omega_{kj}} T_{\varphi_{kj}} u)^\wedge(\xi). \end{aligned}$$

这表明仿微分算子可化为通项是作用在 $T_{\varphi_{kj}} u$ 上的仿积 $J_{\omega_{kj}}$ 的级数, 其中

$$T_{\varphi_{kj}} u(x) = \int_{\Gamma} \varphi_{kj}(\eta) u^\wedge(\eta) \chi_x(\eta) d\eta \quad (11)$$

是象征为 φ_{kj} 的拟微分算子, $J_{\omega_{kj}} v(x)$ 是由

$$(J_{\omega_{kj}} v)^\wedge(\xi) = \int_{\Gamma} \omega(\xi - \eta, \eta) \omega_{kj}^\wedge(\xi - \eta) v^\wedge(\eta) d\eta \quad (12)$$

确定的仿积算子^[1]. 因此, 自然地可定义仿微分算子 (级数形式) 为

$$P_l u(x) = \sum_{k,j=0}^{\infty} J_{\omega_{kj}} T_{\varphi_{kj}} u(x). \quad (13)$$

下面的定理给出仿微分算子的一个重要性质.

定理 3 具有象征 $l \in \mathcal{S}_\rho^m$ 的仿微分算子 P_l 是 Hölder 空间 $C^\alpha(G)$ 到 $C^{\alpha-m}(G)$ 上的有界线性算子, 也是 Sobolev 空间 $W^s(G)$ 到 $W^{s-m}(G)$ 上的有界线性算子. 进而, 如果用满足 (5) 和 (6) 式的其他 ω , 或用 $\tilde{J}_{\omega_{kj}}$ 代替 $J_{\omega_{kj}}$, 则其差别只是一个 $\rho-m$ 正则算子.

证 据定理 2, 知本定理对 $m \leq 0$ 成立. 对于 $m > 0$, 应用 Bessel 位势 $A^{s[4]}$,

$$(A^s)^\wedge(\xi) f = \langle \xi \rangle^s f^\wedge, \quad f \in \mathcal{S}'(G).$$

当 $s \in \mathbb{R}$ 时, $A^s: C^p(G) \rightarrow C^{p-s}(G)$ 是有界的, 故对 $m > 0$,

$$P_l u = P_l A^{-m} (A^m u) + R,$$

这里 R 具高阶正则性.

令 $v = A^m u$, 则当 $u \in C^s(G)$ 时, $v \in C^{s-m}(G)$. 注意到 $\langle \xi \rangle^{-m} \in S_{\Gamma, 0}^{-m} \subset \mathcal{S}_\rho^{-m}$ 对任意 $\rho \in \mathbb{R}^+$ 成立. 据此, 由复合运算 $P_l A^{-m}: C^s(G) \rightarrow C^s(G)$ 得

$$P_l: C^s(G) \rightarrow C^{s-m}(G).$$

类似地有 $P_l: W^s(G) \rightarrow W^{s-m}(G)$. 定理得证.

下面引入仿微分算子的另一个象征类 $\mathcal{S}_\rho^m$.

定义 3 (象征类 $\mathcal{S}_\rho^m$) 设 $m \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{R}^+$, 若 $l(x, \xi)$ 具有分解式

$$l(x, \xi) = l_m(x, \xi) + l_{m-1}(x, \xi) + \cdots + l_{m-[\rho]}(x, \xi), \quad (14)$$

其中 $l_{m-n}(x, \xi)$, $n=0, 1, \cdots, [\rho]$, 满足

(i) $l_{m-n}(\cdot, \xi) \in C^{\rho-n}(G)$,

(ii) $l_{m-n}(x, \cdot) \in C^\infty(\Gamma)$, 且对每个 $v \in \mathbb{P}$,

$$\|\Delta_k^{\xi} l_{m-n}(x, \xi)\|_{C^{\rho-n}(G)} \leq c_v |k|^v \langle \xi \rangle^{m-n-v},$$

亦即, $l_{m-n} \in \mathcal{S}_{\rho-n}^{m-n}$, 我们称 $l(x, \xi) \in \mathcal{S}_\rho^m$. 显见, $\mathcal{S}_\rho^m \subset \mathcal{S}_\rho^m$.

对于 $l \in \mathcal{S}_\rho^m$ 与 $\tilde{l} \in \mathcal{S}_\rho^m$, 若 $l - \tilde{l} \in \mathcal{S}_{\rho-1}^{m-1}$, 称 $\tilde{l}$ 为 $l(\mathcal{S}_\rho^m)$ 的主象征. 不难看出, 主象征并非唯一. 在 (14) 式中, $l_m(x, \xi)$ 便是 $l(x, \xi)$ 的一个主象征.

2 非线性 G-B 微分方程和应用的例

本节考虑 G-B 偏导数和 G-B 微分方程.

设 $x = (x_1, \cdots, x_n) \in G^n$. 若 $u(x): G^n \rightarrow \mathbb{C}$ 是 G^n 上的函数, 其 G-B 偏导数定义: 对于 $r_1, r_2, r_3, \cdots \in \mathbb{R}^+$,

$$\partial_{x_1}^{(r_1)} u(x_1, \cdots, x_n) = \int_{\Gamma} \langle \xi_1 \rangle^{r_1} \int_G u(t_1, x_2, \cdots, x_n) \bar{\chi}_{\xi_1}(t_1 - x_1) dt_1 d\xi_1,$$

$$\begin{aligned} \partial_{x_1}^{(r_1)} \partial_{x_2}^{(r_2)} u(x_1, \cdots, x_n) &= \int_{\Gamma} \langle \xi_1 \rangle^{r_1} \int_{\Gamma} \langle \xi_2 \rangle^{r_2} \times \\ &\quad \int_G \int_G u(t_1, t_2, x_3, \cdots, x_n) \bar{\chi}_{\xi_1}(t_1 - x_1) \bar{\chi}_{\xi_2}(t_2 - x_2) dt_1 dt_2 d\xi_1 d\xi_2, \\ &\quad \dots\dots\dots \end{aligned}$$

记 $\partial^{(r)} \equiv \partial_{x_1}^{(r_1)} \cdots \partial_{x_n}^{(r_n)}$, $|r| = r_1 + \cdots + r_n$.

注 2 除了个别的情形外, 文献[1] 和[2] 中的以及本文中的定理与性质对于乘积群

$G^n = G \times \cdots \times G$ 都成立, 而对个别情形, 如文献[2] 中的定理 2, 只要将条件 $\sigma - \frac{1}{2}$ 改为 $\sigma - \frac{n}{2}$, 结论对 G^n 也成立.

设 $y = (y^1, \cdots, y^N) \in \mathbb{C}^N$, $F(x, y): G^n \times \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$, 称

$$F(x, u, \cdots, \partial^{(r)} u, \cdots)_{|r| \leq m} = 0 \quad (15)$$

为 G-B 微分方程, 其中 $u: G^n \rightarrow \mathbb{C}$ 是 $x \in G^n$ 的函数. 对于非线性 G-B 微分方程, 有如下仿线性化定理.

定理 4 若 $u \in C^{\rho+m}(G)$, $\rho > 0$ (或 $u \in W^{s+m}(G)$, $s - \frac{n}{2} > 0$) 是非线性 G-B 微分方程 (15) 的实解, 且若 $F(x, y): G^n \times \mathbb{R}^N$ 是 $C^\infty(G^n \times \mathbb{R}^N)$ 实函数, 对于任意紧集 $K \subset \mathbb{R}^N$, F 关于 y 的偏导数在 $G^n \times K$ 上有界, 则 (15) 式化为如下的仿微分算子方程:

$$P_l u = R, \quad (16)$$

其中 $R \in C^{2\rho}(G)$ (或 $\in W^{2(s-\frac{n}{2})}(G)$), 而 P_l 是仿微分算子

$$P_l = \sum_{|r| \leq m} T \frac{\partial F}{\partial y^{(r)}} \partial^{\langle r \rangle},$$

其象征为

$$l(x, \xi) = \sum_{|r| \leq m} \frac{\partial F}{\partial y^{(r)}}(x, u(x), \dots, \partial^{\langle m \rangle} u(x)) \langle \xi \rangle^r,$$

并且 $l \in \mathcal{S}_\rho^m$ (或 $\in \mathcal{S}_{s-\frac{n}{2}}^m$), 而主象征是

$$l_m(x, \xi) = \sum_{|r|=m} \frac{\partial F}{\partial y^{(r)}} \langle \xi \rangle^r.$$

证 仅证 $u \in C^{\rho+m}(G)$, $\rho > 0$ 的情形. 由假设 $\partial^{\langle r \rangle} u \in C^{\rho+m-r}$ 对 $|r| \leq m$ 成立, 这蕴含 $\frac{\partial F}{\partial y^{(r)}}(x, u, \dots, \partial^{\langle m \rangle} u, \dots) \in C^\rho(G)$. 据定理 1,

$$F(x, u(x), \dots, \partial^{\langle m \rangle} u(x), \dots) = \sum_{|r| \leq m} T \frac{\partial F}{\partial y^{(r)}} \partial^{\langle r \rangle} u(x) - R(x) \equiv P_l u(x) - R(x),$$

其中 $R \in C^{2\rho}(G)$. 因为 u 是 (15) 式的实解, 故

$$P_l u(x) - R(x) = 0. \quad (17)$$

亦即, (16) 式成立. 进而, 易见 $\partial^{\langle r \rangle}$ 作为 G-B 微分算子, 是一个具有象征 $\langle \xi \rangle^r$ 的仿微分算子. 因此, $T \frac{\partial F}{\partial y^{(r)}} \partial^{\langle r \rangle}$ 也是一个具有象征 $\frac{\partial F}{\partial y^{(r)}} \langle \xi \rangle^r$ 的仿微分算子. 定理得证.

注 3 对于拟线性或半线性 G-B 微分方程, (17) 式中的 R 可以有更好的正则性.

例 考虑方程 (15) 满足定理 4 条件的解 u . 若 u 是 $C^\rho(G)$ 的, 且对 (x_0, ξ_0) , $\rho > m$,

$$p_m(x_0, \xi_0) = \sum_{|r|=2} \frac{\partial F}{\partial y^{(r)}} \langle \xi \rangle^r \Big|_{(x_0, \xi_0)} \neq 0,$$

则由下面的推理, 可知 u 的正则性由 ρ 提高为 $2\rho - m > \rho$.

因为 $u \in C^\rho(G)$ 蕴含 $\partial^{\langle r \rangle} u \in C^{\rho-m}(G)$, $|r| \leq m$, 故由定理 4, (15) 式被仿线性化为

$$P_l u = \sum_{|r| \leq m} T \frac{\partial F}{\partial y^{(r)}} \partial^{\langle r \rangle} u = R,$$

其中 $R \in C^{2(\rho-m)}(G)$, 象征为 $l(x, \xi) = \sum_{|r| \leq m} \frac{\partial F}{\partial y^{(r)}} \langle \xi \rangle^r$.

又因 $p_m(x_0, \xi_0) \neq 0$, 可寻得仿微分算子 Q_l , 满足

$$Q_l \circ P_l = I + r$$

(它是在一定意义下的逆算子), 并且 r 在点 (x_0, ξ_0) 是 ρ - m 正则的. 于是

$$u = Q_l' P_l - ru = Q_l' R - ru \in C^{2\rho-m}(G).$$

类似地, 可得到 (15) 式的解 u 在 Sobolev 空间的正则性.

其他应用的例见另文. 关于 G-B 导数和仿微分算子, 还可参看文献 [5~10].

参 考 文 献

- 1 Su Weiyi. Para-product operators and para-linearization on locally compact Vilenkin groups. Science in China, Ser A, 1995, 38(11): 1303~1312
- 2 Su Weiyi. The boundedness of certain operators on Hölder and Sobolev spaces. Approx Theory & its Appl 1996, 12 (2): 30~39
- 3 Su Weiyi. Pseudo-differential operators and derivatives on locally compact vilenkin groups. Science in China, Ser A, 1992, 35(7): 826~836
- 4 Taibleson M H. Fourier Analysis on Local Fields. Princeton: Princeton University Press, 1975
- 5 Butzer P L, Stankovic P. eds. Theory and applications of gibbs derivatives Proc of the First International Work-shop on Gibbs Derivatives, Held Sep. 26~28, 1989. Kupari-Dubrovnik: Matematicki Institut Beograd, 1990.
- 6 陈恕行, 仇庆公, 李成章. 仿微分算子引论. 北京: 科学出版社, 1996
- 7 Meyer Y. Remarques sur un Theoreme de J M Bony, Suppl Rend Circ Mat Palermo, 1981, 17: 1~20.
- 8 Saloff-Coste L. Opérateurs Pseudo-différentiels sur certains groupes totalement discontinus. Studia Math T I XXXIII, 1986, 205~228
- 9 Stankovic R S. Gibbs derivatives. Numer Funct Anal and Optimiz, 1994, 15(1 & 2): 169~181
- 10 Zheng Weixing, Su Weiyi, Jiang Huiqun. A note to the concept of derivatives on local fields. Approx Theory & its Appl, 1990, 6(3): 48~58