磁单极主丛的 $U_2 \simeq SU_2 \times U_1$ 不变性

吴咏时　　陈时　　郭汉英
(中国科学院物理研究所)　(中国科学院高能物理研究所)

提　要

本文指出，U_1 规范场磁单极的主丛——Hopf 丛 S^3/Z_D[2] 具有保持丛结构的 $U_2 \simeq SU_2 \times U_1$ 不变性. 由此，证明了在主丛上的 $U_2 \simeq SU_2 \times U_1$ 变换中，SU_2 生成元自然诱导出磁单极周围空间转动的角动量算子，其中包含 $-Zeg\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ 项；同时，U_1 生成元给出电荷算子. 因此，磁单极主丛及其 $U_2 \simeq SU_2 \times U_1$ 不变性，不仅刻划了磁单极周围空间转动的特征，而且给出了角动量算子和电荷算子的统一性。利用这种不变性，文中又导出了磁单极周围的球谐函数，并将这些结果表为类比于陀螺角动量及波函数的形式.

由于保持丛结构的子群 SU_2 是通常的空间转动群 SO_3 的双值覆盖，具有旋量表示，因此，本文的结果表明，磁单极及其主丛的 $U_2 \simeq SU_2 \times U_1$ 不变性，可以对半整数自旋粒子的存在，提供一种从大范围观点看来是合理的解释.

最近，吴大峻和杨振宁[1] 提出用非平凡 U_1 主纤维丛的概念来描述磁单极，从而避免了引入虚假的 Dirac 奇异弦. 我们进一步指出[2]，适当引进度规，可使以磁单极 g 为中心的球面 S^2 上的 U_1 主丛 $P_g(S^2, U_1)$ 成为 Hopf 丛 S^3 对 $D = 2eg$ 阶循环群 Z_D 的商空间 S^3/Z_D. 这表明，在一定条件下，磁单极周围的电磁场应具有将空间中 2 维球面 S^2 的对称性与电磁规范群 U_1 的内部对称性结合起来的 Hopf 丛的对称性. 本文讨论磁单极主丛的这种对称性及其物理意义.

我们将指出，对于 U_1 磁单极的 Hopf 丛 S^3，保持丛结构的变换是 SO_4 的子群 $U_2 \simeq SU_2 \times U_1$ 的变换；其中 U_1 生成元给出电荷算子，SU_2 生成元给出磁单极周围的角动量，特别是这里可以自然得到磁单极场中带电粒子角动量算子的附加项 $-Zeg\frac{\boldsymbol{r}}{r}$，无需像通常那样从对易关系硬凑出来[3]（见下节）.

这样，如果要求磁单极场中（无自旋）带电粒子的波函数定义在磁单极主丛上，并构成 $U_2 \simeq SU_2 \times U_1$ 的不可约表示，那末就自然可以得到系统的角动量算子和电荷算子的统一表述，以及磁单极周围的球谐函数. 同时，这些结果可以表示为陀螺角动量及其波函数的形式（见第二节）.

本文 1977 年 4 月 20 日收到.

一、磁单极主丛及其 $U_2 \simeq SU_2 \times U_1$ 不变性

我们首先重述文献 [2] 的部分内容，建立磁单极 g 的主丛；进而证明这个主丛的 $U_2 \simeq SU_2 \times U_1$ 不变性；然后导出作用在磁单极周围（无自旋）带电粒子波函数上的角动量算子.

假定 g 位于空间原点，作以 g 为球心，r 为半径的 2-球面 S^2，以 S^2 为底，U_1 为结构群，构造非平凡主丛 $P_g(S_2, U_1)$，考虑其正规形式[4].

将 S^2 表为:

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = r^2. \tag{1.1}$$

取各自包含上、下半球的坐标邻域 $V_1 = S^2 - (0, 0, -r)$ 与 $V_2 = S^2 - (0, 0, r)$ 覆盖 S^2. 在 V_1, V_2 中分别引入以南极 $(0, 0, -r)$ 或北极 $(0, 0, r)$ 为中心的测地投影坐标

$$\begin{aligned} x_\alpha &= (r + \eta_3)^{-1} r \eta_\alpha, \qquad \text{在 } V_1 \text{ 中}, \\ \tilde{x}_\alpha &= (r - \eta_3)^{-1} r \eta_\alpha, \qquad \text{在 } V_2 \text{ 中}, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned} \tag{1.2}$$

再引进将 S^2 表为复射影直线的非齐次坐标

$$\begin{aligned} &z = x_1 + i x_2 \in V_1, \qquad \tilde{z} = \tilde{x}_1 - i \tilde{x}_2 \in V_2, \\ &\tilde{z}/r = (z/r)^{-1} \qquad (\in V_1 \cap V_2). \end{aligned} \tag{1.3}$$

在重叠区中定义联接函数 S_{21}: $V_1 \cap V_2 \to U_1$,

$$S_{21} = e^{iD\varphi} = \exp\{i(\beta_2 - \beta_1)\}. \tag{1.4}$$

这里 β 是 U_1 群流形的坐标，D 是整数，φ 是 3 维空间中球坐标的方位角

$$\eta_1 = r \sin\theta \cos\varphi, \qquad \eta_2 = r \sin\theta \sin\varphi, \qquad \eta_3 = r \cos\theta. \tag{1.5}$$

(1.4) 式表示 S_{21} 将 S^2 上 $(r, 0, 0)$ 点映为 U_1 群的单位元素，且当 φ 在 S^2 赤道 S^1 上转一圈时（即 φ 从 0 变到 2π），U_1 群流形转 D 圈.

定义主丛的坐标映射 ψ_i: $V_i \times U_1 \to \pi^{-1}(V_i)$ $(i = 1, 2)$,

$$\begin{aligned} \psi_1(z, e^{i\beta_1}) &= \left(\frac{R}{r} \sigma^{-\frac{1}{2}} z e^{i\beta_1/D}, R\sigma^{-\frac{1}{2}} e^{i\beta_1/D}\right), \\ \psi_2(\tilde{z}, e^{i\beta_2}) &= \left(R\tilde{\sigma}^{-\frac{1}{2}} e^{i\beta_2/D}, \frac{R}{r} \tilde{\sigma}^{-\frac{1}{2}} \tilde{z} e^{i\beta_2/D}\right). \end{aligned} \tag{1.6}$$

这里 $\sigma \equiv 1 + r^{-2} z\bar{z}$, $\tilde{\sigma} \equiv 1 + r^{-2}\tilde{z}\bar{\tilde{z}}$，“—”表示复共轭. 将上式等号右边记为复数对$(z_1, z_2)$. 显然

$$z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = R^2, \tag{1.7}$$

即 (z_1, z_2) 可看作半径为 R 的 3-球面 S^3 上的点.

定义投影映射 π: $S^3 \to S^2$,

$$\pi((z_1, z_2)) = [z_1, z_2], \tag{1.8}$$

其中 $[z_1, z_2]$ 是 S^2 作为复射影直线的齐次坐标

$$z = r z_2^{-1} z_1 \in V_1, \qquad \tilde{z} = r z_1^{-1} z_2 \in V_2. \tag{1.9}$$

显然，π 将 S^3 上所有 $(z_1 e^{i\beta_i/D}, z_2 e^{i\beta_i/D})$ $(0 \leqslant \beta_i < 2\pi)$ 的点映为 S^2 上同一点 $[z_1, z_2]$，而 π 所定义的纤维 $\pi^{-1}([z_1, z_2])$ 为 U_1/Z_D，它是把 S^3 上的大圆剪开绕 $|D|$ 圈再粘上得到的流形. 这里，Z_D 是由复数 $\{e^{i2m\pi/D}\}$ $(m = 0, 1, \cdots, |D| - 1)$ 构成的 D 阶循环群.

投影 π，坐标映射 ψ_i 以及联接函数 S_{21} 定义了 Hopf 从 S^3 对 Z_D 的商空间 S^3/Z_D.

在主丛 S^3/Z_D 上，可以引进度量

$$d\chi^2 = dz_1 d\bar{z}_1 + dz_2 d\bar{z}_2, \tag{1.10}$$

利用坐标映射 ϕ_j，并取 $R = 2r$，可将上式表为：

$$d\chi^2 = \begin{cases} ds^2 + D^{-2}R^2(d\beta_1 + \omega_1 D)^2, \\ ds^2 + D^{-2}R^2(d\beta_2 + \omega_2 D)^2. \end{cases} \tag{1.11}$$

其中 ds^2 是底空间 S^2 上的度量，而

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\sigma^{-1}(dz\bar{z} - zd\bar{z}),$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^{-1}(d\tilde{z}\bar{\tilde{z}} - \tilde{z}d\bar{\tilde{z}}). \tag{1.12}$$

利用球坐标 (1.5) 式，可将 $\omega_{1,2}$ 化为 Wu-Yang 磁单极势的形式[1].

可以证明，主丛 S^3/Z_D 的第一陈类

$$c_1 = 2eg = D. \tag{1.13}$$

这表明主丛 S^3/Z_D 是磁单极 $g = D/2e$ 的主丛.

下面证明，保持主丛 $P_g(S^2, U_1)$ 的结构，即把底流形 S^2 上一点的纤维都变到 S^2 上另一点的纤维的变换群，是 S^3 的旋转群 SO_4 的子群 $U_2 \simeq SU_2 \times U_1$.

对主丛 $P_g \simeq S^3/Z_D$ 上的点 (z_1, z_2) 进行变换，

$$\begin{pmatrix} z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{M} \begin{pmatrix} z_2' \\ z_1' \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} z_2 \\ z_1 \end{pmatrix}, \tag{1.14}$$

显然，M 必须满足

$$MM^\dagger = I, \tag{1.15}$$

其中“†”表示厄米共轭. 这表明 M 为 2×2 幺正矩阵，因而是群 $U_2 \simeq SU_2 \times U_1$ 的元素. 将 M 表为：

$$M = N\Lambda, \quad N = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU_2, \quad \Lambda = e^{i\alpha} \in U_1, \tag{1.16}$$

其中 $\det(N) = a\bar{a} + b\bar{b} = 1$. 于是由 (2.14) 式

$$z_1 \to z_1' = (\bar{a}z_1 - \bar{b}z_2)\Lambda, \qquad z_2 \to z_2' = (bz_1 + az_2)\Lambda. \tag{1.17}$$

不难看出，此变换诱导底 S^2 及纤维 U_1 上的如下变换 [例如在 $\pi^{-1}(V_1)$ 中]，

$$z \to z' = r(bz + ar)^{-1}(\bar{a}z - \bar{b}r), \qquad z = rz_2^{-1}z_1 \in V_1, \tag{1.18}$$

$$\lambda \to \lambda' = \lambda\rho\Lambda, \qquad \rho = |ar + bz|^{-1}(ar + bz), \tag{1.19}$$

其中 $\lambda = e^{i\beta/D}$. 这表明，主丛上的 $U_2 \simeq SU_2 \times U_1$ 变换将底 S^2 点 z 变为点 z'；同时将 z 点纤维上点 λ 变为 z' 点纤维上点 λ'，二者差一 U_1 变换 $\rho\Lambda$. 容易证明，在此变换下，底 S^2 上的度量以及丛上的联络 1-形式 ω 都不变. 在 $\pi^{-1}(V_2)$ 中也一样.

特别，当 $a = 1$, $b = 0$ 时，变换 $M = \Lambda = e^{i\alpha} \in U_1$ 保持底 S^2 上的点不动，而把纤维上的一点 λ 变为同一纤维上的另一点 $\lambda\Lambda$. 这就是普通的整体 U_1 变换，其生成元就是通常的电荷算子.

由于主丛上的 SU_2 变换诱导出底空间的变换是保度的，亦即诱导出底空间 S^2 的 SO_3 转动，同时，N 与 $-N$ 两个 SU_2 变换，对应于底空间的同一 SO_3 转动. 容易求出 SU_2 所诱导的

底空间 SO_3 转动的显示表达式. 考虑无穷小变换，取

$$a = 1 + \frac{i}{2}\varepsilon_3, \qquad b = \frac{1}{2}(\varepsilon_2 + i\varepsilon_1),$$

$$N = 1 + \frac{i}{2}\varepsilon^a\sigma_a = \begin{pmatrix} 1 + \frac{i}{2}\varepsilon_3 & \frac{1}{2}(\varepsilon_2 + i\varepsilon_1) \\ -\frac{1}{2}(\varepsilon_2 - i\varepsilon_1) & 1 - \frac{i}{2}\varepsilon_3 \end{pmatrix}, \tag{1.20}$$

σ_a 是通常的 Pauli 矩阵. 它所诱导的底空间无穷小 SO_3 转动下直角坐标的变换为:

$$\begin{aligned} \eta_1 \to \eta_1' &= \eta_1 + \varepsilon_3\eta_2 - \varepsilon_2\eta_3, \\ \eta_2 \to \eta_2' &= -\varepsilon_3\eta_1 + \eta_2 + \varepsilon_1\eta_3, \\ \eta_3 \to \eta_3' &= \varepsilon_2\eta_1 - \varepsilon_1\eta_2 + \eta_3, \end{aligned} \tag{1.21}$$

其生成元就是通常的空间转动算子

$$\begin{aligned} -il_k &= (\partial\eta_l'/\partial\varepsilon^k)_{\varepsilon^k=0}\frac{\partial}{\partial\eta_l}, \qquad & -il_1 &= \eta_3\frac{\partial}{\partial\eta_2} - \eta_2\frac{\partial}{\partial\eta_3}, \\ -il_2 &= \eta_1\frac{\partial}{\partial\eta_3} - \eta_3\frac{\partial}{\partial\eta_1}, \qquad & -il_3 &= \eta_2\frac{\partial}{\partial\eta_1} - \eta_1\frac{\partial}{\partial\eta_2}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

相应的纤维上的无穷小规范变换为:

$$\lambda \to \lambda' = \lambda\rho \equiv \lambda\left(1 + i\varepsilon\right), \qquad \varepsilon = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_3 + \varepsilon_1\frac{x_1}{r} + \varepsilon_2\frac{x_2}{r}\right), \tag{1.23}$$

它使变换后的电磁势对于变换后的空间坐标 η_i' 而言，具有与变换前相同的形式.

由于磁单极主丛上的 SU_2 变换，同时诱导出底空间 S^2 上的 SO_3 转动和纤维上的 U_1 变换；反之，底空间的转动必须伴随着纤维上相应的 U_1 规范变换，才能保证磁单极主丛的结构，使磁单极电磁势形式不变；因此，对于定义在（磁单极周围）底空间 S^2 上的带电粒子波函数 $\Phi(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$，必须同时考虑时空点的变换和位相变换. 在无穷小变换下，波函数就应当有下面的变换性质

$$\Phi(\eta) \to \Phi'(\eta') = e^{-iD\varepsilon}\Phi(\eta). \tag{1.24}$$

而在无穷小 SU_2 变换下，波函数的变换又应表为:

$$\Phi(\eta) \to \Phi'(\eta) = (1 + i\varepsilon^j L_j)\Phi(\eta), \tag{1.25}$$

L_i 是作用在带电粒子波函数上的 SU_2 生成元. 由此两式可得:

$$L_1 = l_1 - \frac{D}{2}\frac{\eta_1}{r + \eta_3}, \qquad L_2 = l_2 - \frac{D}{2}\frac{\eta_2}{r + \eta_3}, \qquad L_3 = l_3 - \frac{D}{2}. \tag{1.26}$$

不难将磁单极势表为直角坐标的形式:

$$A_1 = -\frac{g}{r}\frac{\eta_2}{r + \eta_3}, \qquad A_2 = \frac{g}{r}\frac{\eta_1}{r + \eta_3}, \qquad A_3 = 0. \tag{1.27}$$

于是，(1.26) 式便可写为:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{P} - e\boldsymbol{A}) - eg\frac{\boldsymbol{r}}{r}, \qquad \boldsymbol{L} = L_i\boldsymbol{e}_i, \qquad \boldsymbol{P} = -i\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}. \tag{1.28}$$

这就是通常磁单极理论中的角动量算子. 这里，我们由磁单极主丛的 $U_2 \simeq SU_2 \times U_1$ 不变性自然地导出了这个表达式. 当然，不难推广到带有电荷 Ze 的情形.

二、群 $U_2\simeq SU_2\times U_1$ 的不可约表示和磁单极周围的球谐函数

在这一节中，将建立群 $U_2\simeq SU_2\times U_1$ 的不可约表示，给出磁单极周围的球谐函数。同时，引入定义在主丛 $P_g\simeq S^3/Z_D$ 上的波函数，来描述无自旋带电检验粒子的运动，并要求它们构成 $U_2\simeq SU_2\times U_1$ 的不可约表示。我们将看到，这个要求与上节是一致的，同样可以自然地导出有关角动量算子及其与电荷算子相互关系的结论。

首先，将 $U_2\simeq SU_2\times U_1$ 的生成元用底空间的球坐标和 U_1 群流形上的坐标表示出来。令

$$z_1=\xi_1+i\xi_2,\qquad z_2=\xi_3+i\xi_4. \tag{2.1}$$

将 (1.7) 式所表示的 S^3 表为：

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+\xi_4^2=R^2. \tag{2.2}$$

$P_g\simeq S^3/Z_D$ 上的 Hopf 坐标可用球坐标表为：

$$\begin{cases}\xi_1=R\sin\dfrac{\theta}{2}\cos(\alpha_1+\varphi), & \xi_2=R\sin\dfrac{\theta}{2}\sin(\alpha_1+\varphi),\\ \xi_3=R\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\alpha_1, & \xi_4=R\cos\dfrac{\theta}{2}\sin\alpha_1,\end{cases}\quad 在\ \pi^{-1}(V_1)\ 中, \tag{2.3}$$

$$\begin{cases}\xi_1=R\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\alpha_2, & \xi_2=R\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\alpha_2,\\ \xi_3=R\cos\dfrac{\theta}{2}\cos(\alpha_2-\varphi), & \xi_4=R\cos\dfrac{\theta}{2}\sin(\alpha_2-\varphi),\end{cases}\quad 在\ \pi^{-1}(V_2)\ 中, \tag{2.3'}$$

其中 (θ,φ) 为底 S^2 上的球面坐标，而

$$\alpha_1=\beta_1/D,\qquad \alpha_2=\beta_2/D, \tag{2.4}$$

$e^{i\beta_1}$ 或 $e^{i\beta_2}$ 是 U_1 群的元素。由 (2.3) 式可见，从 $\pi^{-1}(V_1)$ 过渡到 $\pi^{-1}(V_2)$，可用如下代换实现

$$\theta\to\pi-\theta,\qquad \varphi\to-\varphi,\qquad \alpha_1\to\alpha_2,$$
$$(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)\to(\xi_3,\xi_4,\xi_1,\xi_2). \tag{2.5}$$

主丛上的无穷小 $U_2\simeq SU_2\times U_1$ 变换可以表为：

$$\xi_\mu\to\xi'_\mu=(1-i\varepsilon^jL_j+i\varepsilon_0Q)\xi_\mu,$$
$$-iL_i=(\partial\xi'_\mu/\partial\varepsilon^i)_{\varepsilon^i=0}\frac{\partial}{\partial\xi^\mu},\qquad iQ=(\partial\xi'_\mu/\partial\varepsilon_0)_{\varepsilon_0=0}\frac{\partial}{\partial\xi^\mu}, \tag{2.6}$$

其中 L_i 是 SU_2 的生成元，Q 是 U_1 的生成元。不难证明

$$L_1=\frac{1}{2}(\mathscr{L}_{23}+\mathscr{L}_{41}),\qquad L_2=\frac{1}{2}(\mathscr{L}_{31}+\mathscr{L}_{42}),$$
$$L_3=\frac{1}{2}(\mathscr{L}_{12}+\mathscr{L}_{43}),\qquad Q=\mathscr{L}_{12}+\mathscr{L}_{34}. \tag{2.7}$$

它们满足

$$[L_i,L_j]=i\varepsilon_{ijk}L_k,\qquad [L_i,Q]=0, \tag{2.8}$$

这里 $\mathscr{L}_{\mu\nu}$ 是 SO_4 的生成元

$$-i\mathscr{L}_{\mu\nu}=\xi_\mu\frac{\partial}{\partial\xi^\nu}-\xi_\nu\frac{\partial}{\partial\xi^\mu},\qquad(\mu,\nu=1,2,3,4). \tag{2.9}$$

利用(2.3)式，可以得到生成元的 Hopf 坐标表达式. 例如在 $\pi^{-1}(V_1)$ 中,

$$L_\pm = L_1 \pm iL_2 = -ie^{\pm i\varphi}\left(\pm i\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\right),$$

$$L_3 = -i\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\right), \qquad Q = -i\frac{\partial}{\partial\alpha_1}, \tag{2.10}$$

在 $\pi^{-1}(V_2)$ 中，可由代换(2.5)式得类似的表达式. 同时，在 $\pi^{-1}(V_1)$ 与 $\pi^{-1}(V_2)$ 中分别有:

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \operatorname{ctg}\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta} - \csc^2\theta\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \dfrac{1}{2}\sec^2\dfrac{\theta}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\alpha_1} - \dfrac{1}{4}\sec^2\dfrac{\theta}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}, \\ -\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \operatorname{ctg}\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta} - \csc^2\theta\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - \dfrac{1}{2}\csc^2\dfrac{\theta}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\alpha_2} - \dfrac{1}{4}\csc^2\dfrac{\theta}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}. \end{cases} \tag{2.11}$$

我们知道，$U_2 \simeq SU_2 \times U_1$ 无穷小生成元 L_i 与 Q 构成的可对易的完备算子集合是:

$$L^2,\ L_3,\ Q. \tag{2.12}$$

这三个算子在主丛上的共同本征函数构成 $U_2 \simeq SU_2 \times U_1$ 不可约表示的基底.

在 $\pi^{-1}(V_1)$ 中，本征方程是

$$L^2\Psi_1(\varphi,\theta;\alpha_1) = \left\{-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \csc^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\alpha_1} - \frac{1}{4}\sec^2\frac{\theta}{2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}\right\}\Psi_1(\varphi,\theta;\alpha_1) = l(l+1)\Psi_1(\varphi,\theta;\alpha_1), \tag{2.13}$$

$$L_3\Psi_1(\varphi,\theta;\alpha_1) = -i\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\right)\Psi_1(\varphi,\theta;\alpha_1) = m\Psi_1(\varphi,\theta;\alpha_1), \tag{2.14}$$

$$Q\Psi_1(\varphi,\theta;\alpha_1) = -i\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\Psi_1(\varphi,\theta;\alpha_1) = 2q\Psi_1(\varphi,\theta;\alpha_1). \tag{2.15}$$

由(2.14)与(2.15)式容易得到

$$\Psi_1 = e^{i(m+q)\varphi}\Theta(\theta)e^{2iq\alpha_1}, \tag{2.16}$$

代入(2.13)式得到 $\Theta(\theta)$ 满足的方程为:

$$\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \csc^2\theta(m^2 + q^2 + 2mq\cos\theta) + l(l+1)\right\}\Theta(\theta) = 0. \tag{2.17}$$

由角动量理论[5]，此方程的解为:

$$\Theta(\theta) = d^l_{m,-q}(\theta) = d^l_{q,-m}(\theta). \tag{2.18}$$

因此，在 $\pi^{-1}(V_1)$ 中算子(2.12)式的共同本征函数是

$$\Psi_1(\varphi,\theta;\alpha_1) = D^l_{m,-q}(\varphi,\theta,-\varphi-2\alpha_1). \tag{2.19}$$

在 $\pi^{-1}(V_2)$ 中，本征方程是:

$$L^2\Psi_2(\varphi,\theta;\alpha_2) = \left\{-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \csc^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{2}\csc^2\frac{\theta}{2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\alpha_2} - \frac{1}{4}\csc^2\frac{\theta}{2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}\right\}\Psi_2(\varphi,\theta;\alpha_2) = l(l+1)\Psi_2(\varphi,\theta;\alpha_2), \tag{2.20}$$

$$L_3\Psi_2(\varphi,\theta;\alpha_2) = -i\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)\Psi_2(\varphi,\theta;\alpha_2) = m\Psi_2(\varphi,\theta;\alpha_2), \tag{2.21}$$

$$Q\Psi_2(\varphi,\theta;\alpha_2)=-i\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\Psi_2(\varphi,\theta;\alpha_2)=2q\Psi_2(\varphi,\theta;\alpha_2).\tag{2.22}$$

仿照 $\pi^{-1}(V_1)$ 中的情形，同样可以解得：

$$\Psi_2(\varphi,\theta;\alpha_2)=e^{i(m-q)\varphi}d^l_{m,-q}(\theta)e^{2iq\alpha_2}=D^l_{m,-q}(\varphi,\theta,\varphi-2\alpha_2).\tag{2.23}$$

在重叠区 $\pi^{-1}(V_1)\cap\pi^{-1}(V_2)$ 中，由(2.3)与(2.3′)式有

$$\alpha_2=\alpha_1+\varphi\tag{2.24}$$

因而由(2.19)、(2.23)式导出

$$\Psi_1(\varphi,\theta;\alpha_1)=\Psi_2(\varphi,\theta;\alpha_2),\quad 在\ \pi^{-1}(V_1)\cap\pi^{-1}(V_2)\ 中.\tag{2.25}$$

这表明，作为 $U_2\simeq SU_2\times U_1$ 不可约表示的基底，L^2，L_3 与 Q 在主丛 $P_g\simeq S^3/Z_D$ 上的共同本征函数，定义在整个主丛上，它们在主丛的局部坐标变换下是不变的.

同时，由波函数 $\Psi_i(\varphi,\theta;\alpha_i)(i=1,2)$ 的单值性，可以得到量子数的取值范围. 特别，q 可以取半整数：

$$l=|q|,|q|+1,\cdots;\qquad m=-l,-l+1,\cdots,+l;$$

$$|q|=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\cdots.\tag{2.26}$$

考虑电荷为 Ze 的无自旋检验粒子在磁单极 g 的场中运动. 引入定义在整个主丛上的带电粒子的波函数

$$\Psi=\begin{cases}\Psi_1(\varphi,\theta;\alpha_1), & 在\ \pi^{-1}(V_1)\ 中,\\ \Psi_2(\varphi,\theta;\alpha_2), & 在\ \pi^{-1}(V_2)\ 中,\end{cases}\tag{2.27}$$

并且要求它们构成 $U_2\simeq SU_2\times U_1$ 的不可约表示.

由本征方程(2.15)，(2.22)得到：

$$\Psi_1(\varphi,\theta;\alpha_1)=\Phi_1(\varphi,\theta)e^{2iq\alpha_1},\qquad \Psi_2(\varphi,\theta;\alpha_2)=\Phi_2(\varphi,\theta)e^{2iq\alpha_2}.\tag{2.28}$$

在重叠区 $\pi^{-1}(V_1)\cap\pi^{-1}(V_2)$ 中，有

$$\Phi_1(\varphi,\theta)=e^{2iq\varphi}\Phi_2(\varphi,\theta),\qquad 在\ \pi^{-1}(V_1)\cap\pi^{-1}(V_2)\ 中.\tag{2.29}$$

$\Phi_1(\varphi,\theta)$ 与 $\Phi_2(\varphi,\theta)$ 分别是在 S^2 的 V_1，V_2 中定义的普通的带电粒子波函数. 与联接函数(2.24)，(2.4)式一致，在重叠区 $V_1\cap V_2$ 中，波函数之间的关系是

$$\Phi_1(\varphi,\theta)=\Phi_2(\varphi,\theta)e^{2iZeg\varphi}\tag{2.30}$$

(文献[6]曾得到类似的表达式). 比较(2.29)与(2.30)式，立即得到

$$q=Zeg=ZD/2,\tag{2.31}$$

这就是算子 Q 的本征值 q 的物理意义. 由此可见，对于给定的磁荷 $g=D/2e$，算子

$$Q/D=\begin{cases}-i\partial/\partial\beta_1, & 在\ \pi^{-1}(V_1)\ 中,\\ -i\partial/\partial\beta_2, & 在\ \pi^{-1}(V_2)\ 中.\end{cases}\tag{2.32}$$

作为 U_1 群的生成元，是带电粒子的电荷算子.

将算子 $L_\pm$，L_3 作用在(2.28)式上，可得

$$L_k\Psi_1(\varphi,\theta;\alpha_1)=e^{2iZeg\alpha_1}L'_k\Phi_1(\varphi,\theta),\tag{2.33}$$

这里

$$L'_{\pm} = L'_1 \pm iL'_2 = -ie^{\pm i\varphi}\left(\pm i\frac{\partial}{\partial\theta} - \mathrm{ctg}\,\theta\frac{\partial}{\partial\varphi} - iZeg\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\right),$$

$$L'_3 = -i\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - iZeg\right). \tag{2.34}$$

可以证明,上式又可改写为:

$$\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{P} - Ze\boldsymbol{A}) - Zeg\frac{\boldsymbol{r}}{r}, \tag{2.35}$$

$\boldsymbol{A}$ 是磁单极 g 的电磁势. 这就是上节得到的角动量表达式. 因此, $L_{\pm}$, L_3 对主丛上波函数 $\Psi(\varphi, \theta; \alpha)$ 的作用,等价于算子 $\boldsymbol{L}'$ 对普通空间波函数 $\Phi(\varphi, \theta)$ 的作用. 这表明, $L_{\pm}$, L_3 是作用在主丛波函数上的角动量算子,事实上,它们就是上节中的主丛上 SU_2 变换的生成元.

值得注意的是,主丛上的角动量算子 L_k 与电荷算子 Q 构成主丛不变群 $U_2 \simeq SU_2 \times U_1$ 的代数;正是主丛上角动量算子与电荷算子之间的这种内在联系,自然地导致了通常理论中角动量附加项 $-Zeg\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ 的出现. 与上节一样,磁单极主丛结构及其对称性有本质的意义.

附带指出,由(2.28),(2.19)与(2.23)式可得

$$\Phi_1(\varphi, \theta) = D^l_{m,-q}(\varphi, \theta, -\varphi), \qquad \Phi_2(\varphi, \theta) = D^l_{m,-q}(\varphi, \theta, \varphi). \tag{2.36}$$

这就是文献[6]中给出的磁单极周围的球谐函数.

可将上述结果表为类似于陀螺的形式.

在主丛 $P_g(S^2, U_1)$ 上引入坐标:

$$\phi = \begin{cases} -2\alpha_1 - \varphi, & \text{在 } \pi^{-1}(V_1) \text{ 中}, \\ -2\alpha_2 + \varphi, & \text{在 } \pi^{-1}(V_2) \text{ 中}. \end{cases} \tag{2.37}$$

用坐标 (φ, θ, ϕ), 代替 $(\varphi, \theta; \alpha_1)$ 或 $(\varphi, \theta; \alpha_2)$, 则在整个主丛上角动量算子和电荷算子可以统一表为

$$L_{\pm} = -ie^{\pm i\varphi}\left(\pm i\frac{\partial}{\partial\theta} - \mathrm{ctg}\,\theta\frac{\partial}{\partial\varphi} + \csc\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right), \qquad L_3 = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}, \tag{2.38}$$

$$\frac{1}{2}Q = -R_3 = i\frac{\partial}{\partial\phi}. \tag{2.39}$$

显然,若把 (φ, θ, ϕ) 当作 Euler 角,则 L_i 与 R_3 分别相应于一个陀螺角动量对空间固定轴和陀螺本体轴的分量[7]. 相应的本征函数自然就是这个陀螺的波函数,并且可将(2.19)与(2.23)式统一写为:

$$\Psi(\varphi, \theta, \phi) = D^l_{m,-q}(\varphi, \theta, \phi). \tag{2.40}$$

这样,便得所需结果. 值得注意的是,这里的陀螺同时描述磁单极场中带电粒子系统的空间转动和 U_1 变换,体现了时空对称性和内部对称性的统一,并不是普通空间中的普通陀螺.

* * *

最后,我们指出,在主丛 $P_g(S^2, U_1)$ 的对称性 $U_2 \simeq SU_2 \times U_1$ 中,角动量算子是子群 SU_2 的生成元,它们的本征值可以取半整数. 我们知道,物理上可以实现的表示与群的整体性质有关[1]. 对于 SU_2 和 SO_3 而言,尽管二者 Lie 代数相同,但它们的整体性质不同. SU_2 是 SO_3 的双重覆盖,前者允许半整数表示,后者只允许整数表示. 物理粒子的自旋是可以取半整数

值的，因此，从整体观点看来，与物理粒子自旋相联系的空间转动群至少应包含 SU_2，而不仅仅是 SO_3. 但是，普通的 3 维空间转动，只能构成 SO_3 群. 因此，从整体观点看来，普通的空间转动是无法解释存在半整数自旋粒子的物理现象的. 然而，这个疑难可由磁单极主丛及其 $U_2 \simeq SU_2 \times U_1$ 对称性加以解决；如果存在磁单极，通常的空间转动由磁单极主丛的对称群 $U_2 \simeq SU_2 \times U_1$ 的变换诱导出来；后者更为本质，它允许有半整数本征值的表示. 因此，本文的结果表明，磁单极的存在及其主丛的 $U_2 \simeq SU_2 \times U_1$ 不变性，从大范围的观点看来，可对半整数自旋粒子的存在提供一种可能的解释.

参　考　文　献

[1] Wu, T. T. & Yang, C. N. *Phys. Rev.*, D12(1975), 3845.
[2] 吴泳时、郭汉英，中国科学，1977，4，308；*Scientia Sinica*, **XX** (1977), 2, 186.
[3] Fierz, M., *Helv. Phys. Acta*, 17(1944), 27.
[4] 参见 Steenrod, N. *The Topology of Fibre Bundles*, 1951, Princeton Univ. Press. Kobayashi, S. & Nomizu, K., *Foundations of Differential Geometry*, Vol. I, 1963, Vol. II, 1969, Intersci. Publ.
[5] Edmonds, A. R., *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, 1957, Princeton Univ. Press.
[6] 杨振宁，磁单极周围的球谐函数，1976 年 4 月在北京的学术报告.
[7] Fano, U. & Racah, G., *Irreducible Tensorial Sets*, 1959, Academic Press, New York.