中国科学 A辑: 数学 2009 年 第 39 卷 第 5 期: 574～582
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社 SCIENCE IN CHINA PRESS

周期解析信号的瞬时频率的结构

谭立辉, 杨力华*, 黄达人

中山大学数学与计算科学学院, 广州 510275
*通信作者 E-mail: mcsylh@mail.sysu.edu.cn

收稿日期: 2008-11-07; 接受日期: 2009-01-07
国家自然科学基金 (批准号: 10631080, 60873088, 60475042) 资助项目

摘要 本文利用解析信号与 Hardy 空间中函数的关系, 研究周期解析信号的结构特征, 发现解析信号是由两部分构成的, 一部分与其幅度相关, 另一部分与内函数的边值相关. 在此基础上, 我们进一步分析了每一部分的瞬时频率的性质, 发现造成解析信号出现负值的原因与幅度有关, 并指出解析信号可以出现任意给定的负频率结构. 最后, 我们给出了一类解析信号满足瞬时频率为正的条件.

关键词 Hilbert 变换 解析信号 瞬时频率 Hardy 空间

MSC(2000) 主题分类 30D55, 46E20

1 引言

瞬时幅度、相位和频率是刻画非平稳信号的最基本的物理量, 计算这些量的经典方法是通过 Hilbert 变换求其解析信号. 在实际应用中, 给定的实信号 $x(t)$ 通常是时间有限的, 不失一般性, 我们可假设其对应的时限区间为 $[-\pi,\pi]$, 那么实信号 $x(t)$ 对应的的解析信号被定义为 [1]

$$f(t)=x(t)+i(\tilde{H}x)(t),$$

其中

$$(\tilde{H}x)(t)=\lim_{\epsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi}\int_{\epsilon<|t-u|\leqslant\pi}x(t-u)\cot\left(\frac{u}{2}\right)du. \tag{1}$$

从 $f(t)$ 的表达式知, 存在唯一的规范对 $[\rho_f(t),\theta_f(t)]$ 使得

$$f(t)=\rho_f(t)e^{i\theta_f(t)},\quad \tilde{H}(\rho_f\cos\theta_f)(t)=\rho_f(t)\sin\theta_f(t),$$

其中

$$\rho_f(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\geqslant 0,$$
$$\theta_f(t)=\arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right),\quad -\frac{1}{2}\pi\leqslant\theta_f(t)\leqslant\frac{1}{2}\pi.$$

在信号处理中, $\rho_f(t)$ 和 $\theta_f(t)$ 分别被称为实信号 $x(t)$ 的瞬时幅度和瞬时相位, 而瞬时相位的导数 $d[\theta_f(t)]/dt$ 则被称为瞬时频率.

引用格式: 谭立辉, 杨力华, 黄达人. 周期解析信号的瞬时频率的结构. 中国科学 A, 2009, 39(5): 574–582
Tian L H, Yang L H, Huang D R. The structure of instantaneous frequencies of periodic analytic signals. Sci China Ser A, 2009, 52, DOI: 10.1007/s11425-009-0093-8

Vakman 在文献 [2] 中指出, 如果要求满足一些合理的先验物理假设, 通过 Hilbert 变换定义的解析信号是求信号的瞬时频率的唯一途径, 但由 Hilbert 变换定义的解析信号仍存在一些物理上无法解释的现象 [3,4]. 其中有一条是指虽然解析信号的频谱对于负频率为 0, 但其瞬时频率却既能出现正值也能出现负值. 因此从理论上弄清楚解析信号的结构特征, 弄清楚造成其出现负频率的原因以及在什么情况下才能保证解析信号的瞬时频率为正是一件很有意义的事情. 为了更方便地研究解析信号的相关性质, 我们一般通过 Z-变换, 转而研究其对应的单位圆上的解析函数的性质. 利用这种方法, 文献 [5,6] 给出了周期有理解析信号的相位的特征. 而对于解析信号的瞬时频率大于 0 的问题, 一些学者也进行了探索并得到一些结果 [7−10], 但这些具有非负瞬时频率的解析信号主要是通过有限 Blaschke 积构造出来的. 在最近的文献 [11] 中, 通过星形函数的边值, 从整体上给出了一类满足瞬时频率大于 0 的周期解析信号.

在本文中, 我们将根据周期解析信号与定义在单位圆上的 Hardy 空间中函数的关系, 给出所有的周期解析信号的相位的结构特征, 这些结果覆盖了文献 [5,6] 出现的结论. 然后分析了结构中每一部分的瞬时频率的性质, 发现出现负的瞬时频率的原因与幅度相关, 并说明解析信号可以出现任意给定的负频率结构. 最后, 我们将利用多值星形函数给出更一般的满足瞬时频率为正的解析信号的条件, 这是文献 [11] 中出现的相关结论的推广.

2 周期解析信号的结构特征

为了叙述方便, 我们将先介绍一些基本的定义和记号, 主要参考文献为 [12–14].

在下文中, 我们用 $\mathbb{D}$ 表示复平面上的单位圆盘, $\mathbb{T}$ 表示单位圆周. 对于 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $H^p(\mathbb{D})$ 表示在 $\mathbb{D}$ 上解析且满足下面条件

$$\|F\|_{H^p} := \begin{cases} \sup\limits_{0<r<1} \left\{ \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{T}} |F(re^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p} < \infty, & 1 \leqslant p < \infty \\ \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} |F(z)| < \infty, & p = \infty \end{cases} \tag{2}$$

的函数 F 的集合, $L^p(\mathbb{T})$ 表示定义在 $\mathbb{T}$ 上的满足下面条件的

$$\|f\|_{L^p} := \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{T}} |f(e^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} < \infty, & 1 \leqslant p < \infty \\ \sup\limits_{\theta} |f(e^{i\theta})| < \infty, & p = \infty \end{cases} \tag{3}$$

的函数 f 的集合. 我们用

$$H^p_+(\mathbb{T}) := \{f(e^{it}) = \rho(t)e^{i\theta(t)} \in L^p(\mathbb{T}) |\ \tilde{H}(\rho\cos\theta)(t) = \rho(t)\sin\theta(t)\}$$

表示所有周期解析信号组成的集合, 用 $C(\mathbb{T})$ 表示定义在 $\mathbb{T}$ 上的连续函数 f 的集合. 用 θ_f 和 ω_f 分别表示解析信号 f 的瞬时相位和瞬时频率, 其中 $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta_f \leqslant \frac{\pi}{2}$.

令

$$H^p_+(\mathbb{D}) := \{F \in H^p(\mathbb{D}) | \mathrm{Im}F(0) = 0\},$$

其中 $\mathrm{Im}F$ 表示 F 的虚部. 我们知道, 函数 $f \in H^p_+(\mathbb{T})$ 当且仅当 f 是某函数 $F \in H^p_+(\mathbb{D})$ 的非切向边值 (参见文献 [15, 定理 3.2], [16, p. 183]). 我们将从 $H^p_+(\mathbb{T})$ 到 $H^p_+(\mathbb{D})$ 的一一对应 $f \mapsto F$ 简记为 $f = \partial F$, $F = \partial^{-1} f$. 因为对任意的非零函数 $F \in H^p_+(\mathbb{D})$, 根据 Hardy 空间中

的分解定理, 我们有 $F = O_F I_F$, 其中 $O_F \in H_+^p(\mathbb{D})$ 是 F 的外部函数, 它在 $\mathbb{D}$ 内无零点且能表示成

$$O_F(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\ln|f(e^{i\theta})|d\theta\right\},$$

其中 $\ln|f| \in L^1(\mathbb{T})$. 而 $I_F \in H_+^\infty(\mathbb{D})$ 是 F 的内函数, 它能进一步分解为 $I_F = B_F S_F$, 其中 B_F 是由 F 在单位圆内的所有零点序列 (多重零点按重数排列) 构成的 Blaschke 积, S_F 是其奇异内函数, 具体性质参见文献 [13, 14]. 这样, 对任意非零函数 $f \in H_+^p(\mathbb{T})$, 如果我们用 O_f 和 I_f 分别表示 O_F 和 I_F 的非切向边值函数, 即,

$$O_f(e^{it}) = \lim_{r\to 1^-} O_F(re^{it}), \qquad I_f(e^{it}) = \lim_{r\to 1^-} I_F(re^{it}),$$

我们有 $f = O_f I_f$, $O_f \in H_+^p(\mathbb{T})$, $I_f \in H_+^\infty(\mathbb{T})$, $|I_f| = 1$ a.e. 和 $|f| = |O_f|$ a.e. 有了上面的分析, 我们易知周期解析信号的相位具有下面的结构特征.

定理 2.1 如果 $f \in H_+^p(\mathbb{T})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 那么其相位 $\theta_f = \tilde{H}(\ln|f|) + \theta_{I_f} \pmod{2\pi}$ a.e.

证明 因为 $f \in H_+^p(\mathbb{T})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 则 $f = O_f I_f$, 其中 O_f 是

$$O_f(e^{it}) = \lim_{r\to 1^-} O_F(re^{it}) = \lim_{r\to 1^-} \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+re^{it}}{e^{i\theta}-re^{it}}\ln|f(e^{i\theta})|d\theta\right\}.$$

注意到

$$\frac{e^{i\theta}+re^{it}}{e^{i\theta}-re^{it}} = P_r(t-\theta) + i\, Q_r(t-\theta),$$

其中 $P_r(t)$ 是 Poisson 核, $Q_r(t)$ 是共轭 Poisson 核, 他们分别可以表示为

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}, \qquad Q_r(t) = \frac{2r\sin t}{1-2r\cos t + r^2}.$$

因为 $\ln|f| \in L^1(\mathbb{T})$, 当 $r \to 1^-$ 时, 根据 Poisson 核和共轭 Poisson 核的性质 (参见文献 [13, 第三章]), 我们有

$$O_f = |f|e^{i\tilde{H}(\ln|f|)} \qquad \text{a.e.} \tag{4}$$

进而 $f = |f|e^{i\tilde{H}(\ln|f|)} I_f = |f|e^{i\tilde{H}(\ln|f|)+i\theta_{I_f}}$ a.e. 定理证毕.

从上面的定理可知, 周期解析信号的相位是由两部分构成的, 一部分与其幅度相关, 另一部分与内函数的边值相关. 下面我们将指出在一些特殊情况下, 对应的边值内函数 $I_f(e^{it})$ 恰好能表示成具有下面形式的有限边值 Blaschke 积

$$b_f(e^{it}) = e^{i\gamma_f}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{it}-z_k}{1-\bar{z}_k e^{it}}, \tag{5}$$

其中 γ_f 是实常数, $\{z_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{D}$, 这里 $\bar{z}_k$ 表示 z_k 的共轭. 如果令 $z_k = r_k e^{it_k}$, 则通过计算我们很容易知 $b_f(e^{it})$ 的瞬时相位 $\theta_{b_f}(t)$ 和瞬时频率 $\omega_{b_f}(t)$ 分别被表示为

$$\theta_{b_f}(t) = \gamma_f + \sum_{k=1}^{n}\left[-t + 2\arctan\left(\frac{\sin t - r_k\sin t_k}{\cos t - r_k\cos t_k}\right)\right] \pmod{2\pi}, \tag{6}$$

$$\omega_{b_f}(t) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1-r_k^2}{1-2r_k\cos(t-t_k)+r_k^2}. \tag{7}$$

推论 2.2 假设非零函数 $f \in H_+^1(\mathbb{T})$. 如果 $f \in C(\mathbb{T})$ 且 $|f| > 0$ 或者 $\partial^{-1}f$ 是过圆周 $\mathbb{T}$ 解析的, 那么 $\theta_f = \tilde{H}(\ln|f|) + \theta_{b_f} \pmod{2\pi}$.

证明 首先, 我们来证明第一个结论. 因为 $F:=\partial^{-1}f\in H^1_+(\mathbb{D})$, 所以根据文献 [17, p. 335] 中的定理知, 当 $z=re^{i\theta}\in\mathbb{D}$ 时, 有

$$F(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)}f(e^{it})dt.$$

由 $f(e^{it})$ 的连续性和文献 [17, p. 227] 的定理知, $F(z)$ 能连续延拓到闭的单位圆盘上去. 又因为 $|f|>0$, 所以 $F(z)$ 在单位圆内只含有有限个零点. 如果 $F(z)$ 在单位圆内有无穷多个零点 z_k, 那么在 $\mathbb{T}$ 上必存在聚点. 根据 $F(z)$ 在闭的圆盘上的连续性知, $F(z)$ 在边界上必有零点, 这与 $|f(e^{it})|=|F(e^{it})|>0$ 矛盾, 因此 $F(z)$ 在单位圆内只含有有限个零点. 此外, 对于任意的 $z\in\mathbb{D}$, 由分解定理知 $F(z)=O_F(z)I_F(z)$, 其中 I_F 在单位圆内解析且 $F(z)$ 在单位圆内的零点全为 $I_F(z)$ 的零点. 所以 $I_F(z)$ 在单位圆内只有有限个零点, 我们不妨假设其为 $z_1,z_2,\ldots,z_n$ (其重零点按重数排列). 因为 $f(e^{it})$ 连续, 根据文献 [13, p. 78] 中的定理, 知 $O_f(e^{it})$ 在圆周上连续. 再根据 $f(e^{it})=O_f(e^{it})I_f(e^{it})$ 和 $|f(e^{it})|=|O_f(e^{it})|>0$, 我们有 $I_f(e^{it})$ 连续且 $|I_f(e^{it})|=1$. 这样由文献 [13, p. 6] 中的结论, 知 $I_f(e^{it})$ 能表示成 (5) 中的形式, 从而 $\theta_f=\tilde{H}(\ln|f|)+\theta_{b_f}(\mathrm{mod}\ 2\pi)$.

下证第二个结论. 因为 $f\in H^1(\mathbb{T})$, 所以 $F:=\partial^{-1}f\in H^1_+(\mathbb{D})$. 再根据分解定理, 我们有 $F=O_FI_F$, 其中 F 在单位圆内的零点全为 I_F 的零点. 因为 F 是过圆周解析, 根据解析函数的零点的孤立性知 F 在单位圆内只含有限个零点. 又由文献 [13, p. 78] 中的定理 6.3 知 I_F 也是过圆周解析, 所以 $|I_f(e^{it})|=1$ 且 $I_f(e^{it})$ 连续. 根据文献 [13, p. 6] 中的结论, 知 $I_f(e^{it})$ 能表示成 (5) 中的形式, 故 $\theta_f=\tilde{H}(\ln|f|)+\theta_{b_f}(\mathrm{mod}\ 2\pi)$. 定理证毕.

注 1 通过上面的推论, 我们很容易就可以得到文献 [5,6,18] 中出现的结论:

(1) 当 $F:=\partial^{-1}f$ 在闭的单位圆盘上解析且无零点时, 那么其对应的边值 $f(e^{it})=|f|e^{i\tilde{H}\ln|f|+i\gamma_f}$.

(2) 任意的周期有限带宽解析信号 $f(e^{it})$ 和周期有理解析信号 $f(e^{it})$ 都能表示为 $f(e^{it})=|f|e^{i\tilde{H}(\ln|f|)+i\theta_{b_f}}$.

接下来, 我们分析周期解析信号的相位对应的各部分的瞬时频率的性质. 如果周期解析信号 $f(e^{it})$ 对应的边值内函数为 $I_f(e^{it})=b_f(e^{it})$, 那么根据表达式 (7), 知其对应的瞬时频率是非负的. 对于一般的边值内函数 I_f, 如果我们把其对应的瞬时频率被定义为

$$\omega_{I_f}(t):=\lim_{r\to1^-}\frac{d}{dt}[\arg I_F(z)]=\lim_{r\to1^-}\mathrm{Re}\left(\frac{zI_F'(z)}{I_F(z)}\right),\quad z=re^{it},$$

其中 $\mathrm{Re}f$ 表示 f 的实部, 则 $\omega_{I_f}(t)$ 也是几乎处处非负的 (参见文献 [19]). 这样, 造成解析信号的瞬时频率出现负值的原因必与幅度相关, 即与外部解析函数的边值相关. 从下面的结论中还可以知: 对于任意给定的满足一定条件的相位, 我们可以通过外部解析函数构造出解析信号, 使得此解析信号的相位等于给定的相位模掉一个常数.

定理 2.3 对于任意给定的实相位 $\theta_f\in L^1(\mathbb{T})$. 如果 $\tilde{H}\theta_f\in L^1(\mathbb{T})$ 且存在 $p\geqslant1$ 使得 $\exp\{-p\tilde{H}\theta_f\}\in L^1(\mathbb{T})$, 那么存在解析信号

$$O_f(e^{it})=\exp\{-\tilde{H}\theta_f+\beta+i(\theta_f-\alpha)\}\in H^p_+(\mathbb{T}),$$

使得 $\theta_{O_f}=\theta_f-\alpha\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$, 其中 α 和 β 为实常数.

证明 令

$$O_F(z)=\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}(\tilde{H}\theta_f)(e^{it})dt\right\}.$$

根据文献 [17, p. 337] 中的定理, 知 $O_F(z) \in H^p(\mathbb{D})$ 且 $\mathrm{Im}O_F(0) = 0$. 再根据式 (4), 我们有

$$O_f(e^{it}) = \lim_{r\to 1-} O_F(re^{it}) = \exp\{-\tilde{H}\theta_f - i\tilde{H}^2\theta_f\} \in H^p_+(\mathbb{T}).$$

又由假设知 $\theta_f, \tilde{H}\theta_f \in L^1(\mathbb{T})$, 根据文献 [12, p. 344] 中的定理, 我们有

$$\tilde{H}^2\theta_f = -\theta_f + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \theta_f(e^{it})dt.$$

如果令 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \theta_f(e^{it})dt = \alpha + i\beta$, 则 $O_f(e^{it}) = \exp\{-\tilde{H}\theta_f + \beta + i(\theta_f - \alpha)\}$, 定理证毕.

推论 2.4 如果实的相位 $\theta_f \in C(\mathbb{T})$, 则存在解析信号

$$O_f(e^{it}) = \exp\{-\tilde{H}\theta_f + \beta + i(\theta_f - \alpha)\} \in H^1_+(\mathbb{T}),$$

使得 $\theta_{O_f} = \theta_f - \alpha \pmod{2\pi}$, 其中 α 和 β 为实常数.

证明 因为 $\theta_f \in C(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$, 根据 $\tilde{H}$ 是 $L^2(\mathbb{T})$ 上的有界算子知 $\tilde{H}\theta_f \in L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$. 根据文献 [8, p. 114] 中的定理知, 对任意的 $0 < \lambda < \infty$, 有 $\exp(\lambda|\tilde{H}\theta_f|) \in L^1(\mathbb{T})$. 特别地, 取 $\lambda = 1$, 我们有 $\exp(|\tilde{H}\theta_f|) \in L^1(\mathbb{T})$. 又因为 $\exp(-\tilde{H}\theta_f) \leqslant \exp(|\tilde{H}\theta_f|)$, 所以 $\exp(-\tilde{H}\theta_f) \in L^1(\mathbb{T})$, 根据定理 2.3, 结论得证.

通过上面的结论, 我们可以构造出许多既含有负频率也含有正频率的周期解析信号, 且他们的负频率分布不具有规律性. 例如令 $\theta_f(t) = \frac{(1-a^2)\sin t}{1-2a\cos t+a^2} \in C(\mathbb{T})$, 则根据推论 2.4, 我们有

$$O_{f,a}(e^{it}) = \exp\left\{\frac{e^{it}-a}{1-ae^{it}}\right\} = \exp\left\{\frac{(1+a^2)\cos t - 2a}{1-2a\cos t + a^2} + i\frac{(1-a^2)\sin t}{1-2a\cos t+a^2}\right\} \in H^1_+(\mathbb{T}),$$

其中 a 为实数且 $|a| < 1$, 则此解析信号对应的瞬时频率为

$$\omega_{O_{f,a}}(t) = \frac{(1-a^2)[(1+a^2)\cos t - 2a]}{(1-2a\cos t + a^2)^2},$$

那么 $\omega_{O_{f,a}}(t) \leqslant 0$ 当且仅当 $\cos t \leqslant 2a/(1+a^2)$. 显然, 当 $a \to 1$ 时, 出现正的瞬时频率的区间越来越来小; 而当 $a \to -1$ 时, 出现负的瞬时频率的区间的越来越小. 如图 1 所示.

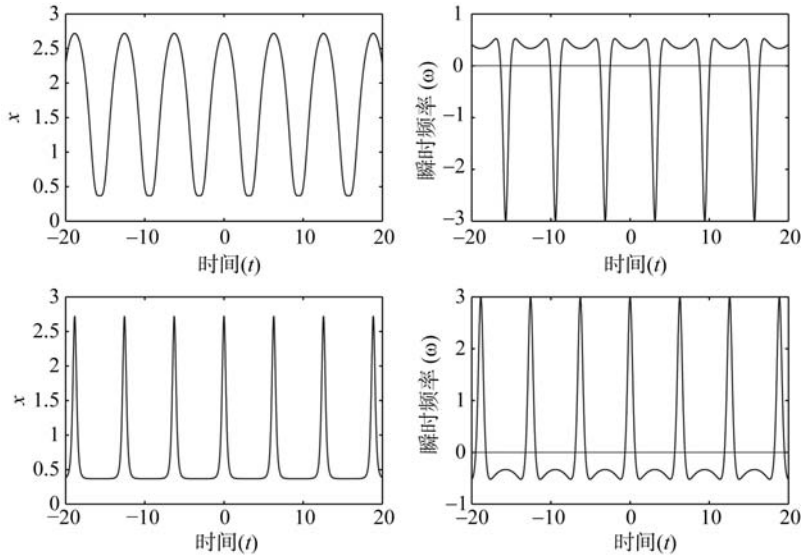

图 1 图像的上半部分分别表示 $a = 0.5$ 时 $O_{f,a}(e^{it})$ 对应的实部和瞬时频率, 图像的下半部分分别表示 $a = -0.5$ 时 $O_{f,a}(e^{it})$ 对应的实部和瞬时频率

3 一类瞬时频率大于零的周期解析信号

上一节我们分析了周期解析信号的相位的结构特征, 并指出在很多情况下通过解析信号求得的瞬时频率既含有正频率又含有负频率. 那么到底具有什么特征的周期解析信号才能保证其瞬时频率为正呢? 本节将围绕该问题展开讨论. 为了证明的方便, 首先我们给出来自文献 [20] 的一些相关定义. 一个在区域 Ω 上解析的函数 F 被称为单值函数, 是指对任意的 $z_1, z_2 \in \Omega$, 如果 $z_1 \neq z_2$, 有 $F(z_1) \neq F(z_2)$. 一条曲线被称为 Jordan 曲线, 是指其为闭曲线且无自相交点. 一个区域 Ω 被称为星形区域, 是指如果 $0 \in \Omega$, 且当 $z \in \Omega$ 有 $tz \in \Omega$, 其中 $0 < t < 1$. 一个单值且解析的函数 $F : \mathbb{D} \mapsto F(\mathbb{D})$ 被称为星函数, 是指 $F(\mathbb{D})$ 是星形区域且 $F(0) = 0$, 我们用 S^* 表示所有星函数的集合.

定理 3.1 设 $F(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 内解析, 在边值 $\mathbb{T}$ 上绝对连续且无零点, 则存在 n 个零点 $\{z_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{D}$ (其重点按重数计算) 以及在 $\mathbb{D}$ 上解析、在 $\mathbb{D}$ 内除 0 处有一阶零点外无其他零点且其边值在 $\mathbb{T}$ 上绝对连续的函数 $\varphi(z)$, 使得

$$F(z) = [\varphi(z)]^n \prod_{j=1}^n \frac{(z - z_j)(1 - \bar{z}_j z)}{z}.$$

此时, $\frac{d}{dt}[\arg F(e^{it})] \geqslant 0$ a.e. 当且仅当 $\varphi(z) \in S^*$ 且 $\varphi(z)$ 的边值 $\varphi(e^{it})$ 是 Jordan 曲线.

证明 因为 $F(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 内解析, 在边值 $\mathbb{T}$ 上绝对连续, 故 $F(z) \in H^\infty(\mathbb{D})$, 所以对 $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, 有

$$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - t)} f(e^{it}) dt.$$

因为 $f(e^{it})$ 绝对连续, 自然有 $f(e^{it})$ 连续, 根据文献 [17, p. 227] 中的定理, 知 $F(z)$ 能连续延拓到闭的单位圆盘上去. 又因为 $F(z)$ 在边值 $\mathbb{T}$ 上无零点, 所以 $F(z)$ 在单位圆内只有有限个零点, 我们不妨假设其为 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (其重点按重数排列), 则 $F(z)$ 可表示为

$$F(z) = z^n g(z) \prod_{j=1}^n \frac{(z - z_j)(1 - \bar{z}_j z)}{z},$$

其中 $g(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 上解析且无零点. 令 $\varphi(z) = z[g(z)]^{\frac{1}{n}}$, 则有

$$F(z) = [\varphi(z)]^n \prod_{j=1}^n \frac{(z - z_j)(1 - \bar{z}_j z)}{z},$$

其中 $\varphi(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 上解析, 在 $\mathbb{D}$ 内除 0 处有一阶零点外无其他零点. 又因为 $F(e^{it})$ 绝对连续, 根据 $F(z)$ 的表达式及其在闭圆盘上的连续性, 知 $\varphi(z)$ 也在边值 $\mathbb{T}$ 上绝对连续.

下证 $\frac{d}{dt}[\arg f(e^{it})] \geqslant 0$ a.e. 当且仅当 $\varphi(z) \in S^*$ 且其边值 $\varphi(e^{it})$ 是 Jordan 曲线.

因为 $F(z) = [\varphi(z)]^n \prod_{j=1}^n \frac{(z-z_j)(1-\bar{z}_j z)}{z}$ 在 $\mathbb{D}$ 内解析, 在边值 $\mathbb{T}$ 上绝对连续, 所以

$$F(e^{it}) = \lim_{r \to 1^-} F(re^{it}) = \lim_{r \to 1^-} [\varphi(z)]^n \prod_{j=1}^n \frac{(z - z_j)(1 - \bar{z}_j z)}{z} = [\varphi(e^{it})]^n \prod_{j=1}^n \frac{(e^{it} - z_j)(1 - \bar{z}_j e^{it})}{e^{it}}.$$

这样

$$\arg F(e^{it}) = n \arg \varphi(e^{it}) + \sum_{j=1}^n \arg \left[\frac{(e^{it} - z_j)(1 - \bar{z}_j e^{it})}{e^{it}} \right] + 2k\pi = n \arg \varphi(e^{it}) + 2k\pi.$$

再根据 $F(e^{it}), \varphi(e^{it})$ 的绝对连续性, 我们有

$$\frac{d}{dt}[\arg F(e^{it})] = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{it} F'(e^{it})}{F(e^{it})} \right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{it} \varphi'(e^{it})}{\varphi(e^{it})} \right) = n \frac{d}{dt}[\arg \varphi(e^{it})] \quad \text{a.e.},$$

从而有 $\frac{d}{dt}[\arg f(e^{it})] \geqslant 0$ a.e. 当且仅当 $\frac{d}{dt}[\arg \varphi(e^{it})] \geqslant 0$ a.e.

首先假设 $\frac{d}{dt}[\arg \varphi(e^{it})] \geqslant 0$ a.e. 因为 $\varphi(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 内解析, 在边值 $\mathbb{T}$ 上绝对连续, 在 $\mathbb{D}$ 内除 0 处有一阶零点外无其他零点, 那么根据幅角原理知 $\varphi(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 内单值且 $\varphi(e^{it})$ 是绕原点一圈的有界可求长曲线. 又因为 $\frac{d}{dt}[\arg \varphi(e^{it})] \geqslant 0$ a.e., 所以 $\arg \varphi(e^{it})$ 随着 t 的增加而增加. 所以 $\varphi(\mathbb{D})$ 为星形区域且 $\varphi(e^{it})$ 是 Jordan 曲线, 自然 $\varphi(z) \in S^*$ 且 $\varphi(e^{it})$ 是 Jordan 曲线.

反之, 如果 $\varphi(z) \in S^*$ 且其边值 $\varphi(e^{it})$ 是 Jordan 曲线, 那么 $\varphi(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 内单值解析且除在 0 处有一阶零点外无其他零点. 再根据文献 [21, p. 419] 中的定理知 $\varphi(z)$ 可以连续延拓到闭的单位圆盘上去且 $\varphi(z)$ 在 $\mathbb{T}$ 上绝对连续, 所以 $\arg \varphi(e^{it})$ 随着 t 的增加而增加, 故 $\frac{d}{dt}[\arg \varphi(e^{it})] = \mathrm{Re}(\frac{e^{it}\varphi'(e^{it})}{\varphi(e^{it})}) \geqslant 0$ a.e.

该定理给出了在边界 $\mathbb{T}$ 上绝对连续的 $\mathbb{D}$ 内解析函数之边值信号具有非负瞬时频率的充分必要条件, 由于星形函数是十分容易构造的, 而 Jordan 曲线条件也很容易满足, 因此利用该定理我们可以十分容易地构造出大量具有非负瞬时频率的解析信号.

对 $\varphi \in S^*$, 当 $\frac{d}{dt}[\arg \varphi(e^{it})] \geqslant 0$ a.e. 时, $F(z) = [\varphi(z)]^n \prod_{j=1}^n \frac{(z-z_j)(1-\bar{z}_j z)}{z}$ 在文献 [22] 中被称为 n-值弱星形函数. 通过下面的定理知这样一类函数的边值与我们将要定义的周期 H-n 原子具有等价性.

定义 3.2 我们把具有下面属性的复信号 $f(e^{it}) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$ 称为周期 H-n 原子:

(1) $\tilde{H}(\rho\cos\theta) = \rho\sin\theta$;

(2) $f(e^{it})$ 绝对连续, $\rho(t) > 0$ 且 $\theta'(t) \geqslant 0$ a.e.;

(3) $\int_0^{2\pi} \theta'(t)dt = 2\pi n$.

定理 3.3 复信号 $f(e^{it}) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$ 为周期 H-n 原子的充分必要条件是 $f(e^{it})$ 是 $F(z) = [\varphi(z)]^n \prod_{j=1}^n \frac{(z-z_j)(1-\bar{z}_j z)}{z}$ 的边值且 $\mathrm{Im}F(0) = 0$, 其中 $\varphi(z) \in S^*$ 且 $\varphi(e^{it})$ 是有界可求长的 Jordan 曲线.

证明 假设复信号 $f(e^{it})$ 为周期 H-n 原子. 因为 $f(e^{it})$ 绝对连续且 $\tilde{H}(\rho\cos\theta) = \rho\sin\theta$, 所以 $f(e^{it}) \in H_+^\infty(\mathbb{T})$. 于是, $F := \partial^{-1} f \in H_+^\infty(\mathbb{D})$. 又因为 $f(e^{it})$ 绝对连续, $\rho(t) > 0$ 且 $\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t}[\arg f(e^{it})]dt = 2\pi n$, 那么由幅角原理我们知 $F(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 内有 n 个零点, 我们不妨假设其为 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (其重点按重数计算). 同时根据 $\frac{d}{dt}[\arg f(e^{it})] = \theta'(t) \geqslant 0$ a.e., 由定理 3.1 知 $F(z) = [\varphi(z)]^n \prod_{j=1}^n \frac{(z-z_j)(1-\bar{z}_j z)}{z}$, 其中 $\varphi(z) \in S^*$ 且其边值 $\varphi(e^{it})$ 是有界可求长的 Jordan 曲线.

反之, 假设 $f(e^{it}) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$ 为 $F(z) = [\varphi(z)]^n \prod_{j=1}^n \frac{(z-z_j)(1-\bar{z}_j z)}{z}$ 的边值, 其中 $\varphi(z) \in S^*$ 且 $\varphi(e^{it})$ 是有界可求长的 Jordan 曲线. 因为 $\varphi(z) \in S^*$ 且其边值 $\varphi(e^{it})$ 是有界可求长的 Jordan 曲线, 故 $\varphi(z) \in H^\infty(\mathbb{D})$, $\varphi(0) = 0$, $|\varphi(e^{it})| > 0$ 且 $\varphi(e^{it})$ 绝对连续. 自然, $F(z) \in H_+^\infty(\mathbb{D})$, $\rho(t) > 0$ 且 $f(e^{it})$ 绝对连续. 再根据定理 3.1 和 $F(z) \in H_+^\infty(\mathbb{D})$, 我们有 $\frac{d}{dt}[\arg f(e^{it})] = n\frac{d}{dt}[\arg \varphi(e^{it})] \geqslant 0$ a.e. 和 $\tilde{H}(\rho\cos\theta) = \rho\sin\theta$. 因为 $F(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 内解析且只有 n 个零点, $f(e^{it})$ 绝对连续和 $|f(e^{it})| > 0$, 那么根据幅角原理我们还有 $\int_0^{2\pi} \theta'(t)dt = 2\pi n$, 所以 $f(e^{it})$ 为周期 H-n 原子.

注 2 特别地, 当我们要求定理 3.3 中的 $f(0) = 0$, $n = 1$ 时, 我们就得到了参考文献 [11] 中的定理 2.2.

最后, 根据定理 3.3, 我们从一个具体的实例去观察其对应的几何特征. 令

$$\varphi(z)=\frac{z}{(1-0.5z)^2}\in S^*,\quad n=4,\quad z_1=0,\quad z_2=0.2,\quad z_3=0.4,\quad z_3=0.6,$$

则 $F(z)$ 对应的边值 $f(e^{it})$ 为

$$f(e^{it})=[\varphi(e^{it})]^4\prod_{j=1}^{4}\frac{(e^{it}-z_j)(1-z_je^{it})}{e^{it}},$$

为周期 H-n 原子. 边值函数 f 在复平面的轨迹及其实部所构成的信号和对应的瞬时频率如图 2 所示. 从图中我们可以看出周期 H-n 原子在复平面上围原点绕 n 圈, 且每一圈所围的区域为星形区域.

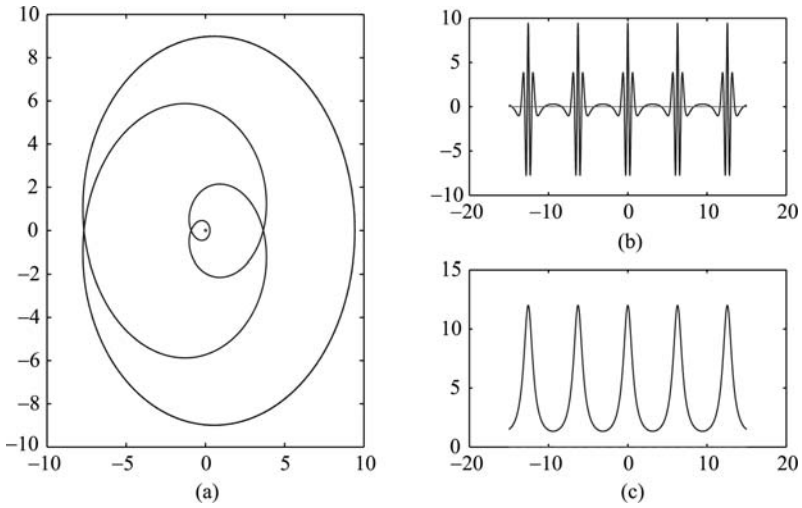

图 2 (a) f 在复平面的图象; (b) f 对应的实部函数; (c) f 对应的瞬时频率

参考文献

1 Haykin S. Communication Systems, 3rd ed. New York: Wiley, 1994

2 Vakman D. On the definition of concepts of amplitude, phase and instantaneous frequency of a signal. *Radio Eng Electron Phys*, **17**: 754–759 (1972)

3 Boashash B. Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal. *Proc IEEE*, **80**: 520–538 (1992)

4 Cohen L. Time-Frequency Analysis. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1995

5 Narasimhan S V, Veena S. Signal processing principles and implementation. New Delhi: Narosa Publishing House, 2005

6 Oppenheim A V, Schafer R W. Discrete-Time Signal Processing. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1989

7 Chen Q H, Li L Q, Qian T. Two families of unit analytic signals with nonlinear phase. *Phys D*, **221**: 1–12 (2006)

8 Doroslovacki M I. On nontrivial analytic signals with positive instantaneous frequency. *Signal Processing*, **83**: 655–658 (2003)

9 Kumaresan R, Rao A. Model-based approach to envelope and positive instantaneous frequency estimation of signals with speech applications. *J Acoust Sco Am*, **105**: 1912–1924 (1999)

10 Xia X G, Cohen L. On analytic signals with nonnegative instantaneous frequencies. In: Proceeding of the ICASSAP-99, Vol. 3. Washington: IEEE Computer Society, 1999, 1329–1332
11 Qian T. Mono-components for decomposition of signals. *Math Meth Appl Sci*, **29**: 1187–1198 (2006)
12 Butzer P L, Nessel R J. Fourier Analysis and Approximation, Vol. 1. New York: Academic Press, 1971
13 Garnett J B. Bounded Analytic Function. New York: Academic Press, 1987
14 Koosis P. Introduction to H^p Spaces. Cambridge: Cambridge University Press, 1980
15 Qian T. Characterization of boundary values of functions in Hardy spaces with application in signal analysis. *J Integral Equations Appl*, **17**(2): 159–198 (2005)
16 河田龙夫. Fourier 分析. 周民强译. 北京: 高等教育出版社, 1982
17 Rudin W. Real and Complex Analysis, 2nd ed. New York: Tata McGraw-Hill, 1987
18 Oppenheim A V, Lim J S. The importance of phase in signals. *Proc IEEE*, **69**: 529–541 (1981)
19 Qian T. Boundary derivatives of the phases of inner and outer functions and applications. *Math Meth Appl Sci*, **32**: 253–263 (2009)
20 Duren P L. Univalent Functions. Berlin: Springer, 1983
21 Goluzin G M. Geometric Theory of Functions of a Complex Variable, 2rd ed. Moscow: Nauka, 1966
22 Hummel J A. Multivalent starlike function. *J Anal Math*, **18**: 133–160 (1967)