中国科学 A 辑: 数学 2009 年 第 39 卷 第 4 期: 405～432
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

Abel 分部求和法与基本超几何级数变换

初文昌, 王琛颖

大连理工大学应用数学系, 大连 116024
E-mail: chu.wenchang@unile.it; wang.chenying@163.com

收稿日期: 2007-09-03; 接受日期: 2008-08-22
国家自然科学基金青年基金 (批准号: 10801026) 资助项目

摘要 利用修正的 Abel 分部求和引理, 系统研究基本超几何级数的部分和, 建立一些关于列平衡、二次、三次以及四次基本超几何级数的变换公式和求和公式.

关键词 Abel 分部求和引理 基本超几何级数 列平衡级数 二次级数 三次级数 四次级数 互补关系

MSC(2000) 主题分类 33D15, 05A15

设 x 和 q 为两个复变量, 定义 x 以 q 为基的升阶乘:

$$(x;q)_0 = 1 \quad 和 \quad (x;q)_n = (1-x)(1-qx)\cdots(1-q^{n-1}x), \quad 其中\ n \in \mathbb{N}.$$

当 $|q|<1$ 时, 有两个无穷乘积表达式

$$(x;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty}(1-q^k x), \quad (x;q)_n = \frac{(x;q)_\infty}{(q^n x;q)_\infty}.$$

升阶乘的乘积和分式有下面的紧凑记号:

$$[\alpha,\beta,\ldots,\gamma;q]_n = (\alpha;q)_n(\beta;q)_n\cdots(\gamma;q)_n,$$

$$\left[\begin{matrix}\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \gamma\\ A,\ B,\ \ldots,\ C\end{matrix}\Big|q\right]_n = \frac{(\alpha;q)_n(\beta;q)_n\cdots(\gamma;q)_n}{(A;q)_n(B;q)_n\cdots(C;q)_n}.$$

沿用 Bailey[1], Gasper-Rahman[2] 以及 Slater[3] 的记号, 基本超几何级数 (简称 q- 级数) 定义如下:

$${}_{1+r}\phi_s\left[\begin{matrix}a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_r\\ b_1,\ \ldots,\ b_s\end{matrix}\Big|q;z\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\{(-1)^n q^{\binom{n}{2}}\}^{s-r}\left[\begin{matrix}a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_r\\ q,\ b_1,\ \ldots,\ b_s\end{matrix}\Big|q\right]_n z^n,$$

其中对于非终止级数要求 $|q|<1$. 在这篇文章中, 如果 Ω_n 用来表示一些 q- 级数的部分和, 那么去掉下标的相同字母 Ω 则表示 Ω_n 在 $n\to\infty$ 时的极限 (当然, 如果极限存在).

关于基本超几何级数, 有许多重要而又有用的恒等式, 其中两个著名的例子是 Ramanujan 的双边 ${}_1\psi_1$ 级数恒等式 (见文献 [4, pp. 222–223]) 和 Bailey 的列平衡 ${}_6\psi_6$-级数恒等式 [5]. 最近 Chu[6,7] 利用 Abel 分部求和方法给出了这两个公式的新证明. 作为这一方法的进一步发展, 本文将系统研究关于基本超几何级数部分和的变换公式及恒等式.

引用格式: 初文昌, 王琛颖. Abel 分部求和法与基本超几何级数变换. 中国科学 A, 2009, 39(4): 405–432
Chu W C, Wang C Y. Abel's lemma on summation by parts and partial q-series transformations. Sci China Ser A, 2009, 52(4): 720–748, DOI: 10.1007/s11425-008-0173-1

对于任意的复数序列 $\{\tau_k\}$, 分别定义向后和向前差分算子 $\triangledown$ 和 $\vartriangle$:

$$\triangledown\tau_k = \tau_k - \tau_{k-1}, \quad \vartriangle\tau_k = \tau_k - \tau_{k+1}.$$

需要指出的是, 在本文中 $\vartriangle$ 是为方便而采用的记号, 它与通常的 Δ 算子仅相差一个负号.

Abel 分部求和法是分析数学的重要工具, 其基本引理可表达为如下等价形式:

$$\sum_{k=0}^{n-1} B_k \triangledown A_k = \big\{A_{n-1}B_n - A_{-1}B_0\big\} + \sum_{k=0}^{n-1} A_k \vartriangle B_k.$$

事实上, 不难看到左端和式可以表达为

$$\sum_{k=0}^{n-1} B_k \triangledown A_k = \sum_{k=0}^{n-1} B_k \big\{A_k - A_{k-1}\big\} = \sum_{k=0}^{n-1} A_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_{k-1} B_k.$$

将最后一个求和流标 k 替换为 $k+1$, 上式可改写为

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} B_k \triangledown A_k &= A_{n-1}B_n - A_{-1}B_0 + \sum_{k=0}^{n-1} A_k\big\{B_k - B_{k+1}\big\}\\ &= A_{n-1}B_n - A_{-1}B_0 + \sum_{k=0}^{n-1} A_k \vartriangle B_k,\end{aligned}$$

这便是 Abel 分部求和引理的表达式.

本文的主要目的是探究 Abel 分部求和引理在基本超几何级数部分和上的应用. 我们将建立一些列平衡级数、二次级数、三次级数和四次级数的互补关系以及前者与后三者间的变换公式. 作为特例, 我们重新推证由 Chu[8], Gapser[9], Gapser-Rahman[10], Gessel-Stanton[11] 以及 Rahman[12] 所发现的众多恒等式. 据此我们确信作为经典分析工具的 Abel 分部求和引理是研究基本超几何级数的自然而行之有效的方法.

1 列平衡级数的变换及求和公式

设 $\{a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma\}$ 是满足 $qa^3 = bcd\alpha\beta\gamma$ 的 7 个未知量. 本节研究下面的列平衡级数部分和:

$$\Omega_n(a; b, c, d, \alpha, \beta, \gamma) = \sum_{k=0}^{n-1}\{1 - q^{2k}a\}\begin{bmatrix} b, & c, & d, & \alpha, & \beta, & \gamma \\ qa/b, & qa/c, & qa/d, & qa/\alpha, & qa/\beta, & qa/\gamma \end{bmatrix} q \bigg]_k q^k.$$

1.1 列平衡差分偶和递归关系

对于给定的两个序列

$$A_k = \begin{bmatrix} qb, & qc, & qd, & qa^2/bcd \\ qa/b, & qa/c, & qa/d, & qbcd/a \end{bmatrix} q \bigg]_k,$$

$$B_k = \begin{bmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & qbcd/a \\ qa/\alpha, & qa/\beta, & qa/\gamma, & a^2/bcd \end{bmatrix} q \bigg]_k;$$

很容易计算下面的关系式:

$$\varpi := A_{-1}B_0 = \frac{(1-a/b)(1-a/c)(1-a/d)(1-bcd/a)}{(1-b)(1-c)(1-d)(1-a^2/bcd)},$$

$$\mathcal{R} := \frac{A_{n-1}B_n}{A_{-1}B_0} = \frac{1-q^n bcd/a}{1-bcd/a}\begin{bmatrix} b, & c, & d, & \alpha, & \beta, & \gamma \\ a/b, & a/c, & a/d, & qa/\alpha, & qa/\beta, & qa/\gamma \end{bmatrix} q \bigg]_n;$$

以及差分表达式

$$\begin{aligned}\triangledown A_k &= \frac{bcd}{a}\frac{(1-q^{2k}a)(1-a/bc)(1-a/bd)(1-a/cd)}{(1-b)(1-c)(1-d)(1-a^2/bcd)}\\ &\quad\times\left[\begin{matrix} b, & c, & d, & a^2/bcd \\ qa/b, & qa/c, & qa/d, & qbcd/a\end{matrix}\Big| q\right]_k q^k,\\ \triangle B_k &= \frac{(1-q^{1+2k}a)(1-qa/\alpha\beta)(1-qa/\alpha\gamma)(1-qa/\beta\gamma)}{(1-qa/\alpha)(1-qa/\beta)(1-qa/\gamma)(1-qa/\alpha\beta\gamma)}\\ &\quad\times\left[\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & qbcd/a \\ q^2a/\alpha, & q^2a/\beta, & q^2a/\gamma, & qa^2/bcd\end{matrix}\Big| q\right]_k q^k.\end{aligned}$$

通过修正的 Abel 分部求和引理, 可对 Ω 级数做如下变形

$$\begin{aligned}&\Omega_n(a;b,c,d,\alpha,\beta,\gamma)\times\frac{bcd}{a}\frac{(1-a/bc)(1-a/bd)(1-a/cd)}{(1-b)(1-c)(1-d)(1-a^2/bcd)}\\ &\quad=\sum_{k=0}^{n-1}B_k\triangledown A_k=\varpi(\mathfrak{R}-1)+\sum_{k=0}^{n-1}A_k\triangle B_k.\end{aligned}$$

根据前面的定义, 最后一个部分和的显式表示为

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}A_k\triangle B_k &= \frac{(1-qa/\alpha\beta)(1-qa/\alpha\gamma)(1-qa/\beta\gamma)}{(1-qa/\alpha)(1-qa/\beta)(1-qa/\gamma)(1-qa/\alpha\beta\gamma)}\\ &\quad\times\sum_{k=0}^{n-1}\{1-q^{1+2k}a\}\left[\begin{matrix} qb, & qc, & qd, & \alpha, & \beta, & \gamma \\ qa/b, & qa/c, & qa/d, & q^2a/\alpha, & q^2a/\beta, & q^2a/\gamma\end{matrix}\Big| q\right]_k q^k,\end{aligned}$$

这样, 我们便得到递归关系

$$\begin{aligned}\Omega_n(a;b,c,d,\alpha,\beta,\gamma) &= \Omega_n(qa;qb,qc,qd,\alpha,\beta,\gamma)\\ &\quad\times\frac{(1-b)(1-c)(1-d)(1-qa/\alpha\beta)(1-qa/\alpha\gamma)(1-qa/\beta\gamma)}{(1-bc/a)(1-bd/a)(1-cd/a)(1-qa/\alpha)(1-qa/\beta)(1-qa/\gamma)}\\ &\quad+\{1-\mathfrak{R}\}\frac{(1-a/b)(1-a/c)(1-a/d)(1-bcd/a)}{(1-bc/a)(1-bd/a)(1-cd/a)(a^2/bcd)}.\end{aligned}$$

1.2 迭代过程及互补公式

迭代上述递归关系 m 次, 得到变换

$$\begin{aligned}\Omega_n(a;b,c,d,\alpha,\beta,\gamma) &= \Omega_n(q^m a;q^m b,q^m c,q^m d,\alpha,\beta,\gamma)\\ &\quad\times\left[\begin{matrix} b,c,d,\ qa/\alpha\beta,qa/\alpha\gamma,qa/\beta\gamma \\ bc/a,bd/a,cd/a,qa/\alpha,qa/\beta,qa/\gamma\end{matrix}\Big| q\right]_m\\ &\quad-\frac{a}{bcd}\frac{(1-a/b)(1-a/c)(1-a/d)}{(1-a/bc)(1-a/bd)(1-a/cd)}\\ &\quad\times\sum_{k=0}^{m-1}\left[\begin{matrix} b,c,d,\ qa/\alpha\beta,qa/\alpha\gamma,qa/\beta\gamma \\ qbc/a,qbd/a,qcd/a,qa/\alpha,qa/\beta,qa/\gamma\end{matrix}\Big| q\right]_k q^k\\ &\quad\times(1-q^{2k}bcd/a)\{1-\mathfrak{R}(q^ka,q^kb,q^kc,q^kd,\alpha,\beta,\gamma)\}.\end{aligned}$$

分开脚标为 k 和 n 的升阶乘, 重新整理 $\mathcal{R}$ 函数

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(q^k a, q^k b, q^k c, q^k d, \alpha, \beta, \gamma) &= \frac{1-q^{n+2k}bcd/a}{1-q^{2k}bcd/a} \\ &\quad\times \left[\begin{matrix} q^k b,\ q^k c,\ q^k d, & \alpha, & \beta, & \gamma \\ a/b,\ a/c,\ a/d,\ & q^{k+1}a/\alpha, & q^{k+1}a/\beta, & q^{k+1}a/\gamma \end{matrix}\Big| q\right]_n \\ &= \frac{1-q^{n+2k}bcd/a}{1-q^{2k}bcd/a}\left[\begin{matrix} b, & c, & d, & \alpha, & \beta, & \gamma \\ a/b, & a/c, & a/d, & qa/\alpha, & qa/\beta, & qa/\gamma \end{matrix}\Big| q\right]_n \\ &\quad\times \left[\begin{matrix} q^n b,\ q^n c,\ q^n d, & qa/\alpha, & qa/\beta, & qa/\gamma \\ b,\quad c,\quad d, & q^{n+1}a/\alpha, & q^{n+1}a/\beta, & q^{n+1}a/\gamma \end{matrix}\Big| q\right]_k,\end{aligned}$$

然后用 Ω'_m 来标记另一个列平衡级数

$$\begin{aligned}\Omega'_m(a,b,c,d,\alpha,\beta,\gamma) &= \Omega_m(bcd/a; b, c, d, qa/\beta\gamma, qa/\alpha\gamma, qa/\alpha\beta) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1}\{1-q^{2k}bcd/a\}\left[\begin{matrix} b, c, d,\ qa/\alpha\beta, qa/\alpha\gamma, qa/\beta\gamma \\ qbc/a, qbd/a, qcd/a, qa/\alpha, qa/\beta, qa/\gamma \end{matrix}\Big| q\right]_k q^k \qquad (1)\end{aligned}$$

我们便建立如下列平衡级数变换公式:

定理 1 (列平衡级数互补关系: $qa^3 = bcd\alpha\beta\gamma$)

$$\begin{aligned}&\Omega_n(a; b, c, d, \alpha, \beta, \gamma) - \Omega_n(q^m a; q^m b, q^m c, q^m d, \alpha, \beta, \gamma)\left[\begin{matrix} b,\ c,\ d,\ qa/\alpha\beta,\ qa/\alpha\gamma,\ qa/\beta\gamma \\ bc/a, bd/a, cd/a, qa/\alpha, qa/\beta, qa/\gamma \end{matrix}\Big| q\right]_m \\ &= \frac{-a}{bcd}\frac{(1-a/b)(1-a/c)(1-a/d)}{(1-a/bc)(1-a/bd)(1-a/cd)}\Bigg\{\Omega'_m(a,b,c,d,\alpha,\beta,\gamma) \\ &\quad -\Omega'_m(q^{2n}a, q^n b, q^n c, q^n d, q^n\alpha, q^n\beta, q^n\gamma)\left[\begin{matrix} b, & c, & d, & \alpha, & \beta, & \gamma \\ a/b, & a/c, & a/d, & qa/\alpha, & qa/\beta, & qa/\gamma \end{matrix}\Big| q\right]_n\Bigg\}.\end{aligned}$$

这个关系式之所以称为互补的, 是因为右端花括号中的部分可以通过在左端表达式中互换 m 与 n, 并作参量替换 $a \to bcd/a$, $\alpha \to qa/\beta\gamma$, $\beta \to qa/\alpha\gamma$ 和 $\gamma \to qa/\alpha\beta$ 而得到. 如果将上述递归关系再运用到右端的花括号中, 那么我们将回到关系式的左端.

1.3 特例三则

在这个定理中, 依次令 $m = n$, $b \to a$, $c = q^{1-n}$, 可以看到变换公式的最后两行消失, 第一行右端的级数 Ω_n 变为 1. 重新给参数命名, 我们得到 Jackson 的 q-Dougall 求和定理.

推论 2 (文献 [13]: 参考文献 [2, II–22])

$${}_8\phi_7\left[\begin{matrix} a, & q\sqrt{a}, & -q\sqrt{a}, & b, & c, & d, & e, & q^{-m} \\ & \sqrt{a}, & -\sqrt{a}, & qa/b, & qa/c, & qa/d, & qa/e, & q^{m+1}a \end{matrix}\Big| q; q\right] = \left[\begin{matrix} qa, qa/bc, qa/bd, qa/cd \\ qa/b, qa/c, qa/d, qa/bcd \end{matrix}\Big| q\right]_m,$$

其中 $q^{1+m}a^2 = bcde$.

值得一提的是定理 1 在 $m, n \to \infty$ 时导致下面这个令人惊奇的变换公式:

命题 3 (非终止的列平衡级数变换: $qa^3=bcd\alpha\beta\gamma$)

$$\begin{aligned}\Omega(a;b,c,d,\alpha,\beta,\gamma)=&\left[\begin{matrix}b,c,d,qa/\alpha\beta,qa/\alpha\gamma,qa/\beta\gamma\\bc/a,bd/a,cd/a,qa/\alpha,qa/\beta,qa/\gamma\end{matrix}\Big|q\right]_\infty {}_4\phi_3\left[\begin{matrix}q,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma\\qa/b,qa/c,qa/d\end{matrix}\Big|q;q\right]\\&-\frac{a}{bcd}\frac{(1-a/b)(1-a/c)(1-a/d)}{(1-a/bc)(1-a/bd)(1-a/cd)}\Big\{\Omega'(a,b,c,d,\alpha,\beta,\gamma)\\&-\left[\begin{matrix}b,&c,&d,&\alpha,&\beta,&\gamma\\a/b,&a/c,&a/d,&qa/\alpha,&qa/\beta,&qa/\gamma\end{matrix}\Big|q\right]_\infty\\&\times{}_4\phi_3\left[\begin{matrix}q,\ qa/\alpha\beta,qa/\alpha\gamma,qa/\beta\gamma\\qbc/a,\ qbd/a,\ qcd/a\end{matrix}\Big|q;q\right]\Big\}.\end{aligned}$$

依次令 $b\to a$, $d\to 1$ 并重新命名参数, 从命题 3 可推出非终止的 q-Saalschütz 公式.

推论 4 (文献 [14, 方程 (5.2)]: 参考文献 [2, II-24]) 对于满足条件 $qabc=de$ 的 5 个变元 a,b,c,d,e, 存在这样的平衡级数恒等式:

$$\begin{aligned}&\left[\begin{matrix}d/a,&d/b,&d/c,&d/abc\\d,&d/ab,&d/ac,&d/bc\end{matrix}\Big|q\right]_\infty\\&\quad={}_3\phi_2\left[\begin{matrix}a,&b,&c\\&d,&e\end{matrix}\Big|q;q\right]+\left[\begin{matrix}a,b,c,q/e,qd/e\\qa/e,qb/e,qc/e,d,e/q\end{matrix}\Big|q\right]_\infty{}_3\phi_2\left[\begin{matrix}qa/e,&qb/e,&qc/e\\&qd/e,&q^2/e\end{matrix}\Big|q;q\right].\end{aligned}$$

2 二次级数的变换及求和公式

本节将研究二次级数部分和

$$E_n(a,b,c,d,e)=\sum_{k=0}^{n-1}\{1-q^{3k}a\}\left[\begin{matrix}b,\ d,\ qa/bd\\qa/c,qa/e,ce/a\end{matrix}\Big|q\right]_k\left[\begin{matrix}c,\ e,\ qa^2/ce\\q^2a/b,q^2a/d,qbd\end{matrix}\Big|q^2\right]_k q^k.$$

2.1 互补关系式

对于给定的两个序列

$$\mathrm{A}_k=\left[\begin{matrix}qb,&q^2a/bd\\qa/c,&q^2c/d\end{matrix}\Big|q\right]_k\left[\begin{matrix}q^2c,&qad/c\\q^2a/b,&qbd\end{matrix}\Big|q^2\right]_k,$$

$$\mathrm{B}_k=\left[\begin{matrix}d/q,&q^2c/d\\qa/e,&ce/a\end{matrix}\Big|q\right]_k\left[\begin{matrix}e,&qa^2/ce\\q^2a/d,&ad/qc\end{matrix}\Big|q^2\right]_k;$$

不难验证有下面的关系:

$$\varpi:=\mathrm{A}_{-1}\mathrm{B}_0=a\frac{(1-b/a)(1-c/a)(1-qc/d)(1-q/bd)}{(1-b)(1-c)(1-qa/bd)(1-qc/ad)},$$

$$\mathcal{R}:=\frac{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_n}{\mathrm{A}_{-1}\mathrm{B}_0}=\frac{1-q^{1+n}c/d}{1-qc/d}\left[\begin{matrix}b,&d/q,&qa/bd\\a/c,&qa/e,&ce/a\end{matrix}\Big|q\right]_n\left[\begin{matrix}c,&e,&qa^2/ce\\a/b,&bd/q,&q^2a/d\end{matrix}\Big|q^2\right]_n;$$

也容易计算有限差分

$$\triangledown \mathrm{A}_k = \frac{(1-q^{3k}a)(1-q^{k-1}d)(1-bc/a)(1-bd/qc)}{(1-b)(1-c)(1-bd/qa)(1-ad/qc)} \times \left[\begin{matrix} b, & qa/bd \\ qa/c, & q^2c/d \end{matrix}\Big| q\right]_k \left[\begin{matrix} c, & ad/qc \\ q^2a/b, & qbd \end{matrix}\Big| q^2\right]_k q^k,$$

$$\triangle \mathrm{B}_k = \frac{(1-q^{1+3k}a)(1-q^k a/c)(1-q^2a/de)(1-ad/qce)}{(1-qa/e)(1-a/ce)(1-q^2a/d)(1-ad/qc)} \times \left[\begin{matrix} d/q, & q^2c/d \\ q^2a/e, & qce/a \end{matrix}\Big| q\right]_k \left[\begin{matrix} e, & qa^2/ce \\ q^4a/d, & qad/c \end{matrix}\Big| q^2\right]_k q^k.$$

那么, 通过修正的 Abel 分部求和引理, 我们可以将 E 级数改写为

$$E_n(a,b,c,d,e) \times \frac{(1-q/d)(1-bc/a)(1-qc/bd)}{(1-b)(1-c)(1-qa/bd)(1-qc/ad)} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{B}_k \triangledown \mathrm{A}_k = \varpi\{\mathcal{R}-1\} + \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{A}_k \triangle \mathrm{B}_k.$$

具体写出上面的部分和

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{A}_k \triangle \mathrm{B}_k = \frac{(1-c/a)(1-q^2a/de)(1-qce/ad)}{(1-qa/e)(1-ce/a)(1-q^2a/d)(1-qc/ad)} \times \sum_{k=0}^{n-1} \{1-q^{1+3k}a\} \left[\begin{matrix} qb, \ d/q, \ q^2a/bd \\ a/c, q^2a/e, qce/a \end{matrix}\Big| q\right]_k \left[\begin{matrix} q^2c, \ e, \ qa^2/ce \\ q^2a/b, q^4a/d, qbd \end{matrix}\Big| q^2\right]_k q^k$$
$$= E_n(qa,qb,q^2c,d/q,e) \frac{(1-c/a)(1-q^2a/de)(1-qce/ad)}{(1-qa/e)(1-ce/a)(1-q^2a/d)(1-qc/ad)},$$

经过化简, 推得下面的关系

$$E_n(a,b,c,d,e) = E_n(qa,qb,q^2c,d/q,e) \frac{(1-b)(1-c)(1-c/a)}{(1-bc/a)(1-ce/a)} \times \frac{(1-qa/bd)(1-qce/ad)(1-q^2a/de)}{(1-q/d)(1-qa/e)(1-qc/bd)(1-q^2a/d)} - a\{1-\mathcal{R}\} \frac{(1-b/a)(1-c/a)(1-qc/d)(1-q/bd)}{(1-q/d)(1-bc/a)(1-qc/bd)}.$$

迭代上述方程 m 次, 得到表达式

$$E_n(a,b,c,d,e) = E_n(q^m a, q^m b, q^{2m}c, d/q^m, e) \left[\begin{matrix} b, c/a, qa/bd \\ q/d, qa/e, ce/a \end{matrix}\Big| q\right]_m \left[\begin{matrix} c, qce/ad, q^2a/de \\ q^2a/d, qc/bd, bc/a \end{matrix}\Big| q^2\right]_m$$
$$- \frac{a\,(1-b/a)(1-c/a)(1-q/bd)}{(1-q/d)(1-bc/a)(1-qc/bd)} \sum_{k=0}^{m-1} \{1-\mathcal{R}(q^k a, q^k b, q^{2k}c, d/q^k, e)\} \times \{1-q^{1+3k}c/d\} \left[\begin{matrix} b, qc/a, qa/bd \\ q^2/d, qa/e, ce/a \end{matrix}\Big| q\right]_k \left[\begin{matrix} c, qce/ad, q^2a/de \\ q^3c/bd, q^2a/d, q^2bc/a \end{matrix}\Big| q^2\right]_k q^k.$$

进一步定义有限和

$$E'_m(a,b,c,d,e) = \sum_{k=0}^{m-1} \{1-q^{1+3k}c/d\} \left[\begin{matrix} b, \ qc/a, qa/bd \\ q^2/d, qa/e, ce/a \end{matrix}\Big| q\right]_k \left[\begin{matrix} c, \ qce/ad, q^2a/de \\ q^3c/bd, q^2a/d, q^2bc/a \end{matrix}\Big| q^2\right]_k q^k, \quad \text{(2a)}$$

它与 E 级数之间存在下述关系:

$$E'_m(a,b,c,d,e)=E_m(\lambda a,b,c,\lambda d,\lambda e), \tag{2b}$$

其中 $\lambda=qc/ad$. 明确写出 $\mathcal{R}$ 函数

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}(q^ka,q^kb,q^{2k}c,d/q^k,e)\\
&\quad=\frac{1-q^{1+n+3k}c/d}{1-q^{1+3k}c/d}\begin{bmatrix}q^kb,q^{-1-k}d,q^{1+k}a/bd\\q^{-k}a/c,q^{1+k}a/e,q^kce/a\end{bmatrix}q\Big]_n\begin{bmatrix}q^{2k}c,e,qa^2/ce\\a/b,bd/q,q^{2+2k}a/d\end{bmatrix}q^2\Big]_n\\
&\quad=\begin{bmatrix}q^nb,q^{1+n}a/bd,qa/e,\ ce/a,\ q^2/d,\ q^{1-n}c/a\\b,\ qa/bd,\ q^{1+n}a/e,q^nce/a,q^{2-n}/d,qc/a\end{bmatrix}q\Big]_k\begin{bmatrix}q^{2n}c,\ q^2a/d\\c,\ q^{2+2n}a/d\end{bmatrix}q^2\Big]_k\\
&\qquad\times\frac{1-q^{1+n+3k}c/d}{1-q^{1+3k}c/d}\begin{bmatrix}b,\ \ d/q,\ qa/bd\\a/c,qa/e,\ ce/a\end{bmatrix}q\Big]_n\begin{bmatrix}c,\ \ e,\ \ qa^2/ce\\a/b,bd/q,\ q^2a/d\end{bmatrix}q^2\Big]_n,
\end{aligned}$$

便得到下述变换公式:

定理 5 (二次级数互补关系)

$$\begin{aligned}
&E_n(a,b,c,d,e)-E_n(q^ma,q^mb,q^{2m}c,d/q^m,e)\begin{bmatrix}b,c/a,qa/bd\\q/d,qa/e,ce/a\end{bmatrix}q\Big]_m\begin{bmatrix}c,q^2a/de,qce/ad\\q^2a/d,qc/bd,bc/a\end{bmatrix}q^2\Big]_m\\
&\quad=\frac{(1-a/b)(1-a/c)(1-q/bd)}{(1-q/d)(1-a/bc)(1-qc/bd)}\Big\{E'_m(a,b,c,d,e)-E'_m(q^{3n}a,q^nb,q^{2n}c,q^nd,q^{2n}e)\\
&\qquad\times\begin{bmatrix}b,d/q,qa/bd\\a/c,qa/e,ce/a\end{bmatrix}q\Big]_n\begin{bmatrix}c,e,qa^2/ce\\a/b,bd/q,q^2a/d\end{bmatrix}q^2\Big]_n\Big\}.
\end{aligned}$$

像定理 1 中一样, 将 m 与 n 互换, 并作参量替换 $a\to\lambda a$, $d\to\lambda d$, $e\to\lambda e$ $(\lambda=qc/ad)$, 得到的关系式仍然是互补的. 下面是定理的一些相应推论.

首先, 在定理 5 中令 $m=n-1$, $b\to a$, $c=q^{2-2n}$, 之后将 n 变为 $n+1$, 我们重新获得下面的求和公式.

推论 6 (文献 [11, 方程 (1.4)] 和 [8, 方程 (4.1d)])

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\frac{1-q^{3k}a}{1-a}\begin{bmatrix}a,\ d,\ q/d\\q^{1+2n}a,qa/e,q^{-2n}e/a\end{bmatrix}q\Big]_k\begin{bmatrix}q^{-2n},e,\ q^{1+2n}a^2/e\\q^2,q^2a/d,\ qad\end{bmatrix}q^2\Big]_kq^k\\
&\quad=\begin{bmatrix}qa\\qa/e\end{bmatrix}q\Big]_{2n}\begin{bmatrix}qad/e,q^2a/de\\qad,\ \ q^2a/d\end{bmatrix}q^2\Big]_n.
\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$, 它的极限情形给出非终止级数恒等式.

推论 7 (文献 [12, 方程 (4.6)])

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-q^{3k}a}{1-a}\frac{[a,d,q/d;q]_k(e;q^2)_k\,(qa/e)^k}{[q^2,q^2a/d,qad;q^2]_k(qa/e;q)_k}q^{\binom{k}{2}}=\begin{bmatrix}qa,q^2a,qad/e,q^2a/de\\qa/e,q^2a/e,q^2a/d,qad\end{bmatrix}q^2\Big]_\infty.$$

其次, 在定理 5 中令 $m=n-1$, $d\to q/b$, $b=q^{1-n}$, 然后将 n 变为 $n+1$, 我们推出下述求和公式:

推论 8 (终止的二次级数求和公式)

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1-q^{3k}a}{1-a}\left[\begin{matrix}a, & q^{-n}, & q^{1+n}\\ qa/c, & qa/e, & ce/a\end{matrix}\Big|q\right]_k\left[\begin{matrix}c, & e, & qa^2/ce\\ q^2, & q^{1-n}a, & q^{2+n}a\end{matrix}\Big|q^2\right]_k q^k$$

$$=\left[\begin{matrix}qa, & c/a\\ qa/e, & ce/a\end{matrix}\Big|q\right]_n\left[\begin{matrix}q^{1-n}a/e, & q^{-n}ce/a\\ q^{1-n}a, & q^{-n}c/a\end{matrix}\Big|q^2\right]_n.$$

最后, 在定理 5 中取 $m=n$, $c=q^{2-2n}$, 可直接获得如下变换公式:

推论 9 (二次级数变换: $\lambda=q^{3-2n}/ad$)

$$E_n(a,b,q^{2-2n},d,e)=\frac{(1-a/b)(1-q^{2n-2}a)(1-q/bd)}{(1-q/d)(1-q^{2n-2}a/b)(1-q^{3-2n}/bd)}E_n(\lambda a,b,q^{2-2n},\lambda d,\lambda e).$$

当 $e=q^2a/d$, 上述等式退化为文献 [10] 中的方程 (5.2).

根据一致收敛级数的 Weierstrass M- 判别法 (见文献 [15, p. 141]), 我们可以计算极限

$$\lim_{m,n\to\infty}E_n(q^ma,q^mb,q^{2m}c,d/q^m,e)={}_3\phi_2\left[\begin{matrix}e,q^2,qa^2/ce\\ qbd,q^2a/b\end{matrix}\Big|q^2;\frac{cd}{a}\right],$$

$$\lim_{m,n\to\infty}E'_m(q^{3n}a,q^nb,q^{2n}c,q^nd,q^{2n}e)={}_3\phi_2\left[\begin{matrix}q^2a/de,q^2,qce/ad\\ q^2bc/a,q^3c/bd\end{matrix}\Big|q^2;\frac{cd}{a}\right].$$

因此, 在定理 5 中令 m, $n\to\infty$, 推出下面的变换公式:

命题 10 (非终止的二次级数变换: $|cd/a|<1$)

$$E(a,b,c,d,e)-E'(a,b,c,d,e)\frac{(1-a/b)(1-a/c)(1-q/bd)}{(1-q/d)(1-a/bc)(1-qc/bd)}$$

$$={}_3\phi_2\left[\begin{matrix}e,q^2,qa^2/ce\\ qbd,q^2a/b\end{matrix}\Big|q^2;\frac{cd}{a}\right]\left[\begin{matrix}b,c/a,qa/bd\\ q/d,qa/e,ce/a\end{matrix}\Big|q\right]_\infty\left[\begin{matrix}c,q^2a/de,qce/ad\\ q^2a/d,qc/bd,bc/a\end{matrix}\Big|q^2\right]_\infty$$

$$+{}_3\phi_2\left[\begin{matrix}q^2a/de,q^2,qce/ad\\ q^2bc/a,q^3c/bd\end{matrix}\Big|q^2;\frac{cd}{a}\right]\left[\begin{matrix}b,d,qa/bd\\ qa/c,qa/e,ce/a\end{matrix}\Big|q\right]_\infty$$

$$\times\left[\begin{matrix}c,e,qa^2/ce\\ q^2a/b,qbd,q^2a/d\end{matrix}\Big|q^2\right]_\infty\frac{c/a}{(1-bc/a)(1-qc/bd)}.$$

利用 q-Kummer-Thomae-Whipple 公式 (见文献 [2, III-10])

$$ {}_3\phi_2\left[\begin{matrix}a,\ c,\ e\\ b,\ d\end{matrix}\Big|q;\frac{bd}{ace}\right]={}_3\phi_2\left[\begin{matrix}b/c, & d/c, & bd/ace\\ & bd/ac, & bd/ce\end{matrix}\Big|q;c\right]\frac{[c,bd/ac,bd/ce;q]_\infty}{[b,d,bd/ace;q]_\infty}, \tag{3}$$

得到关系式

$$ {}_3\phi_2\left[\begin{matrix}e,q^2,qa^2/ce\\ qbd,q^2a/b\end{matrix}\Big|q^2;\frac{cd}{a}\right]=\left[\begin{matrix}q^2,qad/e,cde/a\\ qbd,q^2a/b,cd/a\end{matrix}\Big|q^2\right]_\infty{}_3\phi_2\left[\begin{matrix}bd/q,a/b,cd/a\\ qad/e,cde/a\end{matrix}\Big|q^2;q^2\right],$$

$$ {}_3\phi_2\left[\begin{matrix}q^2a/de,q^2,qce/ad\\ q^2bc/a,q^3c/bd\end{matrix}\Big|q^2;\frac{cd}{a}\right]=\left[\begin{matrix}q^2,qc^2e/a^2,q^2c/e\\ q^2bc/a,q^3c/bd,cd/a\end{matrix}\Big|q^2\right]_\infty{}_3\phi_2\left[\begin{matrix}bc/a,qc/bd,cd/a\\ qc^2e/a^2,q^2c/e\end{matrix}\Big|q^2;q^2\right].$$

据此, 我们可以将命题 10 改写成如下等价形式:

命题 11 (非终止的二次级数变换)

$$E(a,b,c,d,e)-E'(a,b,c,d,e)\frac{(1-a/b)(1-a/c)(1-q/bd)}{(1-q/d)(1-a/bc)(1-qc/bd)}$$
$$=\left[\begin{matrix}q^2,\ c,\ qad/e,cde/a,qce/ad,q^2a/de\\ q^2a/b,q^2a/d,bc/a,cd/a,qc/bd,\ qbd\end{matrix}\Big|q^2\right]_\infty$$
$$\times\left[\begin{matrix}b,\ c/a,qa/bd\\ q/d,qa/e,ce/a\end{matrix}\Big|q\right]_\infty {}_3\phi_2\left[\begin{matrix}bd/q,a/b,cd/a\\ qad/e,cde/a\end{matrix}\Big|q^2;q^2\right]$$
$$+\frac{c}{a}\left[\begin{matrix}q^2,\ c,\ e,\ qa^2/ce,qc^2e/a^2,q^2c/e\\ qbd,q^2a/b,q^2a/d,bc/a,\ cd/a,qc/bd\end{matrix}\Big|q^2\right]_\infty$$
$$\times\left[\begin{matrix}b,\ d,\ qa/bd\\ qa/c,qa/e,ce/a\end{matrix}\Big|q\right]_\infty {}_3\phi_2\left[\begin{matrix}bc/a,qc/bd,cd/a\\ qc^2e/a^2,q^2c/e\end{matrix}\Big|q^2;q^2\right].$$

对于 $b=a$ 和 $c=a$ 两种情形, 此命题分别退化为下面两个已知的变换公式:

推论 12 (文献 [9, 方程 (5.15)] 和 [10, 方程 (5.1)])

$$E(a,a,c,d,e)-\frac{c}{a}\,{}_3\phi_2\left[\begin{matrix}c,\ \ qc/ad,\ \ cd/a\\ qc^2e/a^2,\ q^2c/e\end{matrix}\Big|q^2;q^2\right]$$
$$\times\left[\begin{matrix}a,\ d,\ q/d\\ qa/c,qa/e,ce/a\end{matrix}\Big|q\right]_\infty\left[\begin{matrix}e,\ qa^2/ce,qc^2e/a^2,q^2c/e\\ qad,q^2a/d,\ cd/a,qc/ad\end{matrix}\Big|q^2\right]_\infty$$
$$=\left[\begin{matrix}a,\ c/a\\ qa/e,ce/a\end{matrix}\Big|q\right]_\infty\times\left[\begin{matrix}cde/a,qad/e,qce/ad,q^2a/de\\ cd/a,\ qad,qc/ad,q^2a/d\end{matrix}\Big|q^2\right]_\infty.$$

推论 13 (文献 [12, 方程 (3.12)])

$$E(a,b,a,d,e)=\left[\begin{matrix}a,\ qb,\ qd,q^2a/bd\\ q,\ q^2a/b,q^2a/d,qbd\end{matrix}\Big|q^2\right]_\infty {}_3\phi_2\left[\begin{matrix}b,\ d,\ qa/bd\\ qe,\ q^2a/e\end{matrix}\Big|q^2;q^2\right].$$

2.2 列平衡级数表达式

如果选择不同的差分模式

$$\mathcal{A}_k=\left[\begin{matrix}qb,&qa^2/bce\\ qa/c,&qa/e\end{matrix}\Big|q\right]_k\left[\begin{matrix}q^2c,&q^2e\\ q^2a/b,&q^2bce/a\end{matrix}\Big|q^2\right]_k,$$

$$\mathcal{B}_k=\left[\begin{matrix}d,&qa/bd\\ qce/a,&a^2/bce\end{matrix}\Big|q\right]_k\left[\begin{matrix}qa^2/ce,&q^2bce/a\\ q^2a/d,&qbd\end{matrix}\Big|q^2\right]_k,$$

容易计算关系式

$$\varpi:=\mathcal{A}_{-1}\mathcal{B}_0=a\frac{(1-b/a)(1-c/a)(1-e/a)(1-bce/a)}{(1-b)(1-c)(1-e)(1-bce/a^2)},$$

$$\mathcal{R}:=\frac{\mathcal{A}_{n-1}\mathcal{B}_n}{\mathcal{A}_{-1}\mathcal{B}_0}=\frac{1-q^{2n}bce/a}{1-bce/a}\left[\begin{matrix}b,&d,&qa/bd\\ a/c,&a/e,&qce/a\end{matrix}\Big|q\right]_n\left[\begin{matrix}c,&e,&qa^2/ce\\ a/b,&qbd,&q^2a/d\end{matrix}\Big|q^2\right]_n;$$

和有限差分表达式

$$\triangledown \mathcal{A}_k = \frac{(1-q^{3k}a)(1-q^kce/a)(1-bc/a)(1-be/a)}{(1-b)(1-c)(1-e)(1-bce/a^2)} \times \left[\begin{matrix} b, & a^2/bce \\ qa/c, & qa/e \end{matrix} | q\right]_k \left[\begin{matrix} c, & e \\ q^2a/b, & q^2bce/a \end{matrix} | q^2\right]_k q^k,$$

$$\vartriangle \mathcal{B}_k = \frac{(1-q^{2+3k}a)(1-q^{1+k}b)(1-qce/ad)(1-bcde/a^2)}{(1-qce/a)(1-bce/a^2)(1-q^2a/d)(1-qbd)} \times \left[\begin{matrix} d, & qa/bd \\ q^2ce/a, & qa^2/bce \end{matrix} | q\right]_k \left[\begin{matrix} qa^2/ce, & q^2bce/a \\ q^4a/d, & q^3bd \end{matrix} | q^2\right]_k q^k.$$

根据修正的 Abel 分部求和引理, 级数 E 也可以改写为

$$\begin{aligned} & E_n\,(a,b,c,d,e) \times \frac{(1-bc/a)(1-be/a)(1-ce/a)}{(1-b)(1-c)(1-e)(1-bce/a^2)} \\ & = \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{B}_k \triangledown \mathcal{A}_k = \varpi\{\mathcal{R}-1\} + \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{A}_k \vartriangle \mathcal{B}_k \\ & = \varpi\big\{\mathcal{R}-1\big\} + E_n(q^2a, q^2b, q^2c, d, q^2e) \\ & \quad \times \frac{(1-qb)(1-qce/ad)(1-bcde/a^2)}{(1-qce/a)(1-bce/a^2)(1-q^2a/d)(1-qbd)}. \end{aligned}$$

连结上述首尾两项, 则有函数方程

$$\begin{aligned} E_n(a,b,c,d,e) = {} & E_n(q^2a, q^2b, q^2c, d, q^2e) \frac{(1-b)(1-qb)}{(1-ce/a)(1-qce/a)} \\ & \times \frac{(1-c)(1-e)(1-qce/ad)(1-bcde/a^2)}{(1-bc/a)(1-be/a)(1-qbd)(1-q^2a/d)} \\ & - a\big\{1-\mathcal{R}\big\} \frac{(1-b/a)(1-c/a)(1-e/a)(1-bce/a)}{(1-bc/a)(1-be/a)(1-ce/a)}, \end{aligned}$$

然后迭代此关系 m 次, 得到

$$\begin{aligned} E_n(a,b,c,d,e) = {} & E_n(q^{2m}a, q^{2m}b, q^{2m}c, d, q^{2m}e) \frac{(b;q)_{2m}}{(ce/a;q)_{2m}} \left[\begin{matrix} c,\ e,\ qce/ad, bcde/a^2 \\ bc/a, be/a, qbd, q^2a/d \end{matrix} | q^2\right]_m \\ & - \frac{a\,(1-b/a)(1-c/a)(1-e/a)}{(1-bc/a)(1-be/a)(1-ce/a)} \sum_{k=0}^{m-1} \{1-q^{4k}bce/a\} \frac{(b;q)_{2k}\, q^{2k}}{(qce/a;q)_{2k}} \\ & \times \{1-\mathcal{R}(q^{2k}a, q^{2k}b, q^{2k}c, d, q^{2k}e)\} \left[\begin{matrix} c,\ e,\ qce/ad, bcde/a^2 \\ q^2bc/a, q^2be/a, qbd, q^2a/d \end{matrix} | q^2\right]_k. \end{aligned}$$

定义列平衡部分和

$$\mathcal{E}_m(a,b,c,d,e) = \sum_{k=0}^{m-1} \{1-q^{4k}bce/a\} \frac{(b;q)_{2k}}{(qce/a;q)_{2k}} \left[\begin{matrix} c,\ e,\ qce/ad, bcde/a^2 \\ q^2bc/a, q^2be/a, qbd, q^2a/d \end{matrix} | q^2\right]_k q^{2k}. \tag{4}$$

通过分离 k 次升阶乘, 写出 $\mathcal{R}$ 函数的具体表达式

$$\mathcal{R}(q^{2k}a, q^{2k}b, q^{2k}c, d, q^{2k}e) = \frac{1-q^{2n+4k}bce/a}{1-q^{4k}bce/a}$$

$$\times \left[\begin{matrix} q^{2k}b, & d, & qa/bd \\ a/c, & a/e, & q^{1+2k}ce/a \end{matrix} \Big| q\right]_n \left[\begin{matrix} q^{2k}c, & q^{2k}e, & qa^2/ce \\ a/b, & q^{1+2k}bd, & q^{2+2k}a/d \end{matrix} \Big| q^2\right]_n$$

$$= \frac{1-q^{2n+4k}bce/a}{1-q^{4k}bce/a} \left[\begin{matrix} b,\ d,\ qa/bd \\ a/c, a/e, qce/a \end{matrix} \Big| q\right]_n \left[\begin{matrix} c,\ e,\ qa^2/ce \\ a/b, qbd, q^2a/d \end{matrix} \Big| q^2\right]_n$$

$$\times \left[\begin{matrix} q^n b, qce/a \\ b,\ q^{1+n}ce/a \end{matrix} \Big| q\right]_{2k} \left[\begin{matrix} q^{2n}c, q^{2n}e,\ q^2a/d,\ qbd \\ c,\ e,\ q^{2+2n}a/d, q^{1+2n}bd \end{matrix} \Big| q^2\right]_k,$$

从而建立了关于 E 级数的另一个变换公式.

定理 14 (二次级数与列平衡级数之间的变换)

$$E_n(a,b,c,d,e) - E_n(q^{2m}a, q^{2m}b, q^{2m}c, d, q^{2m}e)\frac{(b;q)_{2m}}{(ce/a;q)_{2m}} \left[\begin{matrix} c,\ e,\ qce/ad, bcde/a^2 \\ bc/a, be/a, qbd, q^2a/d \end{matrix} \Big| q^2\right]_m$$

$$= \frac{e\,(1-b/a)(1-c/a)(1-a/e)}{(1-bc/a)(1-be/a)(1-ce/a)} \Big\{ \mathcal{E}_m(a,b,c,d,e) - \mathcal{E}_m(q^{3n}a, q^n b, q^{2n}c, q^n d, q^{2n}e)$$

$$\times \left[\begin{matrix} b,\ d,\ qa/bd \\ a/c, a/e, qce/a \end{matrix} \Big| q\right]_n \left[\begin{matrix} c,\ e,\ qa^2/ce \\ a/b, q^2a/d, qbd \end{matrix} \Big| q^2\right]_n \Big\}.$$

首先, 在定理 14 中令 $m = n-1$, $e \to a$, $c = q^{2-2n}$, 然后将 n 变为 $n+1$, 推得下面的已知求和公式:

推论 15 (文献 [8, 方程 (5.1d)])

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1-q^{3k}a}{1-a} \left[\begin{matrix} b, & d, & qa/bd \\ q, & q^{2n+1}a, & q^{-2n} \end{matrix} \Big| q\right]_k \left[\begin{matrix} q^{-2n}, & a, & q^{2n+1}a \\ q^2a/b, & q^2a/d, & qbd \end{matrix} \Big| q^2\right]_k q^k$$

$$= \left[\begin{matrix} q^2a, & qb, & qd, & q^2a/bd \\ q, & qbd, & q^2a/b, & q^2a/d \end{matrix} \Big| q^2\right]_n.$$

其次, 在定理 14 中令 $n = 1+\delta+2m$, $c \to a$, $b = q^{-\delta-2m}$ $(\delta = 0, 1)$, 并且注意到 $E_n(a, q^{-\delta}, a, d, e) = (1-\delta)(1-a)$, 我们得到下面的恒等式:

推论 16 (文献 [11, 方程 (6.14)] 和 [8, 方程 (4.2d)])

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1-q^{3k}a}{1-a} \left[\begin{matrix} q^{-n}, & d, & q^{n+1}a/d \\ q, & qa/e, & e \end{matrix} \Big| q\right]_k \left[\begin{matrix} a, & e, & qa/e \\ q^{n+2}a, & q^2a/d, & q^{1-n}d \end{matrix} \Big| q^2\right]_k q^k$$

$$= \begin{cases} \left[\begin{matrix} q, & q^2a, & q^2a/de, & qe/d \\ q/d, & qe, & q^2a/d, & q^2a/e \end{matrix} \Big| q^2\right]_m, & n = 2m; \\ 0, & n = 2m+1. \end{cases}$$

最后, 令 $m = n$, $e = q^{2-2n}$, 我们可以从定理 14 中直接得到下述结果:

推论 17 (二次级数与列平衡级数之间的变换)

$$E_n(a,b,c,d,q^{2-2n}) = \frac{q^{2-2n}\,(1-b/a)(1-c/a)(1-q^{2n-2}a)}{(1-bc/a)(1-q^{2-2n}b/a)(1-q^{2-2n}c/a)} \mathcal{E}_n(a,b,c,d,q^{2-2n}).$$

这里我们指出, 推论 6 中的求和公式也可通过将推论 2 中 Jackson 的公式代入到上述定理中得到.

考虑到下面的极限关系

$$\lim_{m\to\infty} E_n(q^{2m}a, q^{2m}b, q^{2m}c, d, q^{2m}e) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[d, qa/bd; q]_k (qa^2/ce; q^2)_k}{[qa/c, qa/e; q]_k (q^2a/b; q^2)_k} q^k,$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_m(q^{3n}a, q^n b, q^{2n}c, q^n d, q^{2n}e) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{[qce/ad, bcde/a^2; q^2]_k}{[q^2bc/a, q^2be/a; q^2]_k} q^{2k};$$

在定理 14 中令 $m, n \to \infty$, 我们推出一个非终止级数变换.

命题 18 (非终止的二次级数变换)

$$\begin{aligned}
&E(a,b,c,d,e) + \mathcal{E}(a,b,c,d,e)\frac{a\,(1-b/a)(1-c/a)(1-e/a)}{(1-bc/a)(1-be/a)(1-ce/a)}\\
&\quad = \frac{(b;q)_\infty}{(ce/a;q)_\infty}\begin{bmatrix} c,\ e,\ qce/ad, bcde/a^2 \\ bc/a, be/a, qbd,\ q^2a/d \end{bmatrix} q^2 \Big]_\infty \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[d, qa/bd; q]_k (qa^2/ce; q^2)_k}{[qa/c, qa/e; q]_k (q^2a/b; q^2)_k} q^k\\
&\qquad - \frac{bce/a^2}{(1-bc/a)(1-be/a)}\begin{bmatrix} b,\ d,\ qa/bd \\ qa/c, qa/e, ce/a \end{bmatrix} q \Big]_\infty \begin{bmatrix} c,\ e,\ qa^2/ce \\ q^2a/b, q^2a/d, qbd \end{bmatrix} q^2 \Big]_\infty\\
&\qquad \times {}_3\phi_2\left[\begin{matrix} q^2, & qce/ad, & bcde/a^2 \\ & q^2bc/a, & q^2be/a \end{matrix} \,\Big|\, q^2; q^2\right].
\end{aligned}$$

3 三次级数的变换及求和公式

本节研究三次级数部分和

$$F_n(a,b,c,d) = \sum_{k=0}^{n-1}\{1-q^{4k}a\}\begin{bmatrix} b,\ qa/bc \\ qa/d, cd/a \end{bmatrix} q\Big]_k \frac{(c;q)_{2k}}{(qa/c;q)_{2k}}\begin{bmatrix} d,\ qa^2/cd \\ q^3a/b, q^2bc \end{bmatrix} q^3\Big]_k q^k.$$

3.1 互补关系式

对于两个给定的序列

$$\mathrm{A}_k = \begin{bmatrix} qb, & q^2a/bc \\ qa/d, & q^2d/c \end{bmatrix} q\Big]_k \begin{bmatrix} q^3d, & q^2ac/d \\ q^3a/b, & q^2bc \end{bmatrix} q^3\Big]_k,$$

$$\mathrm{B}_k = \begin{bmatrix} c/q, & c \\ q^2a/c, & qa/c \end{bmatrix} q^2\Big]_k \begin{bmatrix} q^2d/c \\ cd/a \end{bmatrix} q\Big]_k \begin{bmatrix} qa^2/cd \\ ac/qd \end{bmatrix} q^3\Big]_k;$$

不难计算下述关系:

$$\varpi := \mathrm{A}_{-1}\mathrm{B}_0 = a\frac{(1-b/a)(1-d/a)(1-qd/c)(1-q/bc)}{(1-b)(1-d)(1-qa/bc)(1-qd/ac)},$$

$$\mathcal{R} := \frac{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_n}{\mathrm{A}_{-1}\mathrm{B}_0} = \frac{1-q^{1+n}d/c}{1-qd/c}\begin{bmatrix} b, & qa/bc \\ a/d, & cd/a \end{bmatrix} q\Big]_n \frac{(c/q;q)_{2n}}{(qa/c;q)_{2n}}\begin{bmatrix} d, & qa^2/cd \\ a/b, & bc/q \end{bmatrix} q^3\Big]_n;$$

和有限差分表达式

$$\begin{aligned}
\triangledown \mathrm{A}_k &= \frac{(1-q^{2k-1}c)(1-q^{4k}a)(1-bd/a)(1-bc/qd)}{(1-b)(1-d)(1-bc/qa)(1-ac/qd)}\\
&\quad \times \begin{bmatrix} b, & qa/bc \\ qa/d, & q^2d/c \end{bmatrix} q\Big]_k \begin{bmatrix} d, & ac/qd \\ q^3a/b, & q^2bc \end{bmatrix} q^3\Big]_k q^k,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\triangle \mathrm{B}_k = & \frac{(1-q^{k-1}a/d)(1-q^k a/d)(1-q^{1+4k}a)(1-q^2a/c^2)}{(1-qa/c)(1-q^2a/c)(1-a/cd)(1-ac/qd)} \\
& \times \begin{bmatrix} c/q, & c \\ q^4a/c, & q^3a/c \end{bmatrix} q^2 \Big]_k \begin{bmatrix} q^2d/c \\ qcd/a \end{bmatrix} q \Big]_k \begin{bmatrix} qa^2/cd \\ q^2ac/d \end{bmatrix} q^3 \Big]_k q^k.
\end{aligned}
$$

根据修正的 Abel 分部求和引理, 级数 F 可以写成

$$
\begin{aligned}
& F_n(a,b,c,d) \times \frac{(1-q/c)(1-bd/a)(1-qd/bc)}{(1-b)(1-d)(1-qa/bc)(1-qd/ac)} \\
& = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{B}_k \bigtriangledown \mathrm{A}_k = \varpi\{\mathcal{R}-1\} + \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{A}_k \triangle \mathrm{B}_k \\
& = \varpi\{\mathcal{R}-1\} + F_n(qa,qb,c/q,q^3d)\frac{(1-d/a)(1-qd/a)(1-q^2a/c^2)}{(1-qa/c)(1-q^2a/c)(1-cd/a)(1-qd/ac)}.
\end{aligned}
$$

由此便有函数方程

$$
\begin{aligned}
F_n(a,b,c,d) = & F_n(qa,qb,c/q,q^3d)\frac{(d/a;q)_2}{(qa/c;q)_2}\frac{(1-b)(1-d)(1-qa/bc)(1-q^2a/c^2)}{(1-q/c)(1-bd/a)(1-cd/a)(1-qd/bc)} \\
& - a\{1-\mathcal{R}(a,b,c,d)\}\frac{(1-b/a)(1-d/a)(1-qd/c)(1-q/bc)}{(1-q/c)(1-bd/a)(1-qd/bc)},
\end{aligned}
$$

然后将其迭代 m 次, 得到表达式

$$
\begin{aligned}
F_n(a,b,c,d) = & F_n(q^m a,q^m b,c/q^m,q^{3m}d)\frac{(d/a;q)_{2m}}{(qa/c;q)_{2m}} \begin{bmatrix} b,\ qa/bc \\ q/c,cd/a \end{bmatrix} q \Big]_m \begin{bmatrix} d,\ q^2a/c^2 \\ bd/a,qd/bc \end{bmatrix} q^3 \Big]_m \\
& - \frac{a\,(1-b/a)(1-d/a)(1-q/bc)}{(1-q/c)(1-bd/a)(1-qd/bc)} \sum_{k=0}^{m-1} \{1-q^{1+4k}d/c\}\frac{(qd/a;q)_{2k}}{(qa/c;q)_{2k}} q^k \\
& \times \{1-\mathcal{R}(q^k a,q^k b,c/q^k,q^{3k}d)\} \begin{bmatrix} b,\ qa/bc \\ q^2/c,cd/a \end{bmatrix} q \Big]_k \begin{bmatrix} d,\ q^2a/c^2 \\ q^4d/bc,q^3bd/a \end{bmatrix} q^3 \Big]_k.
\end{aligned}
$$

进一步定义有限和

$$
F'_m(a,b,c,d) = \sum_{k=0}^{m-1} \{1-q^{1+4k}d/c\}\frac{(qd/a;q)_{2k}}{(qa/c;q)_{2k}} q^k \begin{bmatrix} b,\ qa/bc \\ q^2/c,cd/a \end{bmatrix} q \Big]_k \begin{bmatrix} d,\ q^2a/c^2 \\ q^4d/bc,q^3bd/a \end{bmatrix} q^3 \Big]_k, \tag{5a}
$$

它与 F 级数存在关系

$$
F'_m(a,b,c,d) = F_m(\lambda a,b,\lambda c,d), \tag{5b}
$$

其中 $\lambda = qd/ac$. 注意到 $\mathcal{R}$ 函数可具体写为

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{R}(q^k a,q^k b,c/q^k,q^{3k}d) \\
& = \frac{1-q^{1+n+4k}d/c}{1-q^{1+4k}d/c} \begin{bmatrix} q^k b,\ q^{1+k}a/bc \\ q^{-2k}a/d,q^k cd/a \end{bmatrix} q \Big]_n \frac{(q^{-1-k}c;q)_{2n}}{(q^{1+2k}a/c;q)_{2n}} \begin{bmatrix} q^{3k}d,qa^2/cd \\ a/b,\ bc/q \end{bmatrix} q^3 \Big]_n \\
& = \frac{(q^{3n}d;q^3)_k}{(d;q^3)_k} \begin{bmatrix} q^n b,q^{1+n}a/bc,cd/a,\ q^2/c \\ b,\ qa/bc,q^n cd/a,q^{2-2n}/c \end{bmatrix} q \Big]_k \begin{bmatrix} qa/c,q^{1-n}d/a \\ q^{1+2n}a/c,qd/a \end{bmatrix} q \Big]_{2k} \\
& \quad \times \frac{1-q^{1+n+4k}d/c}{1-q^{1+4k}d/c} \begin{bmatrix} b,\ qa/bc \\ a/d,\ cd/a \end{bmatrix} q \Big]_n \frac{(c/q;q)_{2n}}{(qa/c;q)_{2n}} \begin{bmatrix} d,\ qa^2/cd \\ a/b,\ bc/q \end{bmatrix} q^3 \Big]_n,
\end{aligned}
$$

我们推得下面的变换公式:

定理 19 (三次级数互补关系)

$$F_n(a,b,c,d)-F_n(q^m a,q^m b,c/q^m,q^{3m}d)\frac{(d/a;q)_{2m}}{(qa/c;q)_{2m}}\left[\begin{matrix}b,\ qa/bc\\ q/c,cd/a\end{matrix}\Big|q\right]_m\left[\begin{matrix}d,\ q^2a/c^2\\ bd/a,qd/bc\end{matrix}\Big|q^3\right]_m$$

$$=\frac{(1-a/b)(1-a/d)(1-q/bc)}{(1-q/c)(1-a/bd)(1-qd/bc)}\Big\{F'_m(a,b,c,d)-F'_m(q^{4n}a,q^n b,q^{2n}c,q^{3n}d)$$

$$\times\frac{(c/q;q)_{2n}}{(qa/c;q)_{2n}}\left[\begin{matrix}b,\ qa/bc\\ a/d,cd/a\end{matrix}\Big|q\right]_n\left[\begin{matrix}d,\ qa^2/cd\\ a/b,bc/q\end{matrix}\Big|q^3\right]_n\Big\}.$$

这一定理包含下述 3 个重要特例.

首先, 在定理 19 中令 $m=n-1$, $b\to a$, $d=q^{3-3n}$, 然后将 n 换为 $n+1$, 我们重新获得下述已知的求和公式:

推论 20 (文献 [16, 方程 (5.4b)])

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1-q^{4k}a}{1-a}\left[\begin{matrix}a, & q/c\\ q^{1+3n}a, & q^{-3n}c/a\end{matrix}\Big|q\right]_k\frac{(c;q)_{2k}}{(qa/c;q)_{2k}}\left[\begin{matrix}q^{-3n}, & q^{1+3n}a^2/c\\ q^3, & q^2ac\end{matrix}\Big|q^3\right]_k q^k$$

$$=\left[\begin{matrix}q^2a/c^2\\ q^2ac\end{matrix}\Big|q^3\right]_n\left[\begin{matrix}qa\\ qa/c\end{matrix}\Big|q\right]_{3n}.$$

其次, 在定理 19 中令 $m=n-1$, $c\to q/b$, $b=q^{1-n}$, 并将 n 换为 $n+1$, 我们得到另一个恒等式.

推论 21 (终止的三次级数求和公式)

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1-q^{4k}a}{1-a}\left[\begin{matrix}q^{-n}, & a\\ qa/d, & q^{n+1}d/a\end{matrix}\Big|q\right]_k\frac{(q^{n+1};q)_{2k}}{(q^{-n}a;q)_{2k}}\left[\begin{matrix}d, & q^{-n}a^2/d\\ q^3, & q^{n+3}a\end{matrix}\Big|q^3\right]_k q^k$$

$$=\left[\begin{matrix}d/a\\ q^{-n}a\end{matrix}\Big|q\right]_{2n}\left[\begin{matrix}qa\\ q^{n+1}d/a\end{matrix}\Big|q\right]_n\left[\begin{matrix}q^{-2n}a\\ q^{-n}d/a\end{matrix}\Big|q^3\right]_n.$$

最后, 在定理 19 中令 $m=n$, $d=q^{3-3n}$ 直接获得变换公式.

推论 22 (三次级数变换: $\lambda=q^{4-3n}/ac$)

$$F_n(a,b,c,q^{3-3n})=\frac{(1-a/b)(1-q^{3n-3}a)(1-q/bc)}{(1-q/c)(1-q^{3n-3}a/b)(1-q^{4-3n}/bc)}F_n(\lambda a,b,\lambda c,q^{3-3n}).$$

当 $a=c^2/q^2$ 时, 上述等式退化为文献 [10] 中的方程 (3.1).

应用一致收敛级数的 Weierstrass M- 判别法并结合 Jackson 的 ${}_2\phi_2$- 级数变换 (见文献 [2, III-4])

$${}_2\phi_2\left[\begin{matrix}a,\ c\\ b,\ d\end{matrix}\Big|q;bd/ac\right]=\frac{(d/a;q)_\infty}{(d;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a,\ b/c\\ b\end{matrix}\Big|q;d/a\right] \tag{6}$$

以及 Heine 的 q-Euler 变换 (见文献 [2, III-1])

$${}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a,\ b\\ c\end{matrix}\Big|q;z\right]=\frac{[b,az;q]_\infty}{[c,z;q]_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}c/b,\ z\\ az\end{matrix}\Big|q;b\right], \tag{7}$$

可以求得极限关系

$$\lim_{m,n\to\infty} F_n(q^m a, q^m b, c/q^m, q^{3m}d) = {}_2\phi_2\left[\begin{matrix} q^3, & qa^2/cd \\ q^2bc, & q^3a/b \end{matrix} \Big| q^3; \frac{qc^2d}{a}\right]$$

$$= \left[\begin{matrix} q^3, & qc^2d/a \\ q^2bc, & q^3a/b \end{matrix} \Big| q^3\right]_\infty {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} a/b, & bc/q \\ & qc^2d/a \end{matrix} \Big| q^3; q^3\right],$$

$$\lim_{m,n\to\infty} F'_m(q^{4n}a, q^n b, q^{2n}c, q^{3n}d) = {}_2\phi_2\left[\begin{matrix} q^3, & q^2a/c^2 \\ q^4d/bc, & q^3bd/a \end{matrix} \Big| q^3; \frac{q^2cd^2}{a^2}\right]$$

$$= \left[\begin{matrix} q^3, & q^2cd^2/a^2 \\ q^3bd/a, & q^4d/bc \end{matrix} \Big| q^3\right]_\infty {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} qd/bc, & bd/a \\ & q^2cd^2/a^2 \end{matrix} \Big| q^3; q^3\right].$$

最后, 在定理 19 中令 $m, n \to \infty$, 推出下述非终止级数关系:

命题 23 (非终止的三次级数变换)

$$F(a,b,c,d) - F'(a,b,c,d)\frac{(1-a/b)(1-a/d)(1-q/bc)}{(1-q/c)(1-a/bd)(1-qd/bc)}$$

$$= \left[\begin{matrix} b, qa/bc, d/a \\ q/c, cd/a, qa/c \end{matrix} \Big| q\right]_\infty \left[\begin{matrix} q^3, d, q^2a/c^2, qc^2d/a \\ q^3a/b, bd/a, q^2bc, qd/bc \end{matrix} \Big| q^3\right]_\infty {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} a/b, bc/q \\ qc^2d/a \end{matrix} \Big| q^3; q^3\right]$$

$$+ \frac{d}{a}\left[\begin{matrix} b, c, qa/bc \\ qa/c, qa/d, cd/a \end{matrix} \Big| q\right]_\infty \left[\begin{matrix} q^3, d, qa^2/cd, q^2cd^2/a^2 \\ q^3a/b, bd/a, q^2bc, qd/bc \end{matrix} \Big| q^3\right]_\infty {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} qd/bc, bd/a \\ q^2cd^2/a^2 \end{matrix} \Big| q^3; q^3\right].$$

考虑 $b = a$ 和 $d = a$ 两种情形, 此命题分别退化为下面两个结果:

推论 24 (文献 [9, 方程 (5.22)] 和 [10, 方程 (1.2)])

$$F(a,a,c,d) - \left[\begin{matrix} a, d/a \\ cd/a, qa/c \end{matrix} \Big| q\right]_\infty \left[\begin{matrix} q^2a/c^2, qc^2d/a \\ q^2ac, qd/ac \end{matrix} \Big| q^3\right]_\infty$$

$$= \frac{d}{a}\,{}_2\phi_1\left[\begin{matrix} d, qd/ac \\ q^2cd^2/a^2 \end{matrix} \Big| q^3; q^3\right] \left[\begin{matrix} a, c, q/c \\ qa/c, qa/d, cd/a \end{matrix} \Big| q\right]_\infty \left[\begin{matrix} qa^2/cd, q^2cd^2/a^2 \\ q^2ac, qd/ac \end{matrix} \Big| q^3\right]_\infty.$$

推论 25 (非终止的三次级数退化公式)

$$F(a,b,c,a) = \left[\begin{matrix} qb, q^2b, q^2a/bc, q^3a/bc, a, q^2c \\ q, q^2, q^2a/c, q^3a/c, q^3a/b, q^2bc \end{matrix} \Big| q^3\right]_\infty {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} qa/bc, & b \\ & q^2c \end{matrix} \Big| q^3; q^3\right].$$

3.2 列平衡级数表达式

定义另两个序列

$$\mathcal{A}_k = \left[\begin{matrix} q^2c, & q^3c \\ qa/c, & q^2a/c \end{matrix} \Big| q^2\right]_k \left[\begin{matrix} a^2/c^2d \\ qa/d \end{matrix} \Big| q\right]_k \left[\begin{matrix} q^3d \\ q^4c^2d/a \end{matrix} \Big| q^3\right]_k,$$

$$\mathcal{B}_k = \left[\begin{matrix} b, & qa/bc \\ q^2cd/a, & a^2/qc^2d \end{matrix} \Big| q\right]_k \left[\begin{matrix} qa^2/cd, & q^4c^2d/a \\ q^3a/b, & q^2bc \end{matrix} \Big| q^3\right]_k.$$

不难证明它们满足这样的关系

$$\varpi := \mathcal{A}_{-1}\mathcal{B}_0 = a\frac{(1-c/a)(1-qc/a)(1-d/a)(1-qc^2d/a)}{(1-c)(1-qc)(1-d)(1-qc^2d/a^2)},$$

$$\mathcal{R} := \frac{\mathcal{A}_{n-1}\mathcal{B}_n}{\mathcal{A}_{-1}\mathcal{B}_0} = \frac{1-q^{1+3n}c^2d/a}{1-qc^2d/a}\left[\begin{matrix} b, & qa/bc \\ a/d, & q^2cd/a \end{matrix}\Big| q\right]_n \frac{(c;q)_{2n}}{(a/qc;q)_{2n}}\left[\begin{matrix} d, qa^2/cd \\ q^3a/b, q^2bc \end{matrix}\Big| q^3\right]_n;$$

以及有限差分表达式

$$\triangledown\mathcal{A}_k = \frac{(1-q^kcd/a)(1-q^{1+k}cd/a)(1-q^{4k}a)(1-qc^2/a)}{(1-c)(1-qc)(1-d)(1-qc^2d/a^2)}$$
$$\times\left[\begin{matrix} c, & qc \\ qa/c, & q^2a/c \end{matrix}\Big| q^2\right]_k \left[\begin{matrix} a^2/qc^2d \\ qa/d \end{matrix}\Big| q\right]_k \left[\begin{matrix} d \\ q^4c^2d/a \end{matrix}\Big| q^3\right]_k q^k,$$

$$\vartriangle\mathcal{B}_k = \frac{(1-q^{3+4k}a)(1-q^{2+2k}c)(1-q^2cd/ab)(1-qbc^2d/a^2)}{(1-q^2cd/a)(1-qc^2d/a^2)(1-q^3a/b)(1-q^2bc)}$$
$$\times\left[\begin{matrix} b, & qa/bc \\ q^3cd/a, & a^2/c^2d \end{matrix}\Big| q\right]_k \left[\begin{matrix} qa^2/cd, & q^4c^2d/a \\ q^6a/b, & q^5bc \end{matrix}\Big| q^3\right]_k q^k.$$

那么利用修正的 Abel 分部求和引理改写 F 级数

$$F_n(a,b,c,d)\times\frac{(1-cd/a)(1-qcd/a)(1-qc^2/a)}{(1-c)(1-qc)(1-d)(1-qc^2d/a^2)}$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{B}_k\triangledown\mathcal{A}_k = \varpi\big\{\mathcal{R}-1\big\}+\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{A}_k\vartriangle\mathcal{B}_k$$
$$=\varpi\big\{\mathcal{R}-1\big\}+F_n(q^3a,b,q^3c,q^3d)\frac{(1-q^2c)(1-q^2cd/ab)(1-qbc^2d/a^2)}{(1-q^2cd/a)(1-qc^2d/a^2)(1-q^3a/b)(1-q^2bc)}.$$

便给出函数方程

$$F_n(a,b,c,d) = F_n(q^3a,b,q^3c,q^3d)\frac{(c;q)_3}{(cd/a;q)_3}\frac{(1-d)(1-qbc^2d/a^2)(1-q^2cd/ab)}{(1-qc^2/a)(1-q^2bc)(1-q^3a/b)}$$
$$+\{1-\mathcal{R}(a,b,c,d)\}\frac{(1-a/c)(1-qc/a)(1-a/d)(1-qc^2d/a)}{(1-a/cd)(1-qcd/a)(1-qc^2/a)}.$$

然后迭代上式 m 次, 得到

$$F_n(a,b,c,d) = F_n(q^{3m}a,b,q^{3m}c,q^{3m}d)\frac{(c;q)_{3m}}{(cd/a;q)_{3m}}\left[\begin{matrix} d, & qbc^2d/a^2, q^2cd/ab \\ qc^2/a, & q^2bc, \ q^3a/b \end{matrix}\Big| q^3\right]_m$$
$$+\frac{(a/qc;q)_2(1-d/a)}{(cd/a;q)_2(1-a/qc^2)}\sum_{k=0}^{m-1}\Big\{1-q^{1+6k}c^2d/a\Big\}\frac{(c;q)_{3k}}{(q^2cd/a;q)_{3k}}q^{3k}$$
$$\times\left[\begin{matrix} d, & qbc^2d/a^2, q^2cd/ab \\ q^4c^2/a, & q^3a/b, \ q^2bc \end{matrix}\Big| q^3\right]_k\{1-\mathcal{R}(q^{3k}a,b,q^{3k}c,q^{3k}d)\}.$$

定义列平衡部分和

$$\mathcal{F}_m(a,b,c,d) = \sum_{k=0}^{m-1}\{1-q^{1+6k}c^2d/a\}\frac{(c;q)_{3k}}{(q^2cd/a;q)_{3k}}\left[\begin{matrix} d, qbc^2d/a^2, q^2cd/ab \\ q^4c^2/a, \ q^3a/b, \ q^2bc \end{matrix}\Big| q^3\right]_k q^{3k}, \tag{8}$$

然后通过分离 k 次升阶乘来改写 $\mathcal{R}$ 函数

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}(q^{3k}a,b,q^{3k}c,q^{3k}d)\\
&\quad=\frac{1-q^{1+3n+6k}c^2d/a}{1-q^{1+6k}c^2d/a}\left[\begin{matrix}b, & qa/bc\\ a/d, & q^{2+3k}cd/a\end{matrix}\Big|q\right]_n\frac{(q^{3k}c;q)_{2n}}{(a/qc;q)_{2n}}\left[\begin{matrix}q^{3k}d, & qa^2/cd\\ q^{3+3k}a/b, & q^{2+3k}bc\end{matrix}\Big|q^3\right]_n\\
&\quad=\frac{1-q^{1+3n+6k}c^2d/a}{1-q^{1+6k}c^2d/a}\left[\begin{matrix}b, & qa/bc\\ a/d, & q^{2}cd/a\end{matrix}\Big|q\right]_n\frac{(c;q)_{2n}}{(a/qc;q)_{2n}}\left[\begin{matrix}d, & qa^2/cd\\ q^{3}a/b, & q^{2}bc\end{matrix}\Big|q^3\right]_n\\
&\qquad\times\left[\begin{matrix}q^2cd/a, & q^{2n}c\\ q^{2+n}cd/a, & c\end{matrix}\Big|q\right]_{3k}\left[\begin{matrix}q^{3n}d, & q^3a/b, & q^2bc\\ d, & q^{3+3n}a/b, & q^{2+3n}bc\end{matrix}\Big|q^3\right]_k.
\end{aligned}$$

我们建立关于 F 级数的另一个变换.

定理 26 (三次级数与列平衡级数之间的变换)

$$\begin{aligned}
&F_n(a,b,c,d)-F_n(q^{3m}a,b,q^{3m}c,q^{3m}d)\frac{(c;q)_{3m}}{(cd/a;q)_{3m}}\left[\begin{matrix}d, & qbc^2d/a^2, & q^2cd/ab\\ qc^2/a, & q^3a/b, & q^2bc\end{matrix}\Big|q^3\right]_m\\
&\quad=\frac{(a/qc;q)_2(1-d/a)}{(cd/a;q)_2(1-a/qc^2)}\Bigg\{\mathcal{F}_m(a,b,c,d)-\mathcal{F}_m(q^{4n}a,q^nb,q^{2n}c,q^{3n}d)\\
&\qquad\qquad\times\left[\begin{matrix}b, & qa/bc\\ a/d, & q^2cd/a\end{matrix}\Big|q\right]_n\frac{(c;q)_{2n}}{(a/qc;q)_{2n}}\left[\begin{matrix}d, & qa^2/cd\\ q^3a/b, & q^2bc\end{matrix}\Big|q^3\right]_n\Bigg\}.
\end{aligned}$$

首先, 在定理 26 中令 $m=n-1$, $c\to a$, $d=q^{3-3n}$, 并将 n 换成 $n+1$, 我们重新发现下面的恒等式:

推论 27 (文献 [10, 方程 (3.7)]

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\frac{1-q^{4k}a}{1-a}\left[\begin{matrix}b, & q/b\\ q^{1+3n}a, & q^{-3n}\end{matrix}\Big|q\right]_k\frac{(a;q)_{2k}}{(q;q)_{2k}}\left[\begin{matrix}q^{-3n}, & q^{1+3n}a\\ q^3a/b, & q^2ab\end{matrix}\Big|q^3\right]_k q^k\\
&\quad=\left[\begin{matrix}qb, & q^2/b, & q^2a, & q^3a\\ q, & q^2, & q^2ab, & q^3a/b\end{matrix}\Big|q^3\right]_n.
\end{aligned}$$

其次, 在定理 26 中令 $m=n-1$, $c\to a/q$, $d=q^{3-3n}$, 将 n 换成 $n+1$, 推得另外一个形式相似的求和公式.

推论 28 (终止的三次级数求和公式)

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\frac{1-q^{4k}a}{1-a}\left[\begin{matrix}b, & q^2/b\\ q^{1+3n}a, & q^{-1-3n}\end{matrix}\Big|q\right]_k\frac{(a/q;q)_{2k}}{(q^2;q)_{2k}}\left[\begin{matrix}q^{-3n}, & q^{2+3n}a\\ q^3a/b, & qab\end{matrix}\Big|q^3\right]_k q^k\\
&\quad=\left[\begin{matrix}q^2b, & q^4/b, & qa, & q^3a\\ q^2, & q^4, & qab, & q^3a/b\end{matrix}\Big|q^3\right]_n.
\end{aligned}$$

最后, 在定理 26 中选择 $n\to\varepsilon+3n$, $m\to n$, $d\to a$ 及 $c\to q^{-\varepsilon-3n}$ ($\varepsilon=0,1$ 或 2), 我们可以计算下面的特殊值

$$F_{\varepsilon+3n}(a,b,q^{-\varepsilon},a)=\begin{cases}1-a, & \varepsilon=0,\ 1;\\ 0, & \varepsilon=2.\end{cases}$$

据此可得下面这个有趣的恒等式:

推论 29 (终止的三次级数求和公式) 对于自然数 $n=3m+\varepsilon$ ($\varepsilon=0,1$ 或 2), 存在求和公式

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n/2}\frac{1-q^{4k}a}{1-a}\begin{bmatrix}b,\ q^{1+n}a/b\\ q,\quad q^{-n}\end{bmatrix}q\bigg]_k\frac{(q^{-n};q)_{2k}}{(q^{1+n}a;q)_{2k}}\begin{bmatrix}a,\quad q^{1+n}a\\ q^3a/b,\ q^{2-n}b\end{bmatrix}q^3\bigg]_k q^k$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(q^{2+2\varepsilon}a/b;q^3)_{2m}}{b^m(q^{2+2\varepsilon}a;q^3)_{2m}}\begin{bmatrix}q^3a,\quad q^{2+2\varepsilon}a,\quad q^{1+\varepsilon}b\\ q^3a/b,\ q^{2+2\varepsilon}a/b,\ q^{1+\varepsilon}/b\end{bmatrix}q^3\bigg]_m, & \varepsilon=0,\ 1;\\ 0, & \varepsilon=2.\end{cases}$$

除此之外, 在定理 26 中令 $m=n,\ d=q^{3-3n}$ 直接导致下面的变换公式:

推论 30 (三次级数与列平衡级数之间的变换)

$$F_n(a,b,c,q^{3-3n})=\frac{(a/qc;q)_2(1-q^{3-3n}/a)}{(q^{3-3n}c/a;q)_2(1-a/qc^2)}\mathcal{F}_n(a,b,c,q^{3-3n}).$$

考虑极限关系

$$\lim_{m\to\infty}F_n(q^{3m}a,b,q^{3m}c,q^{3m}d)\ =\ \sum_{k=0}^{n-1}\frac{[b,qa/bc;q]_k(qa^2/cd;q^3)_k}{(qa/d;q)_k(qa/c;q)_{2k}}q^k,$$

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{F}_m(q^{4n}a,q^nb,q^{2n}c,q^{3n}d)\ =\ \sum_{k=0}^{m-1}\frac{[qbc^2d/a^2,q^2cd/ab;q^3]_k}{(q^4c^2/a;q^3)_k}q^{3k};$$

我们可将定理 26 在 $m,n\to\infty$ 时的极限情形表达为下述非终止级数变换公式:

命题 31 (非终止的三次级数变换)

$$F(a,b,c,d)\ -\ \mathcal{F}(a,b,c,d)\frac{(1-a/c)(1-qc/a)(1-a/d)}{(1-a/cd)(1-qcd/a)(1-qc^2/a)}$$

$$=\frac{(c;q)_\infty}{(cd/a;q)_\infty}\begin{bmatrix}d,\ qbc^2d/a^2,q^2cd/ab\\ qc^2/a,q^3a/b,\ q^2bc\end{bmatrix}q^3\bigg]_\infty\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[b,qa/bc;q]_k(qa^2/cd;q^3)_k}{[qa/d;q]_k(qa/c;q)_{2k}}q^k$$

$$+\frac{d/a}{1-a/qc^2}\begin{bmatrix}b,\ c,\ qa/bc\\ qa/c,qa/d,cd/a\end{bmatrix}q\bigg]_\infty\begin{bmatrix}d,\ qa^2/cd\\ q^3a/b,q^2bc\end{bmatrix}q^3\bigg]_\infty\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[qbc^2d/a^2,q^2cd/ab;q^3]_k}{(q^4c^2/a;q^3)_k}q^{3k}.$$

4 四次级数的变换及求和公式

这一节研究下述四次级数部分和:

$$G_n(a,c,e)=\sum_{k=0}^{n-1}\{1-q^{5k}a\}\begin{bmatrix}a/c,c/e\\ q^3e^2/a\end{bmatrix}q\bigg]_k\frac{(qe;q)_{3k}}{[a/qe,a/e,qa/e;q^2]_k}\begin{bmatrix}a^2/q^2e^2\\ q^4c,q^4ae/c\end{bmatrix}q^4\bigg]_k q^k.$$

4.1 互补关系式

对于两个给定的序列

$$\mathrm{A}_k=\begin{bmatrix}qa/c,\ qc/e\\ q^3e^2/a,a^2/qe^3\end{bmatrix}q\bigg]_k\begin{bmatrix}q^2a^2/e^2,q^6e^3/a\\ q^4c,\ q^4ae/c\end{bmatrix}q^4\bigg]_k,$$

$$\mathrm{B}_k=\frac{(e;q)_{3k}(a^2/qe^3;q)_k}{(q^2e^3/a;q^4)_k[a/qe,a/e,qa/e;q^2]_k};$$

不难验证它们有这样的相应关系

$$\varpi := \mathrm{A}_{-1}\mathrm{B}_0 = \frac{(1-c)(1-c/ae)(1-q^2e^2/a)(1-q^2e^3/a^2)}{(1-c/a)(1-c/e)(1-q^2e^2/a^2)(1-q^2e^3/a)},$$

$$\mathfrak{R} := \frac{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_n}{\mathrm{A}_{-1}\mathrm{B}_0} = \frac{1-q^{n-2}a^2/e^3}{1-q^{-2}a^2/e^3}\begin{bmatrix}a/c, c/e \\ q^2e^2/a\end{bmatrix}_n\!\!\!\!|q \begin{bmatrix}a^2/q^2e^2 \\ c, ae/c\end{bmatrix}_n\!\!\!\!|q^4 \frac{(e;q)_{3n}}{[a/qe, a/e, qa/e; q^2]_n};$$

和有限差分表达式

$$\begin{aligned}\triangledown\mathrm{A}_k &= \frac{(1-q^{3k}e)(1-q^{5k}a)(1-ac/q^2e^3)(1-q^2ce^2/a^2)}{(1-c/a)(1-c/e)(1-a^2/q^2e^2)(1-q^2e^3/a)} \\ &\quad\times\begin{bmatrix}a/c,\ c/e \\ q^3e^2/a, a^2/qe^3\end{bmatrix}_k\!\!\!\!|q \begin{bmatrix}a^2/q^2e^2, q^2e^3/a \\ q^4c,\ q^4ae/c\end{bmatrix}_k\!\!\!\!|q^4 q^k, \\ \triangle\mathrm{B}_k &= \frac{(1-q^ke^2/a)(1-q^{1+k}e^2/a)(1-q^{2+k}e^2/a)(1-q^{1+5k}a)}{(qe^3/a^2)(1-a/qe)(1-a/e)(1-qa/e)(1-q^2e^3/a)} \\ &\quad\times\frac{(e;q)_{3k}(a^2/qe^3;q)_k}{(q^6e^3/a;q^4)_k[qa/e, q^2a/e, q^3a/e; q^2]_k}q^k.\end{aligned}$$

然后根据修正的 Abel 分部求和引理, 对级数 G 进行如下处理:

$$\begin{aligned}&G_n(a,c,e)\frac{(1-1/e)(1-a^2/q^2ce^2)(1-ac/q^2e^3)}{(1-a/c)(1-c/e)(1-a^2/q^2e^2)(1-a/q^2e^3)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{B}_k\triangledown\mathrm{A}_k = \varpi\{\mathfrak{R}-1\} + \sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{A}_k\triangle\mathrm{B}_k \\ &= \varpi\{\mathfrak{R}-1\} + G_n(qa,c,e/q)\frac{(a/q^2e^2;q)_3}{(a/qe;q)_3(1-a/q^2e^3)}.\end{aligned}$$

重写上述等式

$$\begin{aligned}G_n(a,c,e) &= G_n(qa,c,e/q)\frac{(a/q^2e^2;q)_3}{(a/qe;q)_3}\frac{(1-a/c)(1-c/e)(1-a^2/q^2e^2)}{(1-1/e)(1-a^2/q^2ce^2)(1-ac/q^2e^3)} \\ &\quad+\{1-\mathfrak{R}(a,c,e)\}\frac{(1-c)(1-ae/c)(1-q^2e^2/a)(1-q^2e^3/a^2)}{(1-e)(1-q^2ce^2/a^2)(1-q^2e^3/ac)},\end{aligned}$$

并将其迭代 m 次, 我们得到表达式

$$\begin{aligned}G_n(a,c,e) &= G_n(q^ma,c,e/q^m)\frac{(a/q^2e^2;q)_{3m}}{[a/qe,a/e,qa/e;q^2]_m}\frac{(a^2/q^2e^2;q^4)_m[a/c,c/e;q]_m}{(1/e;q)_m[ac/q^2e^3, a^2/q^2ce^2;q^4]_m} \\ &\quad+\frac{(1-c)(1-ae/c)(1-a/q^2e^2)}{(1-e)(1-a^2/q^2ce^2)(1-ac/q^2e^3)}\sum_{k=0}^{m-1}\{1-q^{5k-2}a^2/e^3\}q^k \\ &\quad\times\{1-\mathfrak{R}(q^ka,c,e/q^k)\}\frac{(a/qe^2;q)_{3k}}{[a/qe,a/e,qa/e;q^2]_k}\frac{(a^2/q^2e^2;q^4)_k[a/c,c/e;q]_k}{(q/e;q)_k[q^2ac/e^3, q^2a^2/ce^2;q^4]_k}.\end{aligned}$$

进一步定义有限和

$$\begin{aligned}G'_m(a,c,e) &= \sum_{k=0}^{m-1}\{1-q^{5k-2}a^2/e^3\}\frac{(a/qe^2;q)_{3k}}{[a/qe,a/e,qa/e;q^2]_k}q^k \\ &\quad\times\begin{bmatrix}a/c,\ c/e \\ q/e\end{bmatrix}_k\!\!\!\!|q \begin{bmatrix}a^2/q^2e^2 \\ q^2ac/e^3,\ q^2a^2/ce^2\end{bmatrix}_k\!\!\!\!|q^4,\end{aligned}\tag{9a}$$

它与 G 级数满足关系式

$$G'_m(a,c,e) = G_m(\lambda a,\lambda c,\lambda e)\quad 其中\quad \lambda = a/q^2e^3.\tag{9b}$$

注意到 $\mathcal{R}$ 函数可具体写为

$$\mathcal{R}(q^k a, c, e/q^k) = \frac{1-q^{n+5k-2}a^2/e^3}{1-q^{5k-2}a^2/e^3}\left[\begin{matrix} q^k a/c,\ q^k c/e \\ q^{2-3k}e^2/a \end{matrix}\middle| q\right]_n$$

$$\times \frac{(q^{-k}e;q)_{3n}}{[q^{2k-1}a/e, q^{2k}a/e, q^{2k+1}a/e;q^2]_n}\left[\begin{matrix} q^{4k-2}a^2/e^2 \\ c,\ ae/c \end{matrix}\middle| q^4\right]_n$$

$$= \frac{1-q^{n+5k-2}a^2/e^3}{1-q^{5k-2}a^2/e^3}\left[\begin{matrix} q^n a/c,\ q^n c/e,\ q/e \\ a/c, c/e, q^{1-3n}/e \end{matrix}\middle| q\right]_k \frac{(q^{4n-2}a^2/e^2;q^4)_k}{(a^2/q^2e^2;q^4)_k}$$

$$\times \frac{(q^{-1-n}a/e^2;q)_{3k}}{(a/qe^2;q)_{3k}}\left[\begin{matrix} a/qe,\ a/e,\ qa/e \\ q^{2n-1}a/e, q^{2n}a/e, q^{2n+1}qa/e \end{matrix}\middle| q^2\right]_k$$

$$\times \frac{(e;q)_{3n}}{[a/qe, a/e, qa/e;q^2]_n}\left[\begin{matrix} a/c,\ c/e \\ q^2e^2/a \end{matrix}\middle| q\right]_n \left[\begin{matrix} a^2/q^2e^2 \\ c,\ ae/c \end{matrix}\middle| q^4\right]_n,$$

我们推得下述变换公式:

定理 32 (四次级数互补关系)

$$G_n(a,c,e) - G_n(q^m a, c, e/q^m)\frac{(a/q^2e^2;q)_{3m}}{[a/qe, a/e, qa/e;q^2]_m}\frac{(a^2/q^2e^2;q^4)_m[a/c, c/e;q]_m}{(1/e;q)_m[ac/q^2e^3, a^2/q^2ce^2;q^4]_m}$$
$$= \frac{(1-c)(1-ae/c)(1-a/q^2e^2)}{(1-e)(1-a^2/q^2ce^2)(1-ac/q^2e^3)}\Big\{G'_m(a,c,e) - G'_m(q^{5n}a, q^{4n}c, q^{3n}e)$$
$$\times \frac{(e;q)_{3n}}{[a/qe, a/e, qa/e;q^2]_n}\left[\begin{matrix} a/c,\ c/e \\ q^2e^2/a \end{matrix}\middle| q\right]_n \left[\begin{matrix} a^2/q^2e^2 \\ c,\ ae/c \end{matrix}\middle| q^4\right]_n\Big\}.$$

在定理 32 中令 $m=n$, $e=-q^{2n-3}a$ 直接导出下面的变换:

推论 33 (四次级数变换: $\lambda = -q^{7-6n}/a^2$)

$$G_n(a,c,-q^{2n-3}a) = \frac{(1-c)(1+q^{2n-3}a^2/c)(1-q^{4-4n}/a)}{(1-q^{4-4n}/c)(1+q^{7-6n}c/a^2)(1+q^{2n-3}a)}G_n(\lambda a, \lambda c, -\lambda q^{2n-3}a).$$

应用极限关系

$$ {}_1\phi_2\left[\begin{matrix} a \\ b, d \end{matrix}\middle| q; \frac{bd}{a}\right] = \lim_{c\to\infty} {}_2\phi_2\left[\begin{matrix} a,\ c \\ b,\ d \end{matrix}\middle| q; \frac{bd}{ac}\right], \tag{10}$$

及 Jackson 的 ${}_2\phi_2$-变换公式 (6), 可以计算极限

$$\lim_{m,n\to\infty} G_n(q^m a, c, e/q^m) = {}_1\phi_2\left[\begin{matrix} q^4 \\ q^4c, q^4ae/c \end{matrix}\middle| q^4; q^4ae\right]$$

$$= (q^4ae/c;q^4)_\infty^{-1} \times {}_1\phi_1\left[\begin{matrix} c \\ q^4c \end{matrix}\middle| q^4; \frac{q^4ae}{c}\right],$$

$$\lim_{m,n\to\infty} G'_m(q^{5n}a, q^{4n}c, q^{3n}e) = {}_1\phi_2\left[\begin{matrix} q^4 \\ q^2a^2/ce^2, q^2ac/e^3 \end{matrix}\middle| q^4; a^3/e^5\right]$$

$$= (q^2ac/e^3;q^4)_\infty^{-1} \times {}_1\phi_1\left[\begin{matrix} a^2/q^2ce^2 \\ q^2a^2/ce^2 \end{matrix}\middle| q^4; \frac{q^2ac}{e^3}\right].$$

在定理 32 中令 $m, n \to \infty$, 则得到非终止级数关系.

命题 34 (非终止的四次级数变换)

$$G(a,c,e) - G'(a,c,e)\frac{(1-c)(1-ae/c)(1-a/q^2e^2)}{(1-e)(1-a^2/q^2ce^2)(1-ac/q^2e^3)}$$

$$= \frac{[a/c, c/e, a/q^2e^2; q]_\infty(-a/qe; q^2)_\infty}{[a/e, 1/e; q]_\infty[ac/q^2e^3, a^2/q^2ce^2, q^4ae/c; q^4]_\infty}\, {}_1\phi_1\left[\begin{matrix} c \\ q^4c \end{matrix} \middle| q^4; \frac{q^4ae}{c}\right]$$

$$- \frac{(c/a)\,[a/c, c/e, qe; q]_\infty(-a/qe; q^2)_\infty}{(1-q^2ce^2/a^2)[a/e, q^3e^2/a; q]_\infty[q^4c, q^4ae/c, ac/q^2e^3; q^4]_\infty}\, {}_1\phi_1\left[\begin{matrix} a^2/q^2ce^2 \\ q^2a^2/ce^2 \end{matrix} \middle| q^4; \frac{q^2ac}{e^3}\right].$$

在这个命题中将参数特殊化, 分别取 $c = 1$ 及 $e = a^{1/2}/q$, 便重新获得下述两个不同寻常的变换公式:

推论 35 (文献 [9, 方程 (5.28)])

$$G(a,1,e) - \frac{[a, a/q^2e^2; q]_\infty}{(a/e; q)_\infty(a/qe; q^2)_\infty[a/q^2e^3, q^4ae; q^4]_\infty}$$

$$= \frac{(a/q^2e^2)\,[a, 1/e, qe; q]_\infty(q^2a^2/e^2; q^4)_\infty}{[a/e, q^3e^2/a; q]_\infty(a/qe; q^2)_\infty[q^4, q^4ae, a/q^2e^3; q^4]_\infty}\, {}_1\phi_1\left[\begin{matrix} a^2/q^2e^2 \\ q^2a^2/e^2 \end{matrix} \middle| q^4; \frac{q^2a}{e^3}\right].$$

推论 36 (文献 [10, 方程 (6.7)])

$$G(a,c,a^{1/2}/q) = \frac{[qa/c, qc/a^{1/2}; q]_\infty}{(q;q)_\infty[q^4c, q^3a^{3/2}/c, qc/a^{1/2}; q^4]_\infty}\frac{(a; q^4)_\infty}{(q^2a^{1/2}; q^2)_\infty}\, {}_1\phi_1\left[\begin{matrix} a/c \\ q^4a/c \end{matrix} \middle| q^4; q^5a^{1/2}c\right].$$

4.2 列平衡级数表达式

选择另外一组差分序列

$$\mathcal{A}_k = \frac{(a^2/q^5e^3; q)_k(q^4e; q)_{3k}}{(q^{10}e^3/a; q^4)_k[a/qe, a/e, qa/e; q^2]_k},$$

$$\mathcal{B}_k = \left[\begin{matrix} a/c,\ c/e \\ q^6e^2/a, a^2/q^6e^3 \end{matrix} \middle| q\right]_k \left[\begin{matrix} a^2/q^2e^2, q^{10}e^3/a \\ q^4c,\ q^4ae/c \end{matrix} \middle| q^4\right]_k.$$

容易证明它们满足下面的关系式

$$\varpi := \mathcal{A}_{-1}\mathcal{B}_0 = a\frac{(1-qe/a)(1-q^2e/a)(1-q^3e/a)(1-q^6e^3/a)}{(1-qe)(1-q^2e)(1-q^3e)(1-q^6e^3/a^2)},$$

$$\mathcal{R} := \frac{\mathcal{A}_{n-1}\mathcal{B}_n}{\mathcal{A}_{-1}\mathcal{B}_0} = \frac{1-q^{6+4n}e^3/a}{1-q^6e^3/a}\left[\begin{matrix} a/c, c/e \\ q^6e^2/a \end{matrix} \middle| q\right]_n \left[\begin{matrix} a^2/q^2e^2 \\ q^4c, q^4ae/c \end{matrix} \middle| q^4\right]_n \frac{(qe; q)_{3n}}{[a/qe, a/q^2e, a/q^3e; q^2]_n};$$

及有限差分表达式

$$\triangledown\mathcal{A}_k = \frac{(1-q^{3+k}e^2/a)(1-q^{4+k}e^2/a)(1-q^{5+k}e^2/a)(1-q^{5k}a)}{(1-qe)(1-q^2e)(1-q^3e)(1-q^6e^3/a^2)}$$
$$\times\frac{(a^2/q^6e^3; q)_k(qe; q)_{3k}}{(q^{10}e^3/a; q^4)_k[a/qe, a/e, qa/e; q^2]_k}q^k,$$

$$\vartriangle\mathcal{B}_k = \frac{(1-q^{4+3k}e)(1-q^{4+5k}a)(1-q^6ce^2/a^2)(1-q^6e^3/ac)}{(1-q^6e^2/a)(1-q^6e^3/a^2)(1-q^4c)(1-q^4ae/c)}$$
$$\times\left[\begin{matrix} a/c,\ c/e \\ q^7e^2/a, a^2/q^5e^3 \end{matrix} \middle| q\right]_k \left[\begin{matrix} a^2/q^2e^2, q^{10}e^3/a \\ q^8c,\ q^8ae/c \end{matrix} \middle| q^4\right]_k q^k.$$

根据修正的 Abel 分部求和引理, 我们可以将 G 级数整理为

$$\begin{aligned}
&G_n(a,c,e)\times\frac{(1-q^3e^2/a)(1-q^4e^2/a)(1-q^5e^2/a)}{(1-qe)(1-q^2e)(1-q^3e)(1-q^6e^3/a^2)}\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{B}_k\bigtriangledown\mathcal{A}_k=\varpi\{\mathcal{R}-1\}+\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{A}_k\triangle\mathcal{B}_k\\
&=\varpi\{\mathcal{R}-1\}+G_n(q^4a,q^4c,q^4e)\\
&\quad\times\frac{(1-q^4e)(1-q^6ce^2/a^2)(1-q^6e^3/ac)}{(1-q^6e^2/a)(1-q^6e^3/a^2)(1-q^4c)(1-q^4ae/c)}.
\end{aligned}$$

重写上述函数方程

$$\begin{aligned}
G_n(a,c,e)=\;&G_n(q^4a,q^4c,q^4e)\frac{(qe;q)_4(1-q^6ce^2/a^2)(1-q^6e^3/ac)}{(q^3e^2/a;q)_4(1-q^4c)(1-q^4ae/c)}\\
&-a\{1-\mathcal{R}(a,c,e)\}\frac{(1-qe/a)(1-q^2e/a)(1-q^3e/a)(1-q^6e^3/a)}{(1-q^3e^2/a)(1-q^4e^2/a)(1-q^5e^2/a)},
\end{aligned}$$

并将其迭代 m 次, 得到表达式

$$\begin{aligned}
G_n(a,c,e)=\;&G_n(q^{4m}a,q^{4m}c,q^{4m}e)\frac{(qe;q)_{4m}}{(q^3e^2/a;q)_{4m}}\left[\begin{matrix}q^6ce^2/a^2,q^6e^3/ac\\q^4c,\ q^4ae/c\end{matrix}\Big|q^4\right]_m\\
&-\frac{a\,(qe/a;q)_3}{(q^3e^2/a;q)_3}\sum_{k=0}^{m-1}\{1-q^{6+8k}e^3/a\}\frac{(qe;q)_{4k}}{(q^6e^2/a;q)_{4k}}q^{4k}\\
&\times\{1-\mathcal{R}(q^{4k}a,q^{4k}c,q^{4k}e)\}\left[\begin{matrix}q^6ce^2/a^2,q^6e^3/ac\\q^4c,\ q^4ae/c\end{matrix}\Big|q^4\right]_k.
\end{aligned}$$

定义列平衡部分和

$$\mathcal{G}_m(a,c,e)=\sum_{k=0}^{m-1}\{1-q^{6+8k}e^3/a\}\frac{(qe;q)_{4k}}{(q^6e^2/a;q)_{4k}}\left[\begin{matrix}q^6ce^2/a^2,q^6e^3/ac\\q^4c,\ q^4ae/c\end{matrix}\Big|q^4\right]_k q^{4k},\tag{11}$$

并通过分离 k 次升阶乘来重写 $\mathcal{R}$ 函数

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(q^{4k}a,q^{4k}c,q^{4k}e)=\;&\frac{1-q^{6+4n+8k}e^3/a}{1-q^{6+8k}e^3/a}\left[\begin{matrix}a^2/q^2e^2\\q^{4+4k}c,\ q^{4+4k}ae/c\end{matrix}\Big|q^4\right]_n\\
&\times\frac{(q^{1+4k}e;q)_{3n}}{[a/qe,a/q^2e,a/q^3e;q^2]_n}\left[\begin{matrix}a/c,\ c/e\\q^{6+4k}e^2/a\end{matrix}\Big|q\right]_n\\
=\;&\frac{1-q^{6+4n+8k}e^3/a}{1-q^{6+8k}e^3/a}\left[\begin{matrix}q^6e^2/a,q^{1+3n}e\\q^{6+n}e^2/a,qe\end{matrix}\Big|q\right]_{4k}\left[\begin{matrix}q^4c,\ q^4ae/c\\q^{4+4n}c,q^{4+4n}ae/c\end{matrix}\Big|q^4\right]_k\\
&\times\frac{(qe;q)_{3n}}{[a/qe,a/q^2e,a/q^3e;q^2]_n}\left[\begin{matrix}a/c,\ c/e\\q^6e^2/a\end{matrix}\Big|q\right]_n\left[\begin{matrix}a^2/q^2e^2\\q^4c,\ q^4ae/c\end{matrix}\Big|q^4\right]_n,
\end{aligned}$$

我们便建立关于 G 级数的另一个变换公式.

定理 37 (四次级数与列平衡级数之间的变换)

$$
\begin{aligned}
&G_n(a,c,e) - G_n(q^{4m}a, q^{4m}c, q^{4m}e)\frac{(qe;q)_{4m}}{(q^3e^2/a;q)_{4m}}\left[\begin{matrix} q^6ce^2/a^2, q^6e^3/ac \\ q^4c,\ q^4ae/c \end{matrix}\Big| q^4\right]_m \\
&\quad = -\frac{a\,(qe/a;q)_3}{(q^3e^2/a;q)_3}\Big\{\mathcal{G}_m(a,c,e) - \mathcal{G}_m(q^{5n}a, q^{4n}c, q^{3n}e) \\
&\qquad\qquad \times \left[\begin{matrix} a/c,\ c/e \\ q^6e^2/a \end{matrix}\Big| q\right]_n \left[\begin{matrix} a^2/q^2e^2 \\ q^4c,\ q^4ae/c \end{matrix}\Big| q^4\right]_n \frac{(qe;q)_{3n}}{[a/qe, a/q^2e, a/q^3e; q^2]_n}\Big\}.
\end{aligned}
$$

在这个定理中令 $m, n \to \infty$, 然后利用极限关系

$$
\lim_{m\to\infty} G_n(q^{4m}a, q^{4m}c, q^{4m}e) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[a/c, c/e; q]_k (a^2/q^2e^2; q^4)_k}{[a/qe, a/e, qa/e; q^2]_k} q^k,
$$

$$
\lim_{n\to\infty} \mathcal{G}_m(q^{5n}a, q^{4n}c, q^{3n}e) = \sum_{k=0}^{m-1} [q^6ce^2/a^2, q^6e^3/ac; q^4]_k q^{4k};
$$

我们推出下述非终止级数变换公式:

命题 38 (非终止的四次级数变换)

$$
\begin{aligned}
&G(a,c,e) + \mathcal{G}(a,c,e)\frac{a\,(1-qe/a)(1-q^2e/a)(1-q^3e/a)}{(1-q^3e^2/a)(1-q^4e^2/a)(1-q^5e^2/a)} \\
&\quad = \frac{(qe;q)_\infty}{(q^3e^2/a;q)_\infty}\left[\begin{matrix} q^6ce^2/a^2, q^6e^3/ac \\ q^4c,\ q^4ae/c \end{matrix}\Big| q^4\right]_\infty \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[a/c, c/e; q]_k (a^2/q^2e^2; q^4)_k}{[a/qe, a/e, qa/e; q^2]_k} q^k \\
&\qquad - \frac{q^6e^3/a^2}{(a/qe;q^2)_\infty}\left[\begin{matrix} a/c,\ c/e,\ qe \\ a/e, q^3e^2/a \end{matrix}\Big| q\right]_\infty \left[\begin{matrix} a^2/q^2e^2 \\ q^4c, q^4ae/c \end{matrix}\Big| q^4\right]_\infty \sum_{k=0}^{\infty} [q^6ce^2/a^2, q^6e^3/ac; q^4]_k q^{4k}.
\end{aligned}
$$

5 另一个四次级数的变换及求和公式

这一节研究另外一个四次级数部分和

$$
H_n(a,c,e) = \sum_{k=0}^{n-1}\{1 - q^{5k}a\}\left[\begin{matrix} e^2/q^2a \\ qa/c, qc/e \end{matrix}\Big| q\right]_k \left[\begin{matrix} c, ae/c \\ q^6a^2/e^2 \end{matrix}\Big| q^4\right]_k \frac{[qa/e, q^2a/e, q^3a/e; q^2]_k}{(e;q)_{3k}} q^k.
$$

这个级数与上一节中的 G 级数在某种意义上可以看做互为对偶的, 因为它们的求和项的分子和分母恰好是颠倒的.

5.1 互补关系式

对于两个给定的序列

$$
\mathrm{A}_k = \frac{(e^3/q^2a; q^4)_k [q^3a/e, q^4a/e, q^5a/e; q^2]_k}{(q^7a^2/e^3; q)_k (e;q)_{3k}},
$$

$$
\mathrm{B}_k = \left[\begin{matrix} e^2/q^5a,\ q^7a^2/e^3 \\ qa/c,\quad qc/e \end{matrix}\Big| q\right]_k \left[\begin{matrix} c, \quad ae/c \\ q^6a^2/e^2,\ e^3/q^6a \end{matrix}\Big| q^4\right]_k;
$$

不难获得关系

$$\varpi := \mathrm{A}_{-1}\mathrm{B}_0 = a\frac{(1-q/e)(1-q^2/e)(1-q^3/e)(1-q^6a^2/e^3)}{(1-qa/e)(1-q^2a/e)(1-q^3a/e)(1-q^6a/e^3)},$$

$$\mathcal{R} := \frac{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_n}{\mathrm{A}_{-1}\mathrm{B}_0} = \frac{1-q^{6+n}a^2/e^3}{1-q^6a^2/e^3}\begin{bmatrix} e^2/q^5a \\ qa/c, qc/e \end{bmatrix} q\Big]_n \begin{bmatrix} c, ae/c \\ q^6a^2/e^2 \end{bmatrix} q^4\Big]_n \frac{[qa/e, q^2a/e, q^3a/e; q^2]_n}{(e/q^3; q)_{3n}};$$

及有限差分表达式

$$\begin{aligned}\triangledown \mathrm{A}_k &= \frac{(1-q^{k-3}e^2/a)(1-q^{k-4}e^2/a)(1-q^{k-5}e^2/a)(1-q^{5k}a)}{(e^3/q^6a^2)(1-qa/e)(1-q^2a/e)(1-q^3a/e)(1-e^3/q^6a)} \\ &\quad\times\frac{(e^3/q^6a;q^4)_k[qa/e,q^2a/e,q^3a/e;q^2]_k}{(q^7a^2/e^3;q)_k(e;q)_{3k}}q^k, \\ \triangle \mathrm{B}_k &= \frac{(1-q^{3k-1}e)(1-q^{1+5k}a)(1-q^6a^2/ce^2)(1-e^3/q^6ac)}{(1-qa/c)(1-e/qc)(1-q^6a^2/e^2)(1-e^3/q^6a)} \\ &\quad\times\begin{bmatrix} e^2/q^5a,\ q^7a^2/e^3 \\ q^2a/c,\quad q^2c/e \end{bmatrix} q\Big]_k \begin{bmatrix} c, \qquad ae/c \\ q^{10}a^2/e^2,\ e^3/q^2a \end{bmatrix} q^4\Big]_k q^k.\end{aligned}$$

根据修正的 Abel 分部求和引理, 级数 H 可整理为

$$\begin{aligned} &H_n(a,c,e)\times\frac{(1-q^3a/e^2)(1-q^4a/e^2)(1-q^5a/e^2)}{(1-qa/e)(1-q^2a/e)(1-q^3a/e)(1-q^6a/e^3)} \\ &\quad= \sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{B}_k\triangledown\mathrm{A}_k = \varpi\{\mathcal{R}-1\}+\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{A}_k\triangle\mathrm{B}_k \\ &\quad= \varpi\big\{\mathcal{R}-1\big\}+H_n(qa,c,e/q)\frac{(1-q/e)(1-q^6ac/e^3)(1-q^6a^2/ce^2)}{(1-qa/c)(1-qc/e)(1-q^6a/e^3)(1-q^6a^2/e^2)}.\end{aligned}$$

重写上面的关系

$$\begin{aligned} H_n(a,c,e) &= H_n(qa,c,e/q)\frac{(qa/e;q)_3}{(q^3a/e^2;q)_3}\frac{(1-q/e)(1-q^6ac/e^3)(1-q^6a^2/ce^2)}{(1-qa/c)(1-qc/e)(1-q^6a^2/e^2)} \\ &\quad -a\{1-\mathcal{R}(a,c,e)\}\frac{(1-q/e)(1-q^2/e)(1-q^3/e)(1-q^6a^2/e^3)}{(1-q^3a/e^2)(1-q^4a/e^2)(1-q^5a/e^2)},\end{aligned}$$

将其迭代 m 次, 我们得到表达式

$$\begin{aligned} H_n(a,c,e) &= H_n(q^ma,c,e/q^m)\frac{(q/e;q)_m[qa/e,q^2a/e,q^3a/e;q^2]_m[q^6ac/e^3,q^6a^2/ce^2;q^4]_m}{(q^6a^2/e^2;q^4)_m(q^3a/e^2;q)_{3m}[qa/c,qc/e;q]_m} \\ &\quad -\frac{a\,(q/e;q)_3}{(q^3a/e^2;q)_3}\sum_{k=0}^{m-1}\{1-q^{6+5k}a^2/e^3\}\frac{[qa/e,q^2a/e,q^3a/e;q^2]_k}{(q^6a/e^2;q)_{3k}}q^k \\ &\quad \times\{1-\mathcal{R}(q^ka,c,e/q^k)\}\begin{bmatrix} q^4/e \\ qa/c, qc/e \end{bmatrix} q\Big]_k \begin{bmatrix} q^6ac/e^3, q^6a^2/ce^2 \\ q^6a^2/e^2 \end{bmatrix} q^4\Big]_k.\end{aligned}$$

进一步定义有限和

$$\begin{aligned} H'_m(a,c,e) &= \sum_{k=0}^{m-1}\{1-q^{6+5k}a^2/e^3\}\frac{[qa/e,q^2a/e,q^3a/e;q^2]_k}{(q^6a/e^2;q)_{3k}}q^k \\ &\quad\times\begin{bmatrix} q^4/e \\ qa/c,\ qc/e \end{bmatrix} q\Big]_k \begin{bmatrix} q^6ac/e^3,\ q^6a^2/ce^2 \\ q^6a^2/e^2 \end{bmatrix} q^4\Big]_k. \end{aligned} \tag{12a}$$

它与 H 级数满足关系

$$H'_m(a,c,e) = H_m(\lambda a,\lambda c,\lambda e), \tag{12b}$$

其中 $\lambda = q^6a/e^3$. 写出 $\mathcal{R}$ 函数的具体形式

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(q^ka,c,e/q^k) &= \frac{1-q^{6+n+5k}a^2/e^3}{1-q^{6+5k}a^2/e^3}\left[\begin{matrix} q^{-5-3k}e^2/a \\ q^{1+k}a/c,\ q^{1+k}c/e\end{matrix}\Big| q\right]_n \\ &\quad\times\frac{[q^{1+2k}a/e,q^{2+2k}a/e,q^{3+2k}a/e;q^2]_n}{(q^{-3-k}e;q)_{3n}}\left[\begin{matrix} c,\ ae/c \\ q^{6+4k}a^2/e^2\end{matrix}\Big| q^4\right]_n \\ &= \frac{1-q^{6+n+5k}a^2/e^3}{1-q^{6+5k}a^2/e^3}\left[\begin{matrix} q^{1+2n}a/e,q^{2+2n}a/e,q^{3+2n}a/e \\ qa/e,\ q^2a/e,\ q^3a/e\end{matrix}\Big| q^2\right]_k \\ &\quad\times\frac{(q^6a/e^2;q)_{3k}}{(q^{6-n}a/e^2;q)_{3k}}\left[\begin{matrix} qa/c,\ qc/e,\ q^{4-3n}/e \\ q^4/e,q^{1+n}a/c,q^{1+n}c/e\end{matrix}\Big| q\right]_k\frac{(q^6a^2/e^2;q^4)_k}{(q^{6+4n}a^2/e^2;q^4)_k} \\ &\quad\times\frac{[qa/e,q^2a/e,q^3a/e;q^2]_n}{(e/q^3;q)_{3n}}\left[\begin{matrix} e^2/q^5a \\ qa/c,\ qc/e\end{matrix}\Big| q\right]_n\left[\begin{matrix} c,\ ae/c \\ q^6a^2/e^2\end{matrix}\Big| q^4\right]_n.\end{aligned}$$

我们推得下面的变换公式:

定理 39 (四次级数互补关系)

$$\begin{aligned}&H_n(a,c,e)-H_n(q^ma,c,e/q^m)\frac{(q/e;q)_m[qa/e,q^2a/e,q^3a/e;q^2]_m[q^6ac/e^3,q^6a^2/ce^2;q^4]_m}{(q^6a^2/e^2;q^4)_m(q^3a/e^2;q)_{3m}[qa/c,qc/e;q]_m} \\ &= -\frac{a\,(q/e;q)_3}{(q^3a/e^2;q)_3}\Big\{H'_m(a,c,e)-H'_m(q^{5n}a,q^{4n}c,q^{3n}e) \\ &\quad\times\frac{[qa/e,q^2a/e,q^3a/e;q^2]_n}{(e/q^3;q)_{3n}}\left[\begin{matrix} e^2/q^5a \\ qa/c,\ qc/e\end{matrix}\Big| q\right]_n\left[\begin{matrix} c,\ ae/c \\ q^6a^2/e^2\end{matrix}\Big| q^4\right]_n\Big\}.\end{aligned}$$

5.2 列平衡级数表达式

定义另外两个序列

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_k &= \left[\begin{matrix} e^2/qa,\ q^3a^2/e^3 \\ qa/c,\quad qc/e\end{matrix}\Big| q\right]_k\left[\begin{matrix} q^4c,\quad q^4ae/c \\ q^6a^2/e^2,\ q^2e^3/a\end{matrix}\Big| q^4\right]_k, \\ \mathcal{B}_k &= \frac{(q^2e^3/a;q^4)_k[qa/e,q^2a/e,q^3a/e;q^2]_k}{(q^2a^2/e^3;q)_k(qe;q)_{3k}}.\end{aligned}$$

我们不难得到关系式

$$\begin{aligned}\varpi &:= \mathcal{A}_{-1}\mathcal{B}_0 = e\frac{(1-c/e)(1-a/c)(1-e^3/q^2a)(1-e^2/q^2a^2)}{(1-c)(1-ae/c)(1-e^2/q^2a)(1-e^3/q^2a^2)}, \\ \mathcal{R} &:= \frac{\mathcal{A}_{n-1}\mathcal{B}_n}{\mathcal{A}_{-1}\mathcal{B}_0} = \frac{1-q^{4n-2}e^3/a}{1-q^{-2}e^3/a}\left[\begin{matrix} e^2/q^2a \\ a/c,c/e\end{matrix}\Big| q\right]_n\left[\begin{matrix} c,ae/c \\ q^2a^2/e^2\end{matrix}\Big| q^4\right]_n\frac{[qa/e,q^2a/e,q^3a/e;q^2]_n}{(qe;q)_{3n}},\end{aligned}$$

和有限差分表达式

$$\begin{aligned}\triangledown\mathcal{A}_k &= \frac{(1-q^{3k}e)(1-q^{5k}a)(1-q^2a^2/ce^2)(1-q^2ac/e^3)}{(1-q^2a/e^2)(1-c)(1-ae/c)(1-q^2a^2/e^3)} \\ &\quad\times\left[\begin{matrix} e^2/q^2a,\ q^2a^2/e^3 \\ qa/c,\quad qc/e\end{matrix}\Big| q\right]_k\left[\begin{matrix} c,\quad ae/c \\ q^6a^2/e^2,\ q^2e^3/a\end{matrix}\Big| q^4\right]_k q^k,\end{aligned}$$

$$\triangle \mathcal{B}_k = \frac{(1-q^k e^2/a)(1-q^{k+1}e^2/a)(1-q^{k-1}e^2/a)(1-q^{4+5k}a)}{(1-qe)(1-q^2e)(1-q^3e)(1-e^3/q^2a^2)} \times \frac{(q^2e^3/a;q^4)_k[qa/e,q^2a/e,q^3a/e;q^2]_k}{(q^3a^2/e^3;q)_k(q^4e;q)_{3k}} q^k.$$

由修正的 Abel 分部求和引理, 可以改写 H 级数如下:

$$\begin{aligned} & H_n(a,c,e) \times \frac{(1-e)(1-e^3/q^2ac)(1-ce^2/q^2a^2)}{(1-c)(1-ae/c)(1-e^2/q^2a)(1-e^3/q^2a^2)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{B}_k \bigtriangledown \mathcal{A}_k = \varpi\{\mathcal{R}-1\} + \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{A}_k \triangle \mathcal{B}_k \\ &= \varpi\{\mathcal{R}-1\} + H_n(q^4a,q^4c,q^4e)\frac{(1-e^2/qa)(1-e^2/a)(1-qe^2/a)}{(1-qe)(1-q^2e)(1-q^3e)(1-e^3/q^2a^2)}. \end{aligned}$$

由此给出函数方程

$$\begin{aligned} H_n(a,c,e) &= H_n(q^4a,q^4c,q^4e)\frac{(e^2/q^2a;q)_4}{(e;q)_4}\frac{(1-c)(1-ae/c)}{(1-e^3/q^2ac)(1-ce^2/q^2a^2)} \\ &\quad -e\{1-\mathcal{R}(a,c,e)\}\frac{(1-a/c)(1-c/e)(1-e^3/q^2a)(1-e^2/q^2a^2)}{(1-e)(1-e^3/q^2ac)(1-ce^2/q^2a^2)}. \end{aligned}$$

迭代上述关系 m 次, 我们推得

$$\begin{aligned} H_n(a,c,e) &= H_n(q^{4m}a,q^{4m}c,q^{4m}e)\frac{(e^2/q^2a;q)_{4m}}{(e;q)_{4m}}\left[\begin{matrix} c, & ae/c \\ e^3/q^2ac, & ce^2/q^2a^2 \end{matrix} \Big| q^4\right]_m \\ &\quad + \frac{(1-a/c)(1-e/c)(1-q^2a^2/e^2)}{(1-e)(1-e^3/q^2ac)(1-q^2a^2/ce^2)} \sum_{k=0}^{m-1}\{1-q^{8k-2}e^3/a\}\, q^{4k} \\ &\quad \times \frac{(e^2/q^2a;q)_{4k}}{(qe;q)_{4k}}\left[\begin{matrix} c, & ae/c \\ q^2e^3/ac, & q^2ce^2/a^2 \end{matrix} \Big| q^4\right]_k \{1-\mathcal{R}(q^{4k}a,q^{4k}c,q^{4k}e)\}. \end{aligned}$$

定义列平衡部分和

$$\mathcal{H}_m(a,c,e) = \sum_{k=0}^{m-1}\{1-q^{8k-2}e^3/a\}\frac{(e^2/q^2a;q)_{4k}}{(qe;q)_{4k}}\left[\begin{matrix} c,\ ae/c \\ q^2e^3/ac, q^2ce^2/a^2 \end{matrix} \Big| q^4\right]_k q^{4k}, \tag{13}$$

通过分离 k 次升阶乘来改写 $\mathcal{R}$ 函数

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(q^{4k}a,q^{4k}c,q^{4k}e) &= \frac{1-q^{4n+8k-2}e^3/a}{1-q^{8k-2}e^3/a}\left[\begin{matrix} q^{4k}c,\ q^{4k}ae/c \\ q^2a^2/e^2 \end{matrix} \Big| q^4\right]_n \\ &\quad \times \frac{[qa/e,q^2a/e,q^3a/e;q^2]_n}{(q^{1+4k}e;q)_{3n}}\left[\begin{matrix} q^{4k-2}e^2/a \\ a/c,\ c/e \end{matrix} \Big| q\right]_n \\ &= \frac{1-q^{4n+8k-2}e^3/a}{1-q^{8k-2}e^3/a}\left[\begin{matrix} qe, q^{n-2}e^2/a \\ e^2/q^2a, q^{1+3n}e \end{matrix} \Big| q\right]_{4k}\left[\begin{matrix} q^{4n}c, q^{4n}ae/c \\ c, ae/c \end{matrix} \Big| q^4\right]_k \\ &\quad \times \left[\begin{matrix} e^2/q^2a \\ a/c,\ c/e \end{matrix} \Big| q\right]_n \left[\begin{matrix} c,\ ae/c \\ q^2a^2/e^2 \end{matrix} \Big| q^4\right]_n \frac{[qa/e,q^2a/e,q^3a/e;q^2]_n}{(qe;q)_{3n}}. \end{aligned}$$

我们得到关于 H 级数的另一个变换公式.

定理 40 (四次级数与列平衡级数之间的变换)

$$H_n(a,c,e)-H_n(q^{4m}a,q^{4m}c,q^{4m}e)\frac{(e^2/q^2a;q)_{4m}}{(e;q)_{4m}}\left[\begin{matrix}c, & ae/c\\ e^3/q^2ac, & ce^2/q^2a^2\end{matrix}\Big|q^4\right]_m$$

$$=\frac{(1-a/c)(1-e/c)(1-q^2a^2/e^2)}{(1-e)(1-e^3/q^2ac)(1-q^2a^2/ce^2)}\Big\{\mathcal{H}_m(a,c,e)-\mathcal{H}_m(q^{5n}a,q^{4n}c,q^{3n}e)$$

$$\times\left[\begin{matrix}e^2/q^2a\\ a/c,\ c/e\end{matrix}\Big|q\right]_n\left[\begin{matrix}c,\ ae/c\\ q^2a^2/e^2\end{matrix}\Big|q^4\right]_n\frac{[qa/e,q^2a/e,q^3a/e;q^2]_n}{(qe;q)_{3n}}\Big\}.$$

在定理 40 中取 $m=n-1$ 及 $c=e=q^{4-4n}$, 将 n 换成 $n+1$ 后, 有下面的恒等式:

推论 41 (终止的四次级数求和公式)

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1-q^{5k}a}{1-a}\left[\begin{matrix}q^{-4n},a\\ q^{6+8n}a^2\end{matrix}\Big|q^4\right]_k\left[\begin{matrix}q^{-2-8n}/a\\ q,q^{1+4n}a\end{matrix}\Big|q\right]_k\frac{[q^{1+4n}a,q^{2+4n}a,q^{3+4n}a;q^2]_k}{(q^{-4n};q)_{3k}}\,q^k$$

$$=\frac{(q^{-2-8n}/a;q)_{4n}}{(q^{-4n};q)_{4n}}\left[\begin{matrix}q^4a, & q^{-4n}\\ q^{-2-8n}/a, & q^{-2-12n}/a^2\end{matrix}\Big|q^4\right]_n.$$

其次, 取 $m=n$, $c=q^{4-4n}$, 从定理 40 中我们得到如下的结果:

推论 42 (四次级数与列平衡级数之间的变换)

$$H_n(a,q^{4-4n},e)=\frac{(1-q^{4n-4}a)(1-q^{4n-4}e)(1-q^2a^2/e^2)}{(1-e)(1-q^{4n-6}e^3/a)(1-q^{4n-2}a^2/e^2)}\mathcal{H}_n(a,q^{4-4n},e).$$

进一步, 在上面的推论中令 $e=q^{\varepsilon}$ (其中 $\varepsilon=1$, 2 或 3), 然后根据推论 2 中 Jackson 的 q-Dougall-Dixon 公式计算 $\mathcal{H}_n(a,c,e)$, 得

$$\mathcal{H}_n(a,q^{4-4n},q^{\varepsilon})=(1-q^{3\varepsilon-2}/a)\left[\begin{matrix}q^4\ ,q^{2+3\varepsilon}/a\\ q^{\varepsilon}a,q^{2-2\varepsilon}a^2\end{matrix}\Big|q^4\right]_{n-1}\frac{(a;q)_{4n-4}}{(q^{1+\varepsilon};q)_{4n-4}}.$$

将 n 替换为 $n+1$, 我们推得下面的已知公式:

推论 43 (文献 [8, 方程 (5.3d)]) 对于 $\varepsilon=1$, 2, 或 3, 存在如下 3 个求和公式:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1-q^{5k}a}{1-a}\left[\begin{matrix}q^{-4n},q^{\varepsilon+4n}a\\ q^{6-2\varepsilon}a^2\end{matrix}\Big|q^4\right]_k\frac{(q^{2\varepsilon-2}/a;q)_k(q^{1-\varepsilon}a;q)_{2k}(q^{3-\varepsilon}a;q^2)_k}{[q^{4n+1}a,q^{1-\varepsilon-4n};q]_k(q^{\varepsilon};q)_{3k}}\,q^k$$

$$=\frac{(qa;q)_{4n}}{(q^{\varepsilon};q)_{4n}}\left[\begin{matrix}q^4,\ q^{3\varepsilon-2}/a\\ q^{\varepsilon}a,\ q^{6-2\varepsilon}a^2\end{matrix}\Big|q^4\right]_n.$$

在定理 40 中令 $m,n\to\infty$, 并利用极限表达式

$$\lim_{m\to\infty}H_n(q^{4m}a,q^{4m}c,q^{4m}e)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{[qa/e,q^2a/e,q^3a/e;q^2]_k}{[qa/c,qc/e;q]_k(q^6a^2/e^2;q^4)_k}q^k,$$

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{H}_m(q^{5n}a,q^{4n}c,q^{3n}e)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{q^{4k}}{[q^2e^3/ac,q^2ce^2/a^2;q^4]_k},$$

得到非终止的级数关系.

命题 44 (非终止的四次级数变换)

$$H(a,c,e) - \mathcal{H}(a,c,e)\frac{(1-a/c)(1-e/c)(1-q^2a^2/e^2)}{(1-e)(1-e^3/q^2ac)(1-q^2a^2/ce^2)}$$

$$= \frac{(e^2/q^2a;q)_\infty}{(e;q)_\infty}\left[\begin{matrix} c, & ae/c \\ e^3/q^2ac, & ce^2/q^2a^2 \end{matrix}\Big|q^4\right]_\infty \sum_{k=0}^{\infty}\frac{[qa/e,q^2a/e,q^3a/e;q^2]_k}{[qa/c,qc/e;q]_k(q^6a^2/e^2;q^4)_k}q^k$$

$$+ \frac{(1-q^2a/e^2)(q^3a/e;q^2)_\infty}{(1-q^2a^2/ce^2)(1-q^2ac/e^3)}\left[\begin{matrix} qa/e, \ e^2/qa \\ qa/c, qc/e, e \end{matrix}\Big|q\right]_\infty \left[\begin{matrix} c, \ ae/c \\ q^6a^2/e^2 \end{matrix}\Big|q^4\right]_\infty \sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{4k}}{[q^2e^3/ac, q^2ce^2/a^2;q^4]_k}.$$

参考文献

1 Bailey W N. Generalized Hypergeometric Series. Cambridge: Cambridge University Press, 1935

2 Gasper G, Rahman M. Basic Hypergeometric Series. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2004

3 Slater L J. Generalized Hypergeometric Functions. Cambridge: Cambridge University Press, 1966

4 Hardy G H. Ramanujan: Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work. Cambridge: Cambridge University Press, 1940; Reprinted by New York: Chelsea, 1978

5 Bailey W N. Series of hypergeometric type which are infinite in both directions. *Q J Math* (*Oxford*), **7**: 105–115 (1936)

6 Chu W. Bailey's very well-poised ${}_6\psi_6$-series identity. *J Combin Theory Ser A*, **113**(6): 966–979 (2006)

7 Chu W. Abel's lemma on summation by parts and Ramanujan's ${}_1\psi_1$-series identity. *Aequationes Math,* **72**(1-2): 172–176 (2006)

8 Chu W. Inversion techniques and combinatorial identities: Jackson's q-analogue of the Dougall-Dixon theorem and the dual formulae. *Compos Math*, **95**: 43–68 (1995)

9 Gasper G. Summation, transformation, and expansion formulas for bibasic series. *Trans Amer Math Soc,* **312**(1): 257–277 (1989)

10 Gasper G, Rahman M. An indefinite bibasic summation formula and some quadratic, cubic and quartic summation and transformation formulas. *Canad J Math*, **42**: 1–27 (1990)

11 Gessel I, Stanton D. Applications of q-Lagrange inversion to basic hypergeometric series. *Trans Amer Math Soc,* **277**(1): 173–201 (1983)

12 Rahman M. Some quadratic and cubic summation formulas for basic hypergeometric series. *Canad J Math,* **45**(2): 394–411 (1993)

13 Jackson F H. Summation of q-hypergeometric series. *Messenger of Mathematics*, **50**: 101–112 (1921)

14 Sears D B. Transformations of basic hypergeometric functions of special type. *Proc London Math Soc* (2), **52**: 467–483 (1951)

15 Stromberg K R. An Introduction to Classical Real Analysis. Belmont, California: Wadsworth, 1981

16 Chu W. Inversion techniques and combinatorial identities. *Boll Unione Mat Ital*, **B-7**: 737–760 (1993)