



量子关联及其应用

李波^{①②}, 范桁^{②*}

① 上饶师范学院数学与计算机科学学院, 上饶 334001

② 中国科学院物理研究所北京凝聚态物理国家实验室, 北京 100190

* 通信作者. E-mail: hfan@iphy.ac.cn

收稿日期: 2013-05-20; 接受日期: 2014-01-03

国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2010CB922904)、国家自然科学基金 (批准号: 11175248, 11305105) 和江西省自然科学基金 (批准号: 20132BAB212010) 资助项目

摘要 量子关联是量子系统具有的一种重要的非经典性质, 被普遍研究的量子纠缠就是量子信息处理中重要的量子关联. 随着研究的深入, 最近发现了很多不需要纠缠的非经典现象在量子信息中扮演了关键角色. 文章介绍了基于量子失协及其相关的非经典量子关联, 讨论了各种量子关联在量子信息模型中各种物理解释与应用.

关键词 量子关联 量子失协 量子纠缠 DQC1 算法 量子态区分模型

1 引言

量子信息是信息科学与量子物理相结合而产生的新兴交叉学科. 建立在量子算法基础之上的量子计算机将具有远远超越经典计算机的计算能力, 从而为后摩尔时代突破经典计算机极限提供根本的解决方案. 量子纠缠在量子信息和量子计算中起着重要的作用, 利用量子态的纠缠性质可以实现许多经典信息理论中无法完成的任务. 量子纠缠作为资源在许多量子信息处理任务中起了关键作用^[1]. 纠缠程度不同的量子纠缠态, 在量子计算、远程传态、密集码、加密通信、错误信号修正、纯化、量子态的远程制备等信息处理中所起的作用也会有很大区别. 在过去的几十年里, 人们不断对量子纠缠现象进行研究并且取得了许多进展^[2~11].

随着研究的深入, 人们发现量子纠缠并不是所有使得量子计算机超越经典的原因. 1998年, Knill 和 Laflamme^[12] 提出了一个量子计算模型 (DQC1), 在这个模型中有 $n+1$ 个量子比特, 其中 n 个处在极大混态, 而有一个始终与另外 n 个是可分的, 也就是没有纠缠的, 并且这个计算模型能够完成具有比任何经典计算机指数加速的量子运算. 这启发了人们研究在量子理论中的各种关联度量的存在和作用问题, 2001年, Ollivier 和 Zurek^[13], Henderson 和 Vedral 等^[14] 指出量子纠缠并不能概括所有的非经典关联, 即使在可分态中包含的量子关联也不完全是经典的, 随后他们引入了一种新的非经典关联, 也就是量子失协 (quantum discord, QD) 的概念. 2008年, Datta 等^[15] 证明了在 DQC1 模型中量子失协与计算效率相关, 紧接着这个想法得到了实验的实现^[16]. 从那以后, 量子失协真正引起了人们的广泛关注^[17~40].

除了量子纠缠和量子失协, 人们又对不同物理系统中的非经典现象定义了其他的量子关联. 2002 年, 奥本海默等^[41]考虑从热库所能够提取的功, 假设从一个整体量子系统能够提取的功记为 W_t , 而一般认为量子系统处在距离遥远的情形, 我们能够进行的经典操作只有局域操作和经典通信 (LOCC), 在 LOCC 协议下, 能够从量子系统所提取出来的功记为 W_l , 那么这两个功之差定义为量子赤字 (work deficit, WD). 经典情形中测量不会对被测系统产生干扰. 例如, 在乒乓球比赛中, 乒乓球的运动状态并不会由观众和运动员对它进行测量而改变. 而对量子系统进行测量却会改变它原来的状态, 骆顺龙定义了基于测量诱导的扰动 (measurement-induced disturbance, MID)^[42] 和非局域量 (measurement-induced nonlocality, MIN)^[43]. MID 刻画了测量前后互信息的变化, MIN 刻画了局域不变测量对整体态的影响. 2010 年, Modi 等^[44]用相对熵定义了一种统一的量子关联度量. 给定量子态 ρ , 则 ρ 到与它最近的可分态 σ 之间的相对熵定义为纠缠, ρ 到与它最近的经典态 χ 之间的相对熵定义为相对熵量子失协, 而 σ 与 χ 之间的相对熵定义为量子 dissonance, 这是一种特别除去了纠缠的量子关联.

然而, 人们对量子关联的认识还只是在刚刚开始阶段, 尤其对区别于传统的量子纠缠的量子关联. 例如, 对于形成纠缠度, Wootters^[45]给出了一般 2×2 混态的解析公式, 对于量子失协, 目前能够解析计算的还只有 2 体的 Bell 对角态^[46], 一类 X 型 2×2 混态^[47~49], 以及某些高度对称的高维态等^[50]. 量子失协的几何度量是量化量子态到最近的经典态之间距离的一种量子关联. 对于任意 2×2 混态, 已经有解析公式可以计算量子失协的几何度量^[51], 但是对于更高维的系统, 现有的结果只是能得到一些上下界^[52].

本文主要介绍量子关联理论的一些基本概念和结果以及一些最新的进展. 主要包括量子失协的概念和计算, 以及量子关联在诸如 DQC1 算法, 量子态区分等量子算法中的应用, 以及用弱测量定义的量子关联.

2 量子失协的概念和计算

2.1 量子失协的概念

为了引进量子失协的概念, 我们先考虑经典的情形. 假设在经典情形下 Alice 和 Bob 对各自系统测量, 测量结果分别服从随机变量 X, Y 的概率分布, 他们取值 x, y 的概率分别为 p_x, p_y . 由经典信息理论, 随机变量 X 的不确定性, 也就是 X 所具有的信息可以用 Shannon 熵来表示, $H(X) = -\sum_x p_x \log p_x$, 其中 $\log$ 是以 2 为底的对数. X, Y 的互信息等于它们各自的信息减去二维随机变量 (X, Y) 的信息, 即 $I(A : B) = H(X) + H(Y) - H(XY)$, 利用 Bayes 条件概率公式 $p_{x|y} = p_{xy}/p_y$, 则 $H(Y|X) = \sum_x p_x H(Y|x)$,

$$H(Y|X) = \sum_x p_x H(Y|x) = -\sum_x p_x \sum_y p_{y|x} \log p_{y|x} = H(YX) - H(X), \quad (1)$$

由式 (1), 在经典的情形, 我们有 $I(A : B) = H(Y) - H(Y|X)$.

对于量子情形, 可以将 Shannon 熵换成冯诺依曼熵, 但是量子系统的测量会对于系统产生扰动, 测量以后的互信息是与测量基的选取有关的一个量, 也不一定等于测量前系统的互信息. 假设系统测量前的态为 ρ_{AB} , 在子系统 A 处执行一个 (POVM) 测量 $\{M_m^\dagger M_m\}$, 测量后系统状态为 $\rho'_{AB} = \sum_m M_m \otimes I \rho_{AB} M_m^\dagger \otimes I$, A 观测到结果 m 的概率为 $p_m = \text{tr}(M_m \otimes I \rho_{AB} M_m^\dagger \otimes I)$, 测量后 B 的态为 $\rho_{B|m} = \text{tr}_A(M_m \otimes I \rho_{AB} M_m^\dagger \otimes I)/p_m$, 经典条件熵为 $S(B|M_m^\dagger M_m) = \sum_m p_m S(\rho_{B|m})$ ^[9,10], 测量后态的互信息为 $J(B|M_m^\dagger M_m) = S(B) - S(B|M_m^\dagger M_m)$.

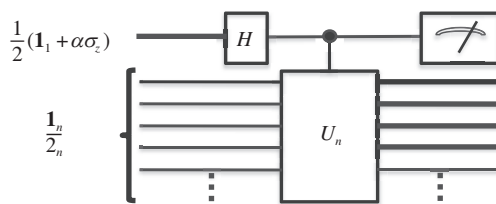


图 1 DQC1 量子线路

Figure 1 DQC1 quantum circuit

定义经典量子关联为取遍所有测量的极大量子互信息 $J(B|A) = \max_{\{M_m\}} J(B|M_m^\dagger M_m)$, 定义量子失协为原来系统的互信息与经典关联之差 $D(B|A) = I(B:A) - J(B|A)$. 由于在经典的情形互信息与条件互信息总是相同, 从量子失协的定义可以认为量子失协是关于量子态非经典性的一种度量.

2.2 量子失协的计算和解析公式

量子失协的计算是一个非常困难的问题, 一般的 2×2 系统尚没有一个解析公式. 2008 年, 骆顺龙给出了 2-qubit 的 Bell 对角态 $\rho = \frac{1}{4}(I + \sum_{i=1}^3 c_i \sigma_i \otimes \sigma_i)$ [46] 的量子失协的解析公式, Lang 等 [53] 在这个解析公式的基础上刻画了量子失协的常数曲面, 并进一步讨论了量子失协在演化下的冻结现象 [54]. 后来 Ali 等 [47] 给出一个算法, 可以计算几乎所有的 X 型密度矩阵的量子失协. 2011 年, 李波等 [48] 给出了一类 X 态的量子失协的解析公式, 并且刻画了这类态的常数曲面和在演化下的冻结现象.

借助于单配性关系, 2004 年, Koashi 和 Winter [55] ($K-W$ 关系) 给出了在三体纯态中经典关联和形成纠缠度的一个关系式. 对任何三体纯态 $|\psi_{ABC}\rangle$, 有 $E(B,C) + J(B|A) = S(B)$, 其中 $E(B,C)$ 为 B,C 系统的形成纠缠度, $J(B|A)$ 为 AB 系统中测 A 方向的经典关联. 借助于 $K-W$ 关系, 在三体纯态中, 我们有 AB 之间量子失协为 $D(B|A) = E(B,C) - S(B|A)$. 借助于纯化技术, 任何两体混态都能纯化成一个三体纯态, 任何秩为 2 的 $2 \times d$ 维混态可以纯化成 $2 \times 2 \times d$ 维纯态, 而 2×2 的形成纠缠度可以由 Wootters 公式计算 [45], 由此可以得到秩为 2 的 $2 \times d$ 维混态量子失协的计算公式 [56]. 对于更高维量子系统, 要计算量子失协非常困难, 现有的结果只是可以对某些具有高度对称性的态, 诸如高维 werner 态和 isotropic 态可以进行计算 [50]. 对于无限维物理系统, 现有的结果是可以得到 2-模高斯态的量子失协的计算公式 [57,58].

3 量子计算模型中的量子关联

3.1 单量子比特确定性量子计算模型 (DQC1)

我们首先回顾 Knill 和 Laflamme [12] 在 1998 年提出的 DQC1 模型. 如图 1(修改自文献 [59] 中的图 1), 原始量子态处在

$$\rho_0 = \rho_c^\alpha \otimes \frac{\mathbf{1}_n}{2^n}, \quad (2)$$

其中 $\rho_c^\alpha = \frac{1}{2}(\mathbf{1}_1 + \alpha \sigma_z)$, σ_z 为泡利矩阵, c 为控制量子比特, α 为参数. 通过 DQC1 算法, 量子末态 ρ_{n+1} 为

$$\rho_{n+1} = \frac{1}{2^n}(|0\rangle\langle 0| \otimes \mathbf{1}_n + |1\rangle\langle 1| \otimes \mathbf{1}_n + \alpha|0\rangle\langle 1| \otimes U_n^\dagger + \alpha|1\rangle\langle 0| \otimes U_n), \quad (3)$$

为了求 U 矩阵的迹, 分别对控制量子比特进行 σ_x, σ_y 测量, 由式 (3), 相应的期望值为 $\frac{1}{2^n} \text{Re}(\text{Tr} U_n)$, $-\frac{1}{2^n} \text{Im}(\text{Tr} U_n)$. 这个量子算法仅仅用一个量子比特测量了 U 矩阵的迹.

2008 年, Datta 等^[15] 研究了在这个量子算法中的量子关联问题. 首先在这个算法中, 控制量子比特和后面 n 个混态之间是没有量子纠缠的. 然而, 对任何 $\alpha > 0$, 末态总是具有非经典量子关联, 控制量子比特和受控系统之间的量子失协一直是存在的. 量子失协与量子纠缠一样, 作为一种非经典量子关联, 在量子算法中起了重要的作用. 甚至在这个算法中, 量子失协独立于量子纠缠而存在, 这使得人们对于量子关联作为资源在量子信息处理任务中扮演的角色又更向前迈进了一步, 很快, 这个算法得到了实验的支持^[16], 在这个实验中, 作者演示了绝大多数情况下完成 DQC1 算法, 没有量子纠缠, 但却需要大量量子失协, 除了 3 种情况, 而这 3 种情况是可以经典模拟的.

于长水等^[59] 最新研究表明, 在 DQC1 算法中, 一种称之为 entangling power 的量子关联在量子加速中起了很重要的作用. Entangling power 最初是为了度量一个 U 变换 (或量子演化) 作用在可分态上产生的平均纠缠而定义的一种量子关联^[60]. 在 DQC1 中, 如果将受控 n 量子比特作纯态系综分解, 则 U 变换作用在控制门和纯态上能够产生量子纠缠, 定义这种平均可以获得的最大纠缠为 DQC1 的 entangling power.

定义 DQC1 线路中的 entangling power 由下面给出:

$$E_p(\tilde{U}_n) = \max_{\{q_i, |\varphi_i\rangle\}} \sum_i q_i E[\tilde{U}_n(\rho_c \otimes |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|) \tilde{U}_n^\dagger], \quad (4)$$

这里 $\tilde{U}_n = (\mathbf{1}_1 \oplus U_n) \times (H \otimes \mathbf{1}_n)$, 并且 $\frac{1}{2^n} = \sum q_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$, $E[\cdot]$ 为一个合理的纠缠度量^[2].

取 $E[\cdot] = \sqrt{2(1 - \text{Tr} \rho_r^2)}$, 其中 ρ_r 为约化密度矩阵. DQC1 中的 entangling power 与 U 变换的标准迹有如下函数关系^[59]:

(I) 当 $\alpha = 1$ 时, $\rho_c^1 = |0\rangle\langle 0|$, DQC1 中 entangling power 与 U 变换的标准迹之间的关系为

$$E_p^1(\tilde{U}_n) = \sqrt{1 - \left| \frac{\text{Tr} U_n}{2^n} \right|^2}; \quad (5)$$

(II) 当 $0 < \alpha < 1$ 时, $\rho_c^\alpha = \frac{1}{2}(\mathbf{1}_1 + \alpha \sigma_z)$,

$$E_p^\alpha(\tilde{U}_n) = \alpha E_p^1(\tilde{U}_n) = \alpha \sqrt{1 - \left| \frac{\text{Tr} U_n}{2^n} \right|^2}. \quad (6)$$

式 (5), (6) 说明 DQC1 中的 entangling power 与 U 变换的标准迹是直接相关的, 对任何非平凡的 U_n , $U_n \neq \mathbf{1}_n e^{i\theta}$, DQC1 中的 entangling power 是非零的. 也能够实现 DQC1 中的量子优势.

Entangling power 与 DQC1 中的计算复杂度也是有关联的. 在 DQC1 中, 复杂度为 $O(U_n) = nL(\varepsilon)$, 其中 $L(\varepsilon)$ 为测量复杂性, 对于给定的标准偏差 ε , 依赖于控制量子比特的测量次数, n 是 DQC1 中量子比特的个数, 由于 DQC1 中计算 U 的迹, U 矩阵的阶数也就是输入量子比特的个数, 因此只需要分析 $L(\varepsilon)$ 的复杂性. 可以证明 entangling power 与测量复杂性 $L(\varepsilon)$ 之间的一个关系如下^[59]:

$$E_p^\alpha(\tilde{U}_n) \sim \sqrt{\alpha^2 - \frac{M}{L(\varepsilon)}}, \quad (7)$$

这里 M 是独立于 U_n 的一个量. 因此, 对于给定的 M , 测量复杂性 $L(\varepsilon)$ 是随着 entangling power 的变大而变大的, 它取决于 DQC1 中的 entangling power.

3.2 量子态区分模型

2011 年, Roa 等^[61~65]在 PRL 上考虑了一个辅助量子态区分模型. 在这个算法中, 量子纠缠和量子失协都是需要的, 然而在最优的情形, 却不需要量子纠缠而需要单边的量子失协^[66].

考虑这样一个量子态区分任务, 2 个非正交态 $|\psi_+\rangle$ 和 $|\psi_-\rangle$ 分别以先验概率 p_+ 和 p_- 制备. 我们的目的是要区分出这 2 个量子态, 我们知道对于非正交态, 这 2 个量子态是不能完全区分的. 为此考虑添加一个辅助系统 A 并且对整体应用酉变换 U ,

$$\begin{aligned} U|\psi_+\rangle|k\rangle_a &= \sqrt{1-|\alpha_+|^2}|+\rangle|0\rangle_a + \alpha_+|0\rangle|1\rangle_a, \\ U|\psi_-\rangle|k\rangle_a &= \sqrt{1-|\alpha_-|^2}|-\rangle|0\rangle_a + \alpha_-|0\rangle|1\rangle_a, \end{aligned} \quad (8)$$

这里 $|k\rangle_a$ 表示辅助系统, $\{|0\rangle_a, |1\rangle_a\}$ 为正交基, $|\pm\rangle \equiv (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$. 注意到初始态的内积是给定的, $\langle\psi_+|\psi_-\rangle = \alpha = |\alpha|e^{i\theta} = \alpha_+^* \alpha_-$, 这里 α_+^* 为 α_+ 的复共轭, θ 为 α 的相位. 添加辅助系统并且进行酉变换后, 量子系统由如下混态描述:

$$\rho_{|\alpha_+|} = p_+ U(|\psi_+\rangle\langle\psi_+| \otimes |k\rangle\langle k|) U^\dagger + p_- U(|\psi_-\rangle\langle\psi_-| \otimes |k\rangle\langle k|) U^\dagger. \quad (9)$$

现在对辅助系统进行 $\{|0\rangle\langle 0|, |1\rangle\langle 1|\}$ 方向测量, 则测量后辅助系统塌缩到 $\{|0\rangle\langle 0|\}$ 或者 $\{|1\rangle\langle 1|\}$. 当辅助系统塌缩到 $\{|0\rangle\langle 0|\}$ 时, 有式 (8), 主系统变为可以完全区分的正交态 $|\pm\rangle$, 当辅助系统塌缩到 $\{|1\rangle\langle 1|\}$ 时, 则主系统变为 $|0\rangle$, 区分任务失败. 区分成功的概率可以表示为

$$P(|\alpha_+|) = 1 - p_- \frac{|\alpha|^2}{|\alpha_+|^2} - p_+ |\alpha_+|^2, \quad (10)$$

这里对概率起作用的是有 α_+ , 也就是酉变换决定. 一般来说, 成功概率是既不为 0 也不为 1 的.

Roa 等在文献 [65] 中详细研究了量子关联在这个量子算法中的作用. 一般来说, 要辨别成功这 2 个非正交态, 需要依靠主系统和辅助系统之间存在量子关联, 量子纠缠, 量子失协和量子 dissonance 都是必不可少的. 由于是 2×2 量子比特系统, 量子纠缠可以由 Wootters 的 concurrence 公式给出^[45]. 当 $p_+ = p_- = \frac{1}{2}$, $|\alpha_+| = \sqrt{\alpha}$, $0 \leq |\alpha| \leq 1$ 时, 量子纠缠消失. 这种情况也是最优区分的情形. 然而通过利用 $K-W$ 关系计算, 即使是在纠缠消失的情形, 量子失协和量子 dissonance 均在算法中存在的.

后来我们对这个算法重新进行研究, 利用 PPT 判据进行量子纠缠刻画. 由于对于 2×2 情形, PPT 判据是量子态没有纠缠的充分必要条件. 为了寻找量子关联在这个算法中的作用, 首先利用 PPT 判据将这个量子态的纠缠剔除, 将量子态写成如下可分态的形式

$$\rho_{|\alpha_+|} = (1 - p_+ |\alpha_+|^2 - p_- |\alpha_-|^2) \rho_1^S \otimes |0\rangle\langle 0| + (p_+ |\alpha_+|^2 + p_- |\alpha_-|^2) |0\rangle\langle 0| \otimes \rho_2^A, \quad (11)$$

其中 ρ_1^S, ρ_2^A 分别为

$$\begin{aligned} \rho_1^S &= \frac{1}{1 - p_+ |\alpha_+|^2 - p_- |\alpha_-|^2} (p_+ (1 - |\alpha_+|^2) |+\rangle\langle +| + p_- (1 - |\alpha_-|^2) |-\rangle\langle -|), \\ \rho_2^A &= \frac{1}{p_+ |\alpha_+|^2 + p_- |\alpha_-|^2} ((p_+ |\alpha_+|^2 + p_- |\alpha_-|^2) |1\rangle\langle 1| \\ &\quad + \sqrt{2} p_+ \alpha_+ \sqrt{1 - |\alpha_+|^2} |1\rangle\langle 0| + \sqrt{2} p_+ \alpha_+^* \sqrt{1 - |\alpha_+|^2} |0\rangle\langle 1|). \end{aligned}$$

由式 (11), 以及量子失协为 0 的充分必要条件, 我们有 $[\rho_2^S, |0\rangle\langle 0|] = 0$, 当且仅当它的“右”量子失协为 0. 这需要 $\alpha_+ = 0$ 或者 $|\alpha_+| = 1$, 而 $|\psi_+\rangle$ 和 $|\psi_-\rangle$ 为不同的非正交态, 故这 2 个条件总是不满足的, 也就是说, 量子态的“右”总是非零的.

另一方面, $\rho_{|\alpha_+|}$ 没有“左”量子失协当且仅当 $[\rho_1^S, |0\rangle\langle 0|] = 0$, 即

$$p_+(1 - |\alpha_+|^2) = p_-(1 - |\alpha_-|^2), \quad (12)$$

则可以得到以下单个条件: (1) α 为实数, 且 $\alpha \geq 0$; (2) $p_+ = p_- = \frac{1}{2}$; (3) $|\alpha_+| = |\alpha_-| = \sqrt{|\alpha|} = \sqrt{\alpha}$. 这 3 个条件恰好是最优区分的情形, 因此我们发现了量子关联在这个算法中的单边作用.

4 弱测量与量子关联

从以上分析我们看出, 量子关联在量子信息处理中起作用的问题是很深刻的. 从最早人们认为仅仅量子纠缠是使得很多量子算法超越经典的观念, 到认为量子失协或者量子关联作为资源起着核心的作用, 再到认为 entangling power 在 DQC1 中起了很重要的作用. 以及量子关联在量子态区分中的不对称性作用. 这些量子算法以及其中的量子关联都启示我们问这样一个问题: 究竟量子态具备何种量子关联就能够超越经典情况? 有没有一个普适的量子关联度量?

最近, Singh 和 Pati^[67] 提出了基于弱测量的量子关联. 对于大家熟悉的量子失协的定义, 一般是取遍所有的 POVM 测量或者是投影测量. 基于弱测量量子关联的想法是: 用弱测量取代所有投影测量, 描述它的经典关联和量子失协 (称为超级量子失协), 超级量子失协定义为

$$D_w(\rho) = \min_{\{\pi_0, \pi_1\}} S_w(A|P^B(x)) - S(A|B),$$

其中 $S_w(A|P^B(x))$ 为测量后的条件熵, 且

$$P^B(\pm x) = \sqrt{\frac{1 \mp \tanh x}{2}} \pi_0 + \sqrt{\frac{1 \pm \tanh x}{2}} \pi_1.$$

Singh 和 Pati 证明了基于弱测量的量子失协能够揭示更多的量子关联, 对任意两体量子态 ρ , 弱测量诱导的超级量子失协 (SQD) 总是不小于投影测量诱导的普通量子失协, 即, $D_w(A|B) \geq D(A|B)$. 那么回到我们前面提出的问题, 是否 SQD 能够比普通量子失协在量子算法中更普遍存在呢? 为此我们先看 SQD 为零的充要条件, 我们有如下定理^[59].

定理 对任意 2×2 量子比特 ρ , 以下 7 个条件是等价的:

- (a) ρ 为一个乘积态;
- (b) ρ 没有经典量子关联;
- (c) ρ 没有超级量子失协;
- (d) ρ 没有量子互信息;
- (e) ρ 具有相同的量子失协和超级量子失协;
- (f) ρ 具有相同的量子失协和量子互信息;
- (g) ρ 具有相同的超级量子失协和量子互信息.

由于 SQD 只有在乘积态才消失, 上述定理说明 SQD 在量子系统中是普适存在的. 另一方面, 通常我们认为量子互信息 (也就是整体量子关联) 包含经典关联和量子关联, 然而定理却说明量子互信息和 SQD 为同时消失的. 这说明所有整体关联从某种意义上说都包含了量子关联. 以下我们考虑 SQD 在辅助量子态区分中的作用问题. 由于 $D_w(A|B) \geq D(A|B)$, 我们知道, 如果量子失协不为 0, 则 SQD

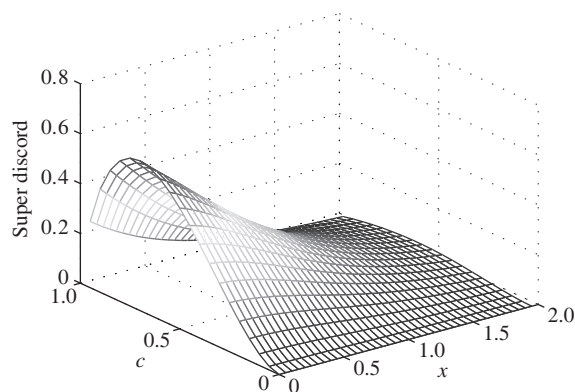


图 2 最优辅助态区分中超级量子失协关于 $\alpha_+ = c$, 测量强度为 x 的函数图象, 其中 $0 \leq \alpha_+ \leq 1$ 且 $0 \leq x \leq 2$

Figure 2 Super discord in the optimal case of assisted state discrimination as a function of $\alpha_+ = c$, and the strength x in the measurement process for $0 \leq \alpha_+ \leq 1$ and $0 \leq x \leq 2$ modified from Figure 1 in Ref. [68]

也不为 0. 故我们考虑左量子失协为 0 的最优情况, 即满足 (1) $\alpha \geq 0$; (2) $p_+ = p_- = \frac{1}{2}$; (3) $|\alpha_+| = |\alpha_-| = \sqrt{|\alpha|} = \sqrt{\alpha}$ 这 3 个条件. 设 $\alpha_+ = c$, 则式 (9) 中量子态 ρ 变为

$$\rho_c = \frac{1-c^2}{2}(I \otimes |0\rangle\langle 0|) + |0\rangle\langle 0| \otimes [c^2|1\rangle\langle 1| + \frac{\sqrt{2}c\sqrt{1-c^2}}{0}(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)].$$

在图 2(修改自文献 [68] 中的图 1) 中, 我们刻画了 SQD, $D_w(B|A)$ 关于 x 和 c 的图像. 对于所有 $0 \leq c \leq 1$, SQD 随着测量强度 x 的增加而递减, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 弱测量趋近于投影测量, 并且 SQD 也逐渐趋于 0, 也就是通常量子失协.

5 结束语

量子关联的研究还涉及许多有意义的论题. 例如局域操作能够增加量子关联 [24,29,30], 量子关联的操作解释 [69,70], 量子关联在环境下的演化 [18], 以及没有量子纠缠的非局域等问题 [71]. 最近, Gu 等 [37] 在 *Nature Physics* 上报了量子失协消耗的操作解释. Alice 制备一个量子态, 并将其中一个编码后先发送给 Bob, Bob 收到之后用一些解码协议恢复原来的信息. 假设 Bob 进行整体量子操作和局域操作时表现之差定义为量子优势, 他们证明了在这个协议中, 量子失协的消耗是量子优势的一个上界, 并且量子优势的下界也是量子失协的消耗减去经典关联. 这些量子关联的物理意义必将引起人们对量子关联更广泛和深入的研究.

致谢 感谢于长水、陈霖的有益讨论.

参考文献

- 1 Nielsen M A, Chuang I L. Quantum Computation and Quantum Information. England: Cambridge University Press, 2000
- 2 Horodecki R, Horodecki P, Horodecki M, et al. Quantum entanglement. Rev Mod Phys, 2009, 81: 865
- 3 Pan J W, Chen Z B, Lu C Y, et al. Multiphoton entanglement and interferometry. Rev Mod Phys, 2012, 84: 777

- 4 Yao X C, Wang T X, Chen H Z, et al. Experimental demonstration of topological error correction. *Nature*, 2012, 482: 489–494
- 5 Yin J, Ren J G, Lu H, et al. Quantum teleportation and entanglement distribution over 100-kilometre free-space channels. *Nature*, 2012, 488: 185–188
- 6 Lu C Y, Yang T, Pan J W. Experimental multiparticle entanglement swapping for quantum networking. *Phys Rev Lett*, 2009, 103: 020501
- 7 Tang J S, Li Y L, Xu X Y, et al. Realization of quantum Wheeler's delayed-choice experiment. *Nat Photonics*, 2012, 6: 602–606
- 8 Zheng S B, Guo G C. Efficient scheme for two-atom entanglement and quantum information processing in cavity QED. *Phys Rev Lett*, 2000, 85: 2392–2395
- 9 Cui J, Gu M, Kwek L C, et al. Quantum phases with differing computational power. *Nat Commun*, 2012, 3: 812
- 10 Zhang Y D, Wu S J, Hou G, et al. Quantum Information. Central China Normal University Press, 2002 [张永德, 吴盛俊, 侯广, 等. 量子信息论. 华中师范大学出版社, 2002]
- 11 Zeng J Y, Pei S Y, Long G L. Recent Progress in Quantum Mechanics. The second and fourth volume. Peking University Press, 2001 [曾谨言, 裴寿镛, 龙桂鲁. 量子力学新进展. 第二、四辑, 北京大学出版社, 2001]
- 12 Knill E, Laflamme R. Power of one bit of quantum information. *Phys Rev Lett*, 1998, 81: 5672
- 13 Ollivier H, Zurek W H. Quantum discord: a measure of the quantumness of correlations. *Phys Rev Lett*, 2001, 88: 017901
- 14 Henderson L, Vedral V. Classical, quantum and total correlations. *J Phys A*, 2001, 34: 6899
- 15 Datta A, Shaji A, Caves C M. Quantum discord and the power of one qubit. *Phys Rev Lett*, 2008, 100: 050502
- 16 Lanyon B P, Barbieri M, Almeida M P, et al. Experimental quantum computing without entanglement. *Phys Rev Lett*, 2008, 101: 200501
- 17 Modi K, Brodutch A, Cable H, et al. The classical-quantum boundary for correlations: discord and related measures. *Rev Mod Phys*, 2012, 84: 1655
- 18 Werlang T, Souza S, Fanchini F F, et al. Robustness of quantum discord to sudden death. *Phys Rev A*, 2009, 80: 024103
- 19 Ferraro A, Aolita L, Cavalcanti D, et al. Almost all quantum states have nonclassical correlations. *Phys Rev A*, 2010, 81: 052318
- 20 Mazzola L, Piilo J, Maniscalco S. Sudden transition between classical and quantum decoherence. *Phys Rev Lett*, 2010, 104: 200401
- 21 Fanchini F F, Werlang T, Brasil C A, et al. Non-Markovian dynamics of quantum discord. *Phys Rev A*, 2010, 81: 052107
- 22 Sarandy M S. Classical correlation and quantum discord in critical systems. *Phys Rev A*, 2009, 80: 022108
- 23 Wang B, Xu Z Y, Chen Z Q, et al. Non-Markovian effect on the quantum discord. *Phys Rev A*, 2010, 81: 014101
- 24 Streltsov A, Kampermann H, Bruß D. Linking quantum discord to entanglement in a measurement. *Phys Rev Lett*, 2011, 106: 160401
- 25 Streltsov A, Kampermann H, Bruß D. Behavior of quantum correlations under local noise. *Phys Rev Lett*, 2011, 107: 170502
- 26 Lu X M, Ma J, Xi Z J, et al. Optimal measurements to access classical correlations of two-bit states. *Phys Rev A*, 2011, 83: 012327
- 27 Liu B Q, Shao B, Li J G, et al. Quantum and classical correlations in the one-dimensional XY model with Dzyaloshinskii-Moriya interaction. *Phys Rev A*, 2011, 83: 052112
- 28 Zhou T, Cui J, Long G L. Measure of nonclassical correlation in coherence-vector representation. *Phys Rev A*, 2011, 84: 062105
- 29 Hu X Y, Fan H, Zhou D L, et al. Necessary and sufficient conditions for local creation of quantum correlation. *Phys Rev A*, 2012, 85: 032102
- 30 Hu X Y, Fan H, Zhou D L, et al. Quantum correlating power of local quantum channels. *Phys Rev A*, 2013, 87: 032340
- 31 Cui J, Fan H. Correlations in Grover search. *J Phys A*, 2010, 43: 045305

- 32 Hu M L, Fan H. Competition between quantum correlations in the quantum-memory-assisted entropic uncertainty relation. *Phys Rev A*, 2013, 87: 022314
- 33 Zhang G F, Fan H, Ji A L. Quantum correlations in spin models. *Ann Phys*, 2011, 326: 2694–2701
- 34 Shi M, Jiang F, Sun C, et al. On the optimal measurement for quantum discord of two-qubit states. *New J Phys*, 2011, 13: 073016
- 35 Shi M, Sun C, Jiang F, et al. Optimal measurement for quantum discord of two-qubit states. *Phys Rev A*, 2012, 85: 064104
- 36 Xu J S, Xu X Y, Li C F, et al. Experimental investigation of classical and quantum correlations under decoherence. *Nat Commun*, 2010, 1: 7
- 37 Gu M, Chrzanowski H M, Assad S M, et al. Operational significance of discord consumption: theory and experiment. *Nat Phys*, 2012, 8: 671
- 38 Dakic B, Lipp Y O, Ma X, et al. Quantum discord as resource for remote state preparation. *Nat Phys*, 2012, 8: 666–670
- 39 Merali Z. Quantum computing: the power of discord. *Nature*, 2011, 474: 24–26
- 40 Xu J S, Li C F, Zhang Y S, et al. Quantum correlation– Physics, 2010, 11 [许金时, 李传峰, 张永生, 等. 量子关联 – 物理, 2010 年 11 期]
- 41 Oppenheim J, Horodecki M, Horodecki P, et al. Thermodynamical approach to quantifying quantum correlations. *Phys Rev Lett*, 2002, 89: 180402
- 42 Luo S L. Using measurement-induced disturbance to characterize correlations as classical or quantum. *Phys Rev A*, 2008, 77: 022301
- 43 Luo S L, Fu S. Measurement-induced nonlocality. *Phys Rev Lett*, 2011, 106: 120401
- 44 Modi K, Paterek T, Son W, et al. Unified view of quantum and classical correlations. *Phys Rev Lett*, 2010, 104: 080501
- 45 Wootters W K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Phys Rev Lett*, 1998, 80: 2245
- 46 Luo S L. Quantum discord for two-qubit systems. *Phys Rev A*, 2008, 77: 042303
- 47 Ali M, Rau A R P, Alber G. Quantum discord for two-qubit X states. *Phys Rev A*, 2010, 81: 042105
- 48 Li B, Wang Z X, Fei S M. Quantum discord and geometry for a class of two-qubit states. *Phys Rev A*, 2011, 83: 022321
- 49 Chen Q, Zhang C J, Yu S X, et al. Quantum discord of two-qubit X states. *Phys Rev A*, 2011, 84: 042313
- 50 Chitambar E. Quantum correlations in high-dimensional states of high symmetry. *Phys Rev A*, 2012, 86: 032110
- 51 Dakic B, Vedral V, Brukner Č. Necessary and sufficient condition for nonzero quantum discord. *Phys Rev Lett*, 2010, 105: 190502
- 52 Luo S, Fu S. Geometric measure of quantum discord. *Phys Rev A*, 2010, 82: 034302
- 53 Lang M D, Caves C M. Quantum discord and the geometry of Bell-diagonal states. *Phys Rev Lett*, 2010, 105: 150501
- 54 You B, Cen L X. Necessary and sufficient conditions for the freezing phenomena of quantum discord under phase damping. *Phys Rev A*, 2012, 86: 012102
- 55 Koashi M, Winter S. Monogamy of quantum entanglement and other correlations. *Phys Rev A*, 2004, 69: 022309
- 56 Cen L X, Li X Q, Shao J, et al. Quantifying quantum discord and entanglement of formation via unified purifications. *Phys Rev A*, 2011, 83: 054101
- 57 Adesso G, Datta A. Quantum versus classical correlations in Gaussian states. *Phys Rev Lett*, 2010, 105: 030501
- 58 Giorda P, Paris M G A. Gaussian quantum discord. *Phys Rev Lett*, 2010, 105: 020503
- 59 Yu C S, Yi X X, Song H S, et al. Entangling power in deterministic quantum computation with one qubit. *Phys Rev A*, 2013, 87: 022322
- 60 Zanardi P, Zalka C, Faoro L. Entangling power of quantum evolutions. *Phys Rev A*, 2000, 62: 030301
- 61 Peres A. How to differentiate between non-orthogonal states. *Phys Lett A*, 1988, 128: 19
- 62 Dieks D. Overlap and distinguishability of quantum states. *Phys Lett A*, 1988, 126: 303–306
- 63 Ivanovic I D. How to differentiate between non-orthogonal states. *Phys Lett A*, 1988, 123: 257
- 64 Jaeger G, Shimony A. Optimal distinction between two non-orthogonal quantum states. *Phys Lett A*, 1995, 197: 83–87
- 65 Roa L, Retamal J C, Alid-Vaccarezza M. Dissonance is required for assisted optimal state discrimination. *Phys Rev Lett*, 2011, 107: 080401

- 66 Li B, Fei S M, Wang Z X, et al. Assisted state discrimination without entanglement. *Phys Rev A*, 2012, 85: 022328
- 67 Singh U, Pati A K. Super quantum discord with weak measurements. *arXiv preprint arXiv: 1211.0939*, 2012
- 68 Li B, Chen L, Fan H. Necessary and sufficient condition for vanishing super discord. *arXiv preprint arXiv: 1301.7500*, 2013
- 69 Cavalcanti D, Aolita L, Boixo S, et al. Operational interpretations of quantum discord. *Phys Rev A*, 2011, 83: 032324
- 70 Madhok V, Datta A. Interpreting quantum discord through quantum state merging. *Phys Rev A*, 2011, 83: 032323
- 71 Bennett C H, DiVincenzo D P, Fuchs C A, et al. Quantum nonlocality without entanglement. *Phys Rev A*, 1999, 59: 1070

Quantum correlation and its application

LI Bo^{1,2} & FAN Heng^{2*}

1 Department of Mathematics and Computer, Shangrao Normal University, Shangrao 334001, China;

2 Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China

*E-mail: hfan@iphy.ac.cn

Abstract Quantum correlation is an important non-classical feature in quantum system, entanglement is regarded as one of the most important quantum correlations in quantum information processing. Many non-classical phenomena other than entanglement have been discovered in recent years. In this paper, we discuss quantum discord and some of the related correlations, and their application in quantum physics.

Keywords quantum correlation, quantum discord, quantum entanglement, DQC1, state discrimination



LI Bo was born in Shangrao, Jiangxi Province, in October 1978. He received the Ph.D. degree in 2011 from the Capital Normal University, Beijing. Currently, he is an associate professor at Shangrao Normal University. His research interests include quantum information, quantum entanglement, and quantum correlation.



FAN Heng was born in 1968. He received the Ph.D. degree in physics from the Northwest University, Xian, China in 1996. Currently, he is a research Fellow at the Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences. His research interests include quantum information, quantum computation, and theoretical physics.