



论文

Riemann-Cartan 空间自平行运动的非完整映射理论

郭永新^{①*}, 刘畅^②, 王勇^③, 刘世兴^①, 常鹏^②

① 辽宁大学物理学院, 沈阳 110036;

② 北京理工大学宇航学院, 北京 100081;

③ 广东医学院基础学院, 东莞 523808

* E-mail: yxguo@lnu.edu.cn

收稿日期: 2009-12-31; 接受日期: 2010-03-05

国家自然科学基金(批准号: 10932002, 10872084, 10472040)、辽宁省优秀青年科研人才培养基金(编号: 3040005)、辽宁省高校科研基金(编号: 2008S098)、辽宁省高等学校优秀人才支持计划(编号: 2008RC20)和辽宁省重点实验室建设项目(编号: 2008403009)资助

摘要 利用非完整映射方法, 从一个已知 Riemann-Cartan 空间构造另一个嵌入其中的 Riemann-Cartan 空间, 这包括了从欧式空间构造 Weitzenböck 空间, 从 Riemann 空间构造 Riemann-Cartan 空间的非完整映射方法. 基于这个映射方法, 研究两个 Riemann-Cartan 空间自平行线之间的非完整对应关系, 特别是一个 Riemann-Cartan 空间的自平行线可以对应于另一个 Riemann 空间的测地线, 一个 Weitzenböck 空间的自平行线可以对应于欧氏空间的测地线. 由 Lagrange-d'Alembert 原理可知, Riemann-Cartan 空间上的动力学系统的运动方程为该空间的自平行线方程, 作为应用实例, 研究无旋粒子、Chaplygin 非完整系统、定点转动刚体在有挠空间中的自平行运动.

关键词 非完整映射, Riemann-Cartan 空间, 联络, 挠率, 自平行线

PACS: 02.40.Yg, 45.20.Jj, 02.40.Ky, 02.40.Hw, 04.62.+v

Riemann-Cartan 空间是一种既有曲率又有挠率的非欧空间, 度规和联络分别独立地刻画其空间的长度和平行移动法则, 当挠率为零时, 它退化为 Riemann 空间, 而当曲率为零时, 它退化为 Weitzenböck 空间. 挠率的作用导致空间的测地线和自平行线分离, 即“短程线”与“直线”不一致. 最著名的 Riemann-Cartan 几何学的应用实例是 Einstein-Cartan 引力理论^[1-4], 这种引力理论是对经典广义相对论的推广, 时空的几何性质是由物质的能量动量和自旋决定的, 自旋决定了时空的挠率. Einstein-Cartan 引

力理论最早由 Cartan 于 1922 年提出来^[5], 当时还没有发现物质的自旋角动量. 1928 年 Einstein 利用标架场方法推广广义相对论的绝对平行理论中也隐含了时空挠率^[6]. Cartan 的工作是受到 Cosserat 兄弟 1909 年关于晶体缺陷的挠率理论的影响, 连续统的缺陷所引起其内部的应力张量改变了介质的理想有序结构, 使之重新排列其结构以达到内部平衡, 他们的研究工作既考虑了连续统介质的作用力应力张量, 又考虑了力矩应力张量^[7], 这是最早的 Riemann-Cartan 几何学的物理应用. 1950 年代以后, 空间挠率理论在

连续统的位错理论中得到了系统的应用^[8~12]. Cartan 的重要工作在 1950 年代 Utiyama, Sciama 和 Kibble^[13~15]独立提出具有挠率和自旋的引力规范理论之后才被认可,从此 Einstein-Cartan 引力理论成为现代引力理论的重要方向^[16~21]. Einstein-Cartan 引力理论作为时空的缺陷理论与连续统的缺陷理论具有相似的基本方程^[22,23]. 这种相似性也可以推广到作为时空缺陷的宇宙弦与固体连续统缺陷之间的相似性^[24].

最新的 Riemann-Cartan 几何学的应用实例是非完整系统动力学^[25~27]和刚体力学^[28]. 与完整系统不同,非完整系统的位形空间不再是仅仅弯曲的 Riemann 空间. 其位形受到非完整约束的影响而扭曲出现挠率. 对于线性齐次非完整系统,即 Chaplygin 系统,其位形空间恰是 Riemann-Cartan 空间,约束的非完整性决定了其位形空间的挠率,从而导致该系统相空间的辛结构被破坏. 描述刚体的定点转动可以用欧拉角坐标和相应的广义速度,也可用角速度和相应的准坐标^[29],前者的位形空间是 Riemann 空间,而后者则是 Riemann-Cartan 空间.

根据物理学原理,在 Riemann-Cartan 空间中物质的惯性运动方程是该空间的自平行线方程,而非测地线方程. 如无旋粒子在有挠时空中沿着其自平行线作惯性运动^[30~32];非完整系统的 Chaplygin 方程、刚体定点转动的 Euler 方程都是 Riemann-Cartan 空间的自平行线方程^[26,28]. 如何构造 Riemann-Cartan 空间是研究若干具有奇异特性的物理系统运动的关键,最简捷的方法是利用系统位形空间到已知简单空间的嵌入映射来实现 Riemann-Cartan 空间的构造. 由于约束的非完整性、连续统的缺陷、物质的自旋、准坐标的不可积等奇异性在几何上表现为空间的挠率,所以这种映射应该是不可积映射,即非完整映射^[33~36]. 如从无曲无挠的 Minkowski 时空出发,借助于最简单的非完整映射所得到的空间是有挠无曲的 Weitzenböck 时空^[37];从有曲无挠的(赝) Riemann 空间出发,经过最简单非完整映射所得到的空间便是(赝) Riemann-Cartan 空间^[26,28]. 从这种意义上说,利用活动标架法构造有挠空间的方法也是一种非完整映射法. 在非完整映射下,无挠空间的测地线映射为有挠空间的自平行线,也就是说,无挠空间的最优惯性运动映射成有挠空间的非优化惯性运动. 所以

这是一种符合物理原理的映射.

本文将一个空间嵌入到另一个空间的非完整映射方法推广为 Riemann-Cartan 空间之间的非完整映射,其特例包括从一个有挠率无曲率的 Weitzenböck 空间到一个欧氏空间的映射,从 Riemann-Cartan 空间到 Riemann 空间的映射,以及从 Riemann-Cartan 空间直接到欧氏空间的非完整映射. 利用非完整映射方法,研究 Riemann-Cartan 空间中两类特殊曲线:测地线和自平行线之间的映射关系,一个 Riemann-Cartan 空间的测地线可以非完整地映射到另一个 Riemann-Cartan 空间的自平行线. 由 Riemann-Cartan 空间中的 Lagrange-d'Alembert 原理和 Hamilton 原理可以分别导出该空间的自平行线方程和测地线方程,所以自平行线方程应该是动力学系统在 Riemann-Cartan 空间中的演化方程. 作为理论的应用,本文研究三个实际例子,包括 Chaplygin 非完整系统的运动、刚体的定点转动、无旋粒子在有挠时空中的运动,结果表明,Chaplygin 非完整系统的惯性运动方程为 Riemann-Cartan 空间的自平行线方程;描述刚体运动的 Euler 角构成的位形空间是 Riemann 空间,而对应于角速度的准坐标空间是一个 Riemann-Cartan 空间,刚体定点转动的 Euler 方程在 Euler 角空间是短程线方程,而在对应于角速度的准坐标空间便是自平行线方程;无旋粒子在 Riemann-Cartan 时空中的运动也是自平行线.

为方便起见,文中采用爱因斯坦求和约定,并对指标取值范围作如下规定:拉丁字母 $i, j = 1, 2, \dots, n$; 罗马字母 $\mu, \nu, \rho, \sigma, \lambda = 1, 2, \dots, m$; 希腊字母 $\alpha, \beta = m+1, m+2, \dots, n$.

1 非完整映射与 Riemann-Cartan 空间的构造

考虑一个 n 维 Riemann-Cartan 空间 W , TW 为其切空间, $\{w^i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 为其局部广义坐标, $\dot{w}^i$ 为切空间广义速度的分量. 设该空间的度规和联络分别为 g_{ij} 和 Γ_{ij}^k , 二者相容,即 $g_{ij;k} = g_{ij,k} - g_{jl}\Gamma_{ik}^l - g_{il}\Gamma_{jk}^l$. 由度规决定的 Christoffel 联络或者度规联络为 $\left\{ \begin{smallmatrix} k \\ ij \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{kl} (g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l})$, 其中

$$g_{ij,l} = \partial_l g_{ij} = \partial g_{ij} / \partial w^l.$$

由联络 Γ_{ij}^k 确定的挠率为 $S_{ij}^k = \Gamma_{[ij]}^k = \frac{1}{2}(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k)$, 曲率为 $R_{jkl}^i = -\Gamma_{jk,l}^i + \Gamma_{jl,k}^i - \Gamma_{ml}^i \Gamma_{jk}^m + \Gamma_{mk}^i \Gamma_{jl}^m$. 由于挠率的存在, Riemann-Cartan 空间的自平行线和测地线不一致, 二者分别为

$$\ddot{w}^k + \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} \dot{w}^i \dot{w}^j = 0, \quad (1a)$$

$$\ddot{w}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{w}^i \dot{w}^j = 0. \quad (1b)$$

联络 Γ_{ij}^k 和 Christoffel 联络 $\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}$ 之间满足关系:

$$\Gamma_{ij}^k = \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} + K_{ij}^k, \quad (2)$$

其中 $K_{ij}^k = S_{ij}^k + S_{ji}^k + S_{ij}^k$, $S_{ji}^k = g^{kl} S_{jil}$, $S_{jil} = g_{jk} S_{il}^k$. 可见, 当挠率为零时, 该空间“短”和“直”的概念一致.

假设存在另一个空间 Q , 其局部广义坐标表示为 $\{q^\mu\} (\mu=1, 2, \dots, m)$, 相应的广义速度分量为 $\{\dot{q}^\mu\}$. 若 V^i 和 V^μ 分别为空间 W 和 Q 的向量场的分量, 我们假定二者之间存在一个不可积即非完整映射:

$$V^i = e_\mu^i V^\mu, \quad (3)$$

则相应的广义速度之间的非完整映射自然为

$$\dot{w}^i = e_\mu^i \dot{q}^\mu. \quad (4)$$

下面要证明对于一般情况, 我们可以由(3)或(4)式来构造空间 Q 的 Riemann-Cartan 结构.

定义空间 Q 的度规为

$$g_{\mu\nu} = (e_\mu, e_\nu) = g_{ij} e_\mu^i e_\nu^j. \quad (5)$$

这样, 两个空间中的向量 V 和 U 的标量积可以表示为

$$(U, V) = g_{ij} U^i V^j = g_{\mu\nu} U^\mu V^\nu. \quad (6)$$

为了求出空间 Q 的联络, 我们假设空间 W 中的

向量 V^i 的绝对导数 $\frac{DV^i}{Dt}$ 和空间 Q 中向量 V^μ 的绝对导数 $\frac{\mathcal{D}V^\mu}{\mathcal{D}t}$ 之间存在与关系式(3)相协变的关系:

$$\frac{DV^i}{Dt} = e_\mu^i \frac{\mathcal{D}V^\mu}{\mathcal{D}t}, \quad (7)$$

其中

$$\frac{DV^i}{Dt} = \frac{dV^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i V^j \dot{w}^k, \quad \frac{\mathcal{D}V^\mu}{\mathcal{D}t} = \frac{dV^\mu}{dt} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu V^\nu \dot{q}^\sigma. \quad (8)$$

将(3), (4)和(8)式代入(7)式, 可以求出空间的联络为

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = g^{\rho\sigma} g_{il} e_\sigma^l (e_{\mu,\nu}^i + e_\mu^j e_\nu^k \Gamma_{jk}^i), \quad (9)$$

其中 $g^{\rho\sigma} = g_{\rho\sigma}^{-1}$. 相应的挠率为

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu}^\rho &= \frac{1}{2}(\Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\mu}^\rho) = \Gamma_{[\mu\nu]}^\rho \\ &= g^{\rho\sigma} g_{il} e_\sigma^l (e_{[\mu,\nu]}^i + e_\mu^j e_\nu^k \Gamma_{jk}^i) \\ &= g^{\rho\sigma} g_{il} e_\sigma^l (e_{[\mu,\nu]}^i + e_\mu^j e_\nu^k S_{jk}^i). \end{aligned} \quad (10)$$

$[\cdot, \cdot]$ 表示反对称运算. 为了计算联络 $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ 的曲率

$$R_{\nu\sigma\rho}^\mu = -\Gamma_{\nu\sigma,\rho}^\mu + \Gamma_{\nu\rho,\sigma}^\mu - \Gamma_{\lambda\rho}^\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu \Gamma_{\nu\rho}^\lambda, \quad (11)$$

设

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^{*\rho} + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho, \quad (12)$$

其中

$$\Gamma_{\mu\nu}^{*\rho} = g^{\rho\sigma} g_{il} e_\sigma^l e_{\mu,\nu}^i, \quad \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho = g^{\rho\sigma} g_{il} e_\sigma^l e_\mu^j e_\nu^k \Gamma_{jk}^i, \quad (13)$$

我们证明, 曲率(11)式满足

$$\begin{aligned} R_{\nu\sigma\rho}^\mu &= -\tilde{\Gamma}_{\nu\sigma,\rho}^\mu + \tilde{\Gamma}_{\nu\rho,\sigma}^\mu - \tilde{\Gamma}_{\lambda\rho}^\mu \tilde{\Gamma}_{\nu\sigma}^\lambda + \tilde{\Gamma}_{\lambda\sigma}^\mu \tilde{\Gamma}_{\nu\rho}^\lambda - \Gamma_{\lambda\rho}^{*\mu} \tilde{\Gamma}_{\nu\sigma}^\lambda \\ &\quad - \tilde{\Gamma}_{\lambda\rho}^{*\mu} \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\lambda\sigma}^{*\mu} \tilde{\Gamma}_{\nu\rho}^\lambda + \tilde{\Gamma}_{\lambda\sigma}^{*\mu} \Gamma_{\nu\rho}^\lambda. \end{aligned} \quad (14)$$

要证明此式, 关键是要验证 $R_{\nu\sigma\rho}^{*\mu}(\Gamma^*) = 0$ 如下:

$$\begin{aligned} R_{\nu\sigma\rho}^{*\mu} &= -\Gamma_{\nu\sigma,\rho}^{*\mu} + \Gamma_{\nu\rho,\sigma}^{*\mu} - \Gamma_{\lambda\rho}^{*\mu} \Gamma_{\nu\sigma}^{*\lambda} + \Gamma_{\lambda\sigma}^{*\mu} \Gamma_{\nu\rho}^{*\lambda} \\ &= -\left(g^{\mu\lambda} g_{il} e_\sigma^l e_{\nu,\sigma}^i\right)_{,\rho} + \left(g^{\mu\lambda} g_{il} e_\sigma^l e_{\nu,\sigma}^i\right)_{,\sigma} \\ &\quad - \left(g^{\mu\tau} g_{il} e_\tau^l e_{\lambda,\rho}^i\right) \left(g^{\lambda\xi} g_{jk} e_\xi^k e_{\nu,\sigma}^j\right) \\ &\quad + \left(g^{\mu\tau} g_{il} e_\tau^l e_{\lambda,\sigma}^i\right) \left(g^{\lambda\xi} g_{jk} e_\xi^k e_{\nu,\rho}^j\right) \\ &= -g^{\mu\lambda} g_{il} e_{\lambda,\rho}^l e_{\nu,\sigma}^i - g_{,\rho}^{\mu\lambda} g_{il} e_\lambda^l e_{\nu,\sigma}^i - g^{\mu\lambda} e_\lambda^l e_{\nu,\sigma}^i g_{il,\rho} \\ &\quad + g^{\mu\lambda} g_{il} e_{\lambda,\sigma}^l e_{\nu,\rho}^i + g_{,\sigma}^{\mu\lambda} g_{il} e_\lambda^l e_{\nu,\rho}^i \\ &\quad + g^{\mu\lambda} e_\lambda^l e_{\nu,\rho}^i g_{il,\sigma} - \left(g^{\mu\tau} g_{il} e_\tau^l e_{\lambda,\rho}^i\right) \left(g^{\lambda\xi} g_{jk} e_\xi^k e_{\nu,\sigma}^j\right) \\ &\quad + \left(g^{\mu\tau} g_{il} e_\tau^l e_{\lambda,\sigma}^i\right) \left(g^{\lambda\xi} g_{jk} e_\xi^k e_{\nu,\rho}^j\right). \end{aligned} \quad (15)$$

由于坐标变换关系

$$\frac{\partial w^i}{\partial q^\mu} = \frac{\partial w^i}{\partial \dot{q}^\mu} = e_\mu^i, \quad \frac{\partial}{\partial q^\mu} = \frac{\partial w^i}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial w^i} = e_\mu^i \frac{\partial}{\partial w^i} \quad (16)$$

得到度规微分 $g_{ij,\nu} = e_\nu^k g_{ij,k}$. 由 $g_{,\rho}^{\mu\tau} g_{\tau\lambda} = -g^{\mu\tau} g_{\tau\lambda,\rho} = -g^{\mu\tau} g_{il} e_\tau^l e_{\lambda,\rho}^i - g^{\mu\tau} g_{il} e_{\tau,\rho}^l e_\lambda^i - g^{\mu\tau} e_\tau^l e_\lambda^i e_{\rho,k}^k g_{il,k}$ 可得

$$\begin{aligned} g^{\mu\tau} g_{il} e_\tau^l e_{\lambda,\rho}^i &= -g_{,\rho}^{\mu\tau} g_{\tau\lambda} - g^{\mu\tau} g_{il} e_{\tau,\rho}^l e_\lambda^i \\ &\quad - g^{\mu\tau} e_\tau^l e_\lambda^i e_{\rho,k}^k g_{il,k}. \end{aligned} \quad (17)$$

代入(15)式, 并利用 $g^{\lambda\xi} e_\lambda^l e_\xi^k = g^{ik}$, $g^{\lambda\xi} g_{\tau\lambda} = \delta_\tau^\xi$, $g^{ik} g_{il} = \delta_l^k$, 得到

$$R_{\nu\sigma\rho}^{*\mu} = -g^{\mu\lambda} g_{il} e_{\lambda,\rho}^l e_{\nu,\sigma}^i - g_{,\rho}^{\mu\lambda} g_{il} e_\lambda^l e_{\nu,\sigma}^i - g^{\mu\lambda} e_\lambda^l e_{\nu,\sigma}^i e_{\rho,k}^k g_{il,k}$$

$$\begin{aligned}
& +g^{\mu\lambda}g_{il}e_{\lambda,\sigma}^le_{v,\rho}^i+g^{\mu\lambda}g_{il}e_{\lambda,\sigma}^le_{v,\rho}^i+g^{\mu\lambda}e_{\lambda,\sigma}^le_{v,\rho}^ie_{\sigma}^kg_{il,k}\\
& +\left(g^{\mu\tau}g_{\tau\lambda}+g^{\mu\tau}g_{il}e_{\tau,\rho}^le_{\lambda}^i+g^{\mu\tau}e_{\tau}^le_{\lambda}^ie_{\rho}^kg_{il,k}\right)\left(g^{\lambda\xi}g_{jk}e_{\xi}^ke_{v,\sigma}^j\right)\\
& -\left(g^{\mu\tau}g_{\tau\lambda}+g^{\mu\tau}g_{il}e_{\tau,\sigma}^le_{\lambda}^i+g^{\mu\tau}e_{\tau}^le_{\lambda}^ie_{\sigma}^kg_{il,k}\right)\left(g^{\lambda\xi}g_{jk}e_{\xi}^ke_{v,\rho}^j\right)\\
& =-g^{\mu\lambda}g_{il}e_{\lambda,\rho}^le_{v,\sigma}^i-g^{\mu\lambda}g_{il}e_{\lambda,\sigma}^le_{v,\rho}^i-g^{\mu\lambda}e_{\lambda,\sigma}^le_{v,\rho}^ie_{\sigma}^kg_{il,k}\\
& +g^{\mu\lambda}g_{il}e_{\lambda,\sigma}^le_{v,\rho}^i+g^{\mu\lambda}g_{il}e_{\lambda,\sigma}^le_{v,\rho}^i+g^{\mu\lambda}e_{\lambda,\sigma}^le_{v,\rho}^ie_{\sigma}^kg_{il,k}\\
& +g^{\mu\tau}g_{jk}e_{\tau}^ke_{v,\sigma}^j+g^{\mu\tau}g_{il}g_{jk}e_{\tau}^le_{\lambda}^ie_{\xi}^ke_{\tau,\rho}^je_{v,\sigma}^j\\
& +g^{\mu\tau}e_{\tau}^le_{\rho}^ke_{\lambda}^ig_{\xi}^ke_{jk}e_{v,\sigma}^j-g^{\mu\tau}g_{jk}e_{\tau}^ke_{v,\rho}^j\\
& -g^{\mu\tau}g_{il}g_{jk}e_{\tau}^le_{\lambda}^ig_{\xi}^ke_{\tau,\sigma}^je_{v,\rho}^j-g^{\mu\tau}e_{\tau}^le_{\rho}^ke_{\lambda}^ig_{\xi}^ke_{jk}e_{v,\rho}^je_{\sigma}^kg_{il,k}\\
& =-g^{\mu\lambda}g_{il}e_{\lambda,\rho}^le_{v,\sigma}^i+g^{\mu\lambda}g_{il}e_{\lambda,\sigma}^le_{v,\rho}^i+g^{\mu\tau}g_{il}g_{jk}e_{\tau}^le_{\lambda}^ig_{\xi}^ke_{\tau,\rho}^je_{v,\sigma}^j\\
& -g^{\mu\tau}g_{il}g_{jk}e_{\tau}^le_{\lambda}^ig_{\xi}^ke_{\tau,\sigma}^je_{v,\rho}^j-g^{\mu\lambda}e_{\lambda,\sigma}^le_{v,\rho}^ie_{\sigma}^kg_{il,k}+g^{\mu\lambda}e_{\lambda,\sigma}^le_{v,\rho}^ie_{\sigma}^kg_{il,k}\\
& +g^{\mu\tau}e_{\tau}^le_{\rho}^ke_{\lambda}^ig_{\xi}^ke_{jk}e_{v,\sigma}^j-g^{\mu\tau}e_{\tau}^le_{\rho}^ke_{\lambda}^ig_{\xi}^ke_{jk}e_{v,\rho}^je_{\sigma}^kg_{il,k}\\
& =0,
\end{aligned} \tag{18}$$

(9)式所表达的联络是度规联络, 即

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu;\sigma} &= g_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}g_{\rho\nu} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}g_{\mu\rho} \\
&= (g_{ij}e_{\mu}^je_{\nu}^j)_{,\sigma} - g^{\rho\lambda}g_{il}e_{\lambda}^l(e_{\mu,\sigma}^i + e_{\mu}^je_{\sigma}^k\Gamma_{jk}^i)(g_{mn}e_{\rho}^me_{\nu}^n) \\
&\quad - g^{\rho\lambda}g_{il}e_{\lambda}^l(e_{\nu,\sigma}^i + e_{\nu}^je_{\sigma}^k\Gamma_{jk}^i)(g_{mn}e_{\rho}^me_{\mu}^n) \\
&= (g_{ij}e_{\mu}^je_{\nu}^j)_{,\sigma} - g^{lm}g_{il}g_{mn}e_{\nu}^n(e_{\mu,\sigma}^i + e_{\mu}^je_{\sigma}^k\Gamma_{jk}^i) \\
&\quad - g^{lm}g_{il}g_{mn}e_{\mu}^m(e_{\nu,\sigma}^i + e_{\nu}^je_{\sigma}^k\Gamma_{jk}^i) \\
&= (g_{ij}e_{\mu}^je_{\nu}^j)_{,\sigma} - g_{il}e_{\nu}^l(e_{\mu,\sigma}^i + e_{\mu}^je_{\sigma}^k\Gamma_{jk}^i) \\
&\quad - g_{il}e_{\mu}^l(e_{\nu,\sigma}^i + e_{\nu}^je_{\sigma}^k\Gamma_{jk}^i) \\
&= e_{\mu}^ie_{\nu}^jg_{ij,\sigma} - g_{il}e_{\nu}^le_{\sigma}^je_{\mu}^k\Gamma_{jk}^i - g_{il}e_{\mu}^le_{\sigma}^je_{\nu}^k\Gamma_{jk}^i \\
&= e_{\mu}^ie_{\nu}^je_{\sigma}^k(g_{ij,k} - g_{ij}\Gamma_{ik}^l - g_{il}\Gamma_{jk}^l) \\
&= e_{\mu}^ie_{\nu}^je_{\sigma}^kg_{ij;k} \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{19}$$

据此, 可以断定该空间的联络满足 Riemann-Cartan 空间中联络的通常表示

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\} + S_{\mu\nu}^{\rho} + S_{\nu\mu}^{\rho} + S_{\mu\nu}^{\rho} = \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\} + K_{\mu\nu}^{\rho}, \tag{20}$$

其中

$$K_{\mu\nu}^{\rho} = S_{\mu\nu}^{\rho} + S_{\nu\mu}^{\rho} + S_{\mu\nu}^{\rho}, \tag{21a}$$

$$S_{\nu\mu}^{\rho} = g^{\rho\lambda}S_{\nu\mu\lambda}, \tag{21b}$$

$$S_{\nu\mu\lambda} = g_{\nu\sigma}S_{\mu\lambda}^{\sigma}, \tag{21c}$$

$$\left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(g_{\lambda\nu,\mu} + g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda}), \tag{21d}$$

利用度规、挠率的定义可以得到如下关系式:

$$S_{\nu\mu}^{\rho} + S_{\mu\nu}^{\rho} = -g^{\rho\sigma}g_{ij}\left(e_{\nu}^ie_{[\sigma,\mu]}^j + e_{\mu}^ie_{[\sigma,\nu]}^j\right) + g^{\rho\sigma}(S_{kij} + S_{ikj})e_{\mu}^ie_{\nu}^ke_{\sigma}^j, \tag{22a}$$

$$\left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\} = g^{\rho\sigma}g_{ij}\left(e_{\sigma}^ie_{(\mu,\nu)}^j + e_{\nu}^ie_{[\sigma,\mu]}^j + e_{\mu}^ie_{[\sigma,\nu]}^j\right) + g^{\rho\sigma}g_{ij}\left\{ \begin{smallmatrix} l \\ ik \end{smallmatrix} \right\}e_{\mu}^ie_{\nu}^ke_{\sigma}^j, \tag{22b}$$

其中 $S_{kij} = g_{kl}S_{ij}^l$. 两个式子相加, 并考虑空间 W 中的关系:

$$g_{ij}\Gamma_{(ik)}^l = S_{kij} + S_{ikj} + g_{ij}\left\{ \begin{smallmatrix} l \\ ik \end{smallmatrix} \right\} \tag{23}$$

得到

$$\begin{aligned}
& g^{\rho\sigma}g_{ij}e_{\sigma}^ie_{(\mu,\nu)}^j + g^{\rho\sigma}g_{ij}\Gamma_{(ik)}^le_{\mu}^ie_{\nu}^ke_{\sigma}^j \\
&= S_{\nu\mu}^{\rho} + S_{\mu\nu}^{\rho} + \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\}.
\end{aligned} \tag{24}$$

由(9)和(10)式得到

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} &= \Gamma_{(\mu\nu)}^{\rho} + S_{\mu\nu}^{\rho} \\
&= S_{\mu\nu}^{\rho} + g^{\rho\sigma}g_{ij}e_{\sigma}^ie_{(\mu,\nu)}^j + g^{\rho\sigma}g_{ij}\Gamma_{(ik)}^le_{\mu}^ie_{\nu}^ke_{\sigma}^j.
\end{aligned} \tag{25}$$

将(24)式代入即可得到(20)式.

将(20)式代入曲率(11)式, 空间 Q 的曲率可以表示为

$$\begin{aligned}
R_{\nu\sigma\rho}^{\mu} &= -\left\{ \begin{smallmatrix} \mu \\ \nu\sigma \end{smallmatrix} \right\}_{,\rho} + \left\{ \begin{smallmatrix} \mu \\ \nu\rho \end{smallmatrix} \right\}_{,\sigma} - \left\{ \begin{smallmatrix} \mu \\ \lambda\rho \end{smallmatrix} \right\}\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \nu\sigma \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} \mu \\ \lambda\sigma \end{smallmatrix} \right\}\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \nu\rho \end{smallmatrix} \right\} \\
&\quad - K_{\lambda\rho}^{\mu}\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \nu\sigma \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} \mu \\ \lambda\rho \end{smallmatrix} \right\}K_{\nu\sigma}^{\lambda} + K_{\lambda\rho}^{\mu}\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \nu\rho \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} \mu \\ \lambda\sigma \end{smallmatrix} \right\}K_{\nu\rho}^{\lambda} \\
&\quad - K_{\nu\sigma,\rho}^{\mu} + K_{\nu\rho,\sigma}^{\mu} - K_{\lambda\rho}^{\mu}K_{\nu\sigma}^{\lambda} + K_{\lambda\sigma}^{\mu}K_{\nu\rho}^{\lambda},
\end{aligned} \tag{26}$$

特别地, 当 $S_{\nu\mu\lambda}$ 是完全反对称时, $K_{\mu\nu}^{\rho} = S_{\mu\nu}^{\rho}$, 则(20)式简化为

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\} + S_{\mu\nu}^{\rho}. \tag{27}$$

此时, Riemann-Cartan 空间的测地线和自平行线一致.

2 有挠时空中无旋粒子的运动

应该指出的是, 上述空间 W 和空间 Q 之间的非完整映射关系是较为一般的对应关系, 它包括了几种特殊情况, 当空间 W 为欧氏空间时, $g_{ij} = \delta_{ij}$, $\Gamma_{jk}^i = 0$, $S_{jk}^i = 0$, $R_{jkl}^i = 0$. 上述映射退化为从有挠率空间到平直空间的映射, 导数的协变性条件、空间 Q 的联络、挠率等分别变为

$$\frac{dV^i}{dt} = e_{\mu}^i \frac{\mathcal{D}V^{\mu}}{\mathcal{D}t}, \tag{28}$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{*\rho} = g^{\rho\sigma} \delta_{\mu}^l e_{\sigma}^j e_{\mu,\nu}^i, \quad (29)$$

$$S_{\mu\nu}^{*\rho} = \frac{1}{2}(\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) = g^{\rho\sigma} \delta_{\mu}^l e_{\sigma}^j e_{[\mu,\nu]}^i, \quad (30)$$

(18)式表明, 联络(29)式的曲率为零. 这样得到的空间 Q 为有挠率无曲率的 Weitzenböck 空间. 如果映射(4)式是满秩的, 即 $\det(e_{\mu}^i) \neq 0$, 存在逆映射

$$\dot{q}^{\mu} = \varepsilon_i^{\mu} \dot{w}^i, \quad (31)$$

其中 ε_i^{μ} 满足 $\varepsilon_i^{\mu} e_{\mu}^j = \delta_i^j$, $\varepsilon_i^{\mu} e_{\nu}^j = \delta_{\nu}^{\mu}$, 由此可得 $\varepsilon_i^{\mu} \partial_{\rho} e_{\nu}^j = -e_{\nu}^j \partial_{\rho} \varepsilon_i^{\mu}$. 这样, 联络和挠率简化为

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{*\rho} &= \varepsilon_i^{\rho} e_{\mu,\nu}^j = -e_{\mu}^j e_{\nu}^i \varepsilon_{i,j}^{\rho}, \\ S_{\mu\nu}^{*\rho} &= \varepsilon_i^{\rho} e_{[\mu,\nu]}^j = -e_{\mu}^j e_{\nu}^i \varepsilon_{[i,j]}^{\rho}, \end{aligned} \quad (32)$$

容易验证, 联络(32)式满足

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\nu} \varepsilon_i^{\rho} &= \varepsilon_{i,\nu}^{\rho} + \Gamma_{\mu\nu}^{*\rho} \varepsilon_i^{\mu} = 0, \\ \mathcal{D}_{\nu} e_{\mu}^j &= \varepsilon_{\mu,\nu}^j - \Gamma_{\mu\nu}^{*\rho} e_{\rho}^j = 0, \end{aligned} \quad (33)$$

上述结果同样适用于 W 是 Minkowski 时空的情况, 此时 $g_{ij} = \eta_{ij}$, $w^i = X^i$ ($i = 0, 1, 2, 3$), $t = \tau$, 而空间 Q 为 Weitzenböck 时空, $q^{\mu} = x^{\mu}$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$). 由于从 Weitzenböck 时空到 Minkowski 时空的映射(4)式是满秩的, 所以有挠无曲的 Weitzenböck 时空中非完整地对应于 Minkowski 时空测地线的自平行线方程为

$$\frac{\mathcal{D}\dot{x}^{\mu}}{\mathcal{D}\tau} = \varepsilon_i^{\mu} \frac{d\dot{X}^i}{d\tau} = 0, \quad \text{即}$$

$$\frac{d^2 x^{\rho}}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{*\rho} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} = 0, \quad (34)$$

自旋为零的粒子在有挠率时空中的惯性运动应该沿着该时空的自平行线(34)式进行, 这个方程也可以用 Lagrange 逆问题表示为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_g}{\partial \dot{q}^{\mu}} \right) - \frac{\partial L_g}{\partial q^{\mu}} = 2S_{\mu\nu}^{\sigma} g_{\sigma\lambda} \frac{v^{\nu} v^{\lambda}}{\sqrt{v^2}}, \quad (35)$$

其中 $L_g = \sqrt{g_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu}}$, $v^2 = g_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu}$. 这个拉氏量的选取在 Legendre 变换下得到的 Hamilton 量恒为零, 所以不能得到文献[31]的正规的正则化形式. 但是, 它所满足的时间重新参数化对称性为利用 Dirac 约束方法实现相对论性量子化提供了可能. 而讨论有挠时空中的粒子运动问题, 应该是在相对论量子场论的框架下考虑相对论性粒子的运动, 研究方程(35)的量子化离不开作为相对论效应的时空挠率与具有量

子效应的物质场之间的耦合问题. 方程(35)要作为描述相对论性无自旋粒子的运动方程, 时空的挠率只能是有势的, 即标量场 σ 的梯度:

$$S_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} [\delta_{\mu}^{\lambda} \partial_{\nu} \sigma(q) - \delta_{\nu}^{\lambda} \partial_{\mu} \sigma(q)], \quad (36)$$

标量场 σ 可以解释为 Brans-Dicke 标量—张量引力理论中的扩张场(dilation field)^[32]. 有趣的是, 在挠率有势的情况下, 无旋粒子的运动方程(35)在积分因子 e^{σ} 的作用下是自伴随的. 这相当于在 Brans-Dicke 理论中作质量的变换 $m \rightarrow m(q) = me^{\sigma(q)}$ 或者在共形变换 $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}^{(\sigma)} = e^{2\sigma} g_{\mu\nu}$ 下, 对应于时空度规 $g_{\mu\nu}$ 的自平行线方程(33)对应于新度规 $g_{\mu\nu}^{(\sigma)}$ 的测地线方程, 从而可以实现符合对应原理和等效原理的量子化.

自旋粒子在有挠时空中的运动方程既不是时空的测地线方程, 也不是自平行线方程^[1]. 根据新广义相对论^[30,37], Weitzenböck 时空中自旋粒子的运动受时空挠率的影响, 粒子的自旋与时空挠率发生耦合, 导致自旋粒子的运动不符合等效原理. 如利用变分原理, 自旋为 1/2 的粒子的运动方程为

$$\left[i\gamma^{\mu} \left(\mathcal{D}_{\mu} + \frac{1}{2} v_{\mu} \right) - m \right] \psi = 0, \quad (37)$$

其中 $v_{\mu} = e_{\mu}^i S_{ii}^l$ 是挠率的迹矢量. 由于矢量 v_{μ} 的存在, 任何坐标变换和标架变换(非完整映射)都不可能将方程(37)约化为 Minkowski 时空中的 Dirac 方程: W .

3 刚体定点转动的 Euler 方程的几何描述

当空间 W 为 Riemann 空间时, $S_{jk}^i = 0$, 而空间 Q 的联络为

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = g^{\rho\sigma} g_{il} e_{\sigma}^l (e_{\mu,\nu}^i + e_{\nu}^j e_{\mu}^k \{_{jk}^i\}), \quad (38)$$

易验证其相应的挠率由(38)式或(10)式简化为

$$S_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} (\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) = g^{\rho\sigma} g_{il} e_{\sigma}^l e_{[\mu,\nu]}^i. \quad (39)$$

本节考虑变换(4)式是满秩的情况, 即存在逆变换: $\dot{q}^{\mu} = \varepsilon_i^{\mu} \dot{w}^i$ 时, 利用关系(16)式以及 $\varepsilon_i^{\mu} \partial_{\rho} e_{\nu}^j = -e_{\nu}^j \partial_{\rho} \varepsilon_i^{\mu}$, 则空间 Q 挠率简化为

$$S_{\mu\nu}^{\rho} = \varepsilon_i^{\rho} e_{[\mu,\nu]}^j = e_{[\mu}^j \partial_{\nu]} \varepsilon_i^{\rho} = -e_{\mu}^j e_{\nu}^i \varepsilon_{[i,j]}^{\rho}. \quad (40)$$

而该空间的联络可由(38)式简化得到:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \varepsilon_i^{\rho} (e_{\mu,\nu}^i + e_{\nu}^j e_{\mu}^k \{_{jk}^i\}) = \Gamma_{\mu\nu}^{*\rho} + \widetilde{\{\}_{\mu\nu}^{\rho}}, \quad (41)$$

其中 $\Gamma_{\mu\nu}^{*\rho} = \varepsilon_i^{\rho} e_{\mu,\nu}^i = -e_{\mu}^j e_{\nu}^k \varepsilon_{i,j}^{\rho}$, $\widetilde{\{\}_{\mu\nu}^{\rho}} = \varepsilon_i^{\rho} e_{\mu}^j e_{\nu}^k \{_{jk}^i\}$. 将(41)式代入(11)式, 并考虑(18)式, 即 $R(\Gamma^*) = 0$, 得到 Riemann-Cartan 空间的曲率为

$$R_{\nu\sigma\rho}^{\mu} = -\widetilde{\{\}_{\nu\sigma}^{\mu}}_{,\rho} + \widetilde{\{\}_{\nu\rho}^{\mu}}_{,\sigma} - \widetilde{\{\}_{\lambda\rho}^{\mu}} \{_{\nu\sigma}^{\lambda}\} + \widetilde{\{\}_{\lambda\sigma}^{\mu}} \{_{\nu\rho}^{\lambda}\} - \Gamma_{\lambda\rho}^{*\mu} \widetilde{\{\}_{\nu\sigma}^{\lambda}} - \widetilde{\{\}_{\lambda\rho}^{\mu}} \Gamma_{\nu\sigma}^{*\lambda} + \Gamma_{\lambda\sigma}^{*\mu} \widetilde{\{\}_{\nu\rho}^{\lambda}} + \widetilde{\{\}_{\lambda\sigma}^{\mu}} \Gamma_{\nu\rho}^{*\lambda}. \quad (42)$$

利用度规定义(5)式、挠率(40)式, 并考虑(16)式, 得到

$$\begin{aligned} \{\}_{\mu\nu}^{\rho} &= \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (g_{\lambda\nu,\mu} + g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda}) \\ &= \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} \left[(g_{ij} e_{\lambda}^i e_{\nu}^j)_{,\mu} + (g_{ij} e_{\lambda}^i e_{\mu}^j)_{,\nu} - (g_{ij} e_{\mu}^i e_{\nu}^j)_{,\lambda} \right] \\ &= \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} \left\{ (g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{kj,i}) e_{\mu}^k e_{\lambda}^i e_{\nu}^j \right. \\ &\quad \left. + g_{ij} \left[(e_{\lambda}^i e_{\nu}^j)_{,\mu} + (e_{\lambda}^i e_{\mu}^j)_{,\nu} - (e_{\mu}^i e_{\nu}^j)_{,\lambda} \right] \right\} \\ &= \{_{kj}^i\} e_{\mu}^k e_{\nu}^j \varepsilon_i^{\rho} + \varepsilon_i^{\rho} e_{(\mu,\nu)}^i - g^{\rho\lambda} g_{\sigma\nu} \varepsilon_i^{\sigma} e_{[\mu,\lambda]}^i \\ &\quad - g^{\rho\lambda} g_{\sigma\mu} \varepsilon_i^{\sigma} e_{[\nu,\lambda]}^i \\ &= \widetilde{\{\}_{\mu\nu}^{\rho}} + \Gamma_{(\mu\nu)}^{*\rho} - S_{\nu\mu}^{\rho} - S_{\mu\nu}^{\rho}, \end{aligned} \quad (43)$$

其中 $\Gamma_{(\mu\nu)}^{*\rho} = \frac{1}{2} (\Gamma_{\mu\nu}^{*\rho} - \Gamma_{\nu\mu}^{*\rho}) = \varepsilon_i^{\rho} e_{(\mu,\nu)}^i$. 将(43)式代入(41)式, 并考虑 $\Gamma_{\mu\nu}^{*\rho} = \Gamma_{(\mu\nu)}^{*\rho} + \Gamma_{[\mu\nu]}^{*\rho}$, 得到该 Riemann-Cartan 空间中联络的通常表示(20)式, 即 $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \{\}_{\mu\nu}^{\rho} + S_{\mu\nu}^{\rho} + S_{\nu\mu}^{\rho} + S_{\mu\nu}^{\rho} = \{\}_{\mu\nu}^{\rho} + K_{\mu\nu}^{\rho}$. 同样, Riemann-Cartan 空间 Q 的自平行线也可以由斜变导数的非完整映射关系, 从 Riemann 空间 W 的测地线得到.

作为一个应用实例, 研究定点转动刚体的运动

$$(g_{ij})_{3 \times 3} = (g_{\mu\nu} a_i^{\mu} a_j^{\nu})_{3 \times 3} = A^T \cdot (g_{\mu\nu}) \cdot A$$

$$= \begin{pmatrix} I_1 \sin^2 \psi \sin^2 \theta + I_2 \cos^2 \psi \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta & (I_1 - I_2) \sin \psi \cos \psi \sin \theta & I_3 \cos \theta \\ (I_1 - I_2) \sin \psi \cos \psi \sin \theta & I_1 \cos^2 \psi + I_2 \sin^2 \psi & 0 \\ I_3 \cos \theta & 0 & I_3 \end{pmatrix}, \quad (47a)$$

$$(g^{ij})_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} \frac{I_1 \cos^2 \psi + I_2 \sin^2 \psi}{I_1 I_2 \sin^2 \theta} & \frac{(I_2 - I_1) \sin 2\psi}{2 I_1 I_2 \sin \theta} & \frac{-\cos \theta \left(\frac{\cos^2 \psi}{I_2} + \frac{\sin^2 \psi}{I_1} \right)}{\sin^2 \theta} \\ \frac{(I_2 - I_1) \sin 2\psi}{2 I_1 I_2 \sin \theta} & \frac{\sin^2 \psi}{I_2} + \frac{\cos^2 \psi}{I_1} & \frac{(I_1 - I_2) \sin 2\psi}{2 I_1 I_2 \tan \theta} \\ \frac{-\cos \theta \left(\frac{\cos^2 \psi}{I_2} + \frac{\sin^2 \psi}{I_1} \right)}{\sin^2 \theta} & \frac{(I_1 - I_2) \sin 2\psi}{2 I_1 I_2 \tan \theta} & \cot^2 \theta \left(\frac{\cos^2 \psi}{I_2} + \frac{\sin^2 \psi}{I_1} \right) + \frac{1}{I_3} \end{pmatrix}. \quad (47b)$$

方程在两个不同位形空间中的几何表示. 通常选择欧拉角 φ, θ, ψ 作为广义坐标来描述刚体运动, 相对应的角速度 $\omega^{\mu} (\mu=1,2,3)$ 为准速度, 形式上可以看成准坐标 π^{μ} 的导数, 即 $\omega^{\mu} = \dot{\pi}^{\mu}$. 如果取 $w^1 = \varphi$, $w^2 = \theta$, $w^3 = \psi$ 作为位形空间 W 的坐标, 而空间 Q 的坐标为 π^{μ} , 则两者之间的非奇异非完整映射 $\dot{w}^i = b_{\mu}^i \dot{\pi}^{\mu}$ 可表述为

$$\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ \sin \theta \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}, \quad (44)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin \psi}{\sin \theta} & \frac{\cos \psi}{\sin \theta} & 0 \\ \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ -\sin \psi \cot \theta & -\cos \psi \cot \theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix},$$

如果将本体坐标轴取作与刚体的惯量主轴重合, 则刚体的转动惯量将只有对角元素, 即惯量张量为 $I_{\mu\nu} = I_{\mu} \delta_{\mu\nu}$. 此时刚体的动能表达式为

$$T = \frac{1}{2} I_{\mu} (\omega^{\mu})^2. \quad (45)$$

由此得到空间 Q 的度规为

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}, \quad (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_3} \end{pmatrix}. \quad (46)$$

空间 W 的度规为

由此可计算出相应的 Riemann 曲率(在此限于篇幅不列出结果), 而挠率 $S_{jk}^i = 0$, 所以空间 W 是 Riemann 空间. 根据前面所述, 在空间 W 中刚体自由转动的 Lagrange 方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} &= 0, \end{aligned} \quad (48)$$

就是由 Euler 角描述的 Riemann 位形空间中的测地线方程, 它实为欧拉方程

$$\begin{aligned} (I_1 - I_2)\omega^1\omega^2 - I_3\dot{\omega}^3 &= 0, \\ (I_2 - I_3)\omega^2\omega^3 - I_1\dot{\omega}^1 &= 0, \\ (I_3 - I_1)\omega^3\omega^1 - I_2\dot{\omega}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (49)$$

将(44)式中的矩阵元代入(40)式, 经繁琐计算可得到准坐标空间 Q 的非零挠率分量为

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu}^\rho &= \varepsilon_i^\rho e_{[\mu,\nu]}^i = -e_\mu^j e_\nu^i \varepsilon_{[i,j]}^\rho = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\rho\mu\nu} \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \varepsilon_{\rho\mu\nu} \text{ 是偶排列,} \\ +\frac{1}{2}, & \varepsilon_{\rho\mu\nu} \text{ 是奇排列.} \end{cases} \end{aligned} \quad (50)$$

即

$$S_{12}^3 = S_{31}^2 = S_{23}^1 = -\frac{1}{2}, \quad S_{13}^2 = S_{21}^3 = S_{32}^1 = \frac{1}{2}. \quad (51)$$

利用上面的计算公式和计算程序, 可得到准坐标空间 Q 的非零曲率分量为

$$R_{212}^1 = -R_{221}^1 = \frac{(I_1 - I_2 - I_3)(I_1 - I_2 + I_3)}{4I_1I_3}, \quad (52a)$$

$$R_{313}^1 = -R_{331}^1 = \frac{(I_1 - I_2 - I_3)(I_1 + I_2 - I_3)}{4I_1I_2},$$

$$R_{112}^2 = -R_{121}^2 = \frac{(I_1 - I_2 + I_3)(I_2 - I_1 + I_3)}{4I_2I_3}, \quad (52b)$$

$$R_{323}^2 = -R_{332}^2 = \frac{(I_2 - I_1 - I_3)(I_1 + I_2 - I_3)}{4I_1I_2},$$

$$R_{113}^3 = -R_{131}^3 = \frac{(I_2 - I_1 + I_3)(I_1 + I_2 - I_3)}{4I_2I_3}, \quad (52c)$$

$$R_{223}^3 = -R_{232}^3 = \frac{(I_1 + I_2 - I_3)(I_1 - I_2 + I_3)}{4I_1I_3},$$

上述表明准坐标空间 Q 是一个曲率非零挠率为常数的 Riemann-Cartan 空间. 显然, 文献[38]中关于该空间是 Weitzenböck 空间的结果有误. 在这个 Riemann-Cartan 准坐标空间中, 刚体定点自由转动的运动方程是

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\pi}^\mu} \right) - \frac{\partial T}{\partial \pi^\mu} = 2S_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial T}{\partial \dot{\pi}^\lambda} \dot{\pi}^\nu, \quad (53)$$

这是准坐标空间中的自平行线方程^[28]. 将挠率(50)式以及 $\dot{\pi}^\mu = \omega^\mu$, $T = \frac{1}{2} I_\mu (\omega^\mu)^2$ 代入(53)式, 得到

$$I_\mu \dot{\omega}^\mu = -\varepsilon_{\mu\lambda\nu} I_\lambda \omega^\lambda \omega^\nu, \quad (54)$$

此方程中的重复指标不表示求和, 这恰好是 Euler 方程(49). 所以 Euler 方程在这个准坐标空间中是自平行线方程. 总之, 描述刚体运动 Euler 方程在 Euler 角空间中是测地线方程, 而在准坐标空间中则是自平行线方程.

4 Riemann-Cartan 空间中的 Chaplygin 非完整系统

作为非完整映射(3)式或(4)式的特例, 考虑一种嵌入 Riemann 空间的奇异非完整映射, 即假设 W 为 Riemann 空间, 且 $e_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots, m$), 则(4)式退化为

$$\dot{w}^\mu = \delta_\nu^\mu \dot{q}^\nu, \quad \dot{w}^\alpha = e_\mu^\alpha \dot{q}^\mu \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n-m). \quad (55)$$

这相当于 Chaplygin 非完整约束条件的显式表达, 根据第二节的讨论, 此时空间 Q 亦为一个 Riemann-Cartan 空间. 在这种情况下, 完整约束条件已经隐含在 Riemann 空间中, 而非完整约束条件在有挠率的 Riemann-Cartan 空间中实现了几何化. 该空间的联络可以由关系(38)式经条件(55)式得到

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\rho &= g^{\rho\sigma} g_{\alpha l} e_\sigma^l e_{\mu,\nu}^\alpha + g^{\rho\sigma} g_{il} e_\sigma^l e_\mu^j e_\nu^k \{_{jk}^i\} \\ &= g^{\rho\sigma} g_{\alpha l} e_\sigma^l e_{\mu,\nu}^\alpha + \widetilde{\{_{\mu\nu}^\rho\}}, \end{aligned} \quad (56)$$

其中

$$\widetilde{\{_{\mu\nu}^\rho\}} \doteq g^{\rho\sigma} g_{il} e_\sigma^l e_\mu^j e_\nu^k \{_{jk}^i\}. \quad (57)$$

在有些条件下, $g_{ij} = C\delta_{ij}$, $\{_{jk}^i\} = 0$, 此时 $\widetilde{\{_{\mu\nu}^\rho\}} = 0$ (见文献[26]中的例子). 将(56)式代入(39)式, 得到挠率为

$$S_{\mu\nu}^\rho = g^{\rho\sigma} g_{\alpha l} e_\sigma^l e_{\mu,\nu}^\alpha. \quad (58)$$

由此可知, 约束(55)式的可积性条件 $e_{[\mu,\nu]}^\alpha = 0$ 等价于 Riemann-Cartan 空间 Q 的挠率 $S_{\mu\nu}^\rho = 0$. 联络 $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ 也可以由(20)和(24)式导出, 即由度规 $g_{\mu\nu}$ 和挠率(58)式确定. 该空间的自平行线方程和测地线方程分别为

$$\frac{d^2 q^\rho}{dt^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{dq^\mu}{dt} \frac{dq^\nu}{dt} = 0, \quad (59a)$$

$$\frac{d^2 q^\rho}{dt^2} + \{\rho_{\mu\nu}\} \frac{dq^\mu}{dt} \frac{dq^\nu}{dt} = 0. \quad (59b)$$

根据 Lagrange-d'Alembert 原理^[29,39], Chaplygin 非完整系统的运动微分方程为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\mu} = 2S_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\lambda} \dot{q}^\nu, \quad (60)$$

其中 L 为嵌入约束的 Lagrange 函数. 可以验证, 方程(60)恰是 Riemann-Cartan 空间中的自平行线方程(59a), 而 Chaplygin 非完整系统的 vakonomic 方程恰是 Riemann-Cartan 空间中的测地线方程(59b)^[26]. 在一个具有 Riemann-Cartan 结构的位形空间中, 由 Hamilton 原理所得到的运动方程为测地线方程, 而由 Lagrange-d'Alembert 原理得到的运动方程为自平行线方程. 作为一个不受人为控制的动力学系统, 它所满足的物理原理应该是符合惯性原理的 Lagrange-d'Alembert 原理. 利用这个原理可以直接验证^[28], 系统在空间 W 的短程线非完整地对应于空间 Q 的自平行线:

$$\ddot{w}^j + \{\dot{w}^j\} \dot{w}^k = b_\mu^j (\ddot{q}^\mu + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \dot{q}^\nu \dot{q}^\sigma). \quad (61)$$

这恰是协变导数的非完整映射关系式(7).

研究一个动力学函数为 $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ 的粒子, 受到非完整约束为 $\dot{z} = y\dot{x}$ 的运动问题. 这个非完整约束条件确定了从局部坐标为 (x, y) 的 2 维 Riemann-Cartan 空间到 3 维 Riemann 空间中的映射. 显然, $i, j = 1, 2, 3$; $\mu, \nu = 1, 2$; $\alpha = 3$, 且

$$e_1^1 = 1, \quad e_2^1 = 0, \quad e_1^2 = 0, \quad e_2^2 = 1, \quad e_1^3 = y, \quad e_2^3 = 0,$$

空间 Q 的度规为

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1+y^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+y^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

相应的非零 Christoffel 符号为

$$\{\dot{t}_{11}\} = -y, \quad \{\dot{t}_{12}\} = \{\dot{t}_{21}\} = \frac{y}{1+y^2},$$

非零的联络分量为

$$\Gamma_{21}^1 = \frac{y}{1+y^2}.$$

则该空间 Q 的非零挠率分量为 $S_{21}^1 = -S_{12}^1 = \frac{y}{1+y^2}$. 在

空间 Q 中的自平行线和测地线方程分别为

$$\ddot{x} + \frac{y\dot{x}\dot{y}}{1+y^2} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad (62a)$$

$$\ddot{x} + \frac{2y\dot{x}\dot{y}}{1+y^2} = 0, \quad \ddot{y} - y\dot{x}^2 = 0. \quad (62b)$$

利用 Lagrange-d'Alembert 原理和 Hamilton 原理可以验证, 前者是非完整系统的 Chaplygin 方程, 而后者是 vakonomic 方程.

5 结论

通常的动力学系统的位形空间一般是 Riemann 空间或欧氏空间. 若某些动力学系统存在诸如缺陷、不可积、非正则等奇异特性, 并且它们可以通过建立这类系统与通常正规系统之间的非完整映射来实现, 则这些奇异特性可以表现为其所处空间的扭曲特性, 而这些扭曲不同于弯曲, 它导致欧氏空间变为 Weitzenböck 空间, Riemann 空间变为 Riemann-Cartan 空间, 这些空间因被扭曲而存在挠率. 借助于挠率, 不仅这些系统的奇异物理特性得到几何表示和描述, 而且其运动方程的非 Riemann 特征得到了美妙的几何化. 这种非完整映射所得到的 Riemann-Cartan 空间的自平行线方程与利用物理原理所得到的系统运动方程一致.

参考文献

- 1 Hammond R T. Torsion gravity. Rep Prog Phys, 2002, 65(5): 599—649
- 2 Shapiro I L. Physical aspects of the space-time torsion. Phys Rep, 2002, 357(1): 113—213

- 3 Hehl F W, McCrea J D, Mielke E W. Metric-affine gauge theory of gravity: field equations, Noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance. *Phys Rep*, 1995, 258(1): 1—171
- 4 Trautman A. Einstein-Cartan theory. In: Francoise J P, Naber G L, Tsun T S, ed. *Encyclopedia of Mathematical Physics 5, General Relativity; Quantum Gravity; String Theory and M-Theory*. Beijing: Science Press, 2008. 71—77
- 5 Cartan E. On Manifolds with an Affine Connection and the Theory of General Relativity. In: Magnon A, Ashtekar A, translation. Napoli: Bibliopolis, 1986
- 6 Einstein A. Riemanngeometrie mit aufrechterhaltung des begriffes des fern-parallelismus. *Sitzungsber Preuss Akad Wiss*, 1928: 217—221
- 7 Cosserat E F. *Théorie de Corps Déformables*. Paris: Hermann, 1909
- 8 Kondo K. On the geometrical and physical foundations of the theory of yielding. In: *Proc 2nd Japan National Congress on Applied Mechanics*. Tokyo, 1952
- 9 Bilby B A, Bullough R, Smith E. Continuous distributions of dislocations: A new application of methods of non-Riemannian geometry. *Proc R Soc A*, 1955, 231: 263—273
- 10 Kröner E. Continuum theory of defects. In: Balian R, Kléman M and Poirier J-P, ed. *Physics of Defects, Les Houches, Session XXXV*. Amsterdam: North-Holland, 1981. 215
- 11 Kleinert H. *Gauge Fields in Condensed Matters II: Stresses and Defects*. Singapore: World Scientific, 1989
- 12 Kleinert H. *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics and Polymer Physics*. 2nd ed. Singapore: World Scientific, 1995
- 13 Utiyama R. Invariant theoretical interpretation of interaction. *Phys Rev*, 1956, 101: 1597—1607
- 14 Sciama D W. On the analogy between charge and spin in general relativity. In: *Recent Developments in General Relativity*. Warsaw: Polish Scientific Publishers, 1962. 415—439
- 15 Kibble T W B. Lorentz invariance and the gravitational field. *J Math Phys*, 1961, 2: 212—221
- 16 Cacciatori S L, Caldarelli M M, Giacomini A, et al. Chern-Simons formulation of three-dimensional gravity with torsion and nonmetricity. *J Geom Phys*, 2006, 56: 2523—2543
- 17 Camacho A, Maciás A. Space-time torsion contribution to quantum interference phases. *Phys Lett B*, 2005, 617: 118—123
- 18 Sotiriou T P, Liberatía S. Metric-affine $f(R)$ theories of gravity. *Annal Phys*, 2007, 322: 935—966
- 19 Wang C H, Wu Y H. Inflation in $R+R^2$ gravity with torsion. *Class Quantum Grav*, 2009, 26: 045016
- 20 Burton D A, Tucker R W, Wang C H. Spinning particles in scalar-tensor gravity. *Phys Lett A*, 2008, 372: 3141—3144
- 21 Shie K F, Nester J M, Yo H J. Torsion cosmology and the accelerating universe. *Phys Rev D*, 2008, 78: 023522
- 22 Ruggiero M L, Tartaglia A. Einstein-Cartan theory as a theory of defects in space-time. *Am J Phys*, 2003, 71: 1303—1313
- 23 Kleinert H, Zaanen J. Nematic world crystal model of gravity explaining absence of torsion in space-time. *Phys Lett A*, 2004, 324: 361—365
- 24 Puntigam R A, Soleng H H. Volterra distortions spinning strings, and cosmic defects. *Class Quantum Grav*, 1997, 14: 1129—1149
- 25 Shabanov S V. Constrained systems and analytical mechanics in spaces with torsion. *J Phys A-Math Gen*, 1998, 31(22): 5177—5190
- 26 Guo Y X, Wang Y, Chee G Y, et al. Nonholonomic versus vakonomic dynamics on a Riemann-Cartan manifold. *J Math Phys*, 2005, 46(5): 062902
- 27 Guo Y X, Liu C, Liu S X, et al. Decomposition of almost poisson structure of non-self-adjoint dynamical systems. *Sci China Ser E-Tech Sci*, 2009, 52: 761—770
- 28 王勇, 郭永新, 吕群松, 等. 非完整映射理论与刚体定点转动的几何描述. *物理学报*, 2009, 58(8): 5142—5149
- 29 Neimark Ju I, Fufaev N A. *Dynamics of Nonholonomic Systems*. Providence, RI: American Mathematical Society, 1972
- 30 郭永新. 有挠时空中自旋粒子的进动. *辽宁师范大学学报*, 1991, 14(4): 296—301
- 31 Guo Y X, Song Y B, Zhang X B, et al. An almost-Poisson structure for autoparallels on Riemann-Cartan spacetime. *Chin Phys Lett*, 2003, 20(8): 1192—1195
- 32 Maulbetsch C, Shabanov S V. The inverse variational problem for autoparallels. *J Phys A-Math Gen*, 1999, 32: 5355—5366
- 33 Kleinert H, Pelster A. Autoparallels from a new action principle. *Gen Rel Grav*, 1999, 31(9): 1439—1447
- 34 Kleinert H, Shabanov S V. Theory of Brownian motion of a massive particle in spaces with curvature and torsion. *J Phys A-Math Gen*, 1998, 31: 7005—7009
- 35 Kleinert H, Shabanov S V. Space with torsion from embedding, and the special role of autoparallel trajectories. *Phys Lett B*, 1998, 428: 315—321
- 36 Fiziev P P, Kleinert H. New action principle for classical particle trajectories in spaces with torsion. *Europhys Lett*, 1996, 35: 241—246
- 37 Hayashi K, Shirafuji T. New general relativity. *Phys Rev D*, 1979, 19: 3524—3553
- 38 Fiziev P, Kleinert H. Motion of a rigid body in body-fixed coordinate system-an example for autoparallel trajectories in spaces with torsion. *arXiv: hep-th/9503075v1*, 1995
- 39 Guo Y X, Liu S X, Liu C, et al. Dynamics of nonholonomic systems from variational principles. *Phys Lett A*, 2009, 373: 3915—3919