

Brouwer 不动点定理与顶点在曲面上的四边形^{*}

麦结华

(汕头大学数学研究所, 汕头 515063)

摘要 设 D 是 Euclid 平面 $\mathbb{R}^2$ 中的一个半径为 r 的圆盘, F 是 D 上 Lipschitz 连续的实值函数, $A_1 A_2 A_3 A_4$ 是边长不超过 r 的等腰梯形, $\angle A_1 A_2 A_3 = \alpha \leq \pi/2$. 借助于 Brouwer 不动点定理证明了: 若 F 有一个 Lipschitz 常数 $\lambda \leq \min\{1, \operatorname{tg} \alpha\}$, 则在曲面 $M = \{(x, y, F(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D\}$ 上存在共平面的四个点, 它们张成一个与 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 全等的四边形. 此外, 还作了一些进一步的讨论.

关键词 曲面 Lipschitz 常数 连续泛函 同伦 映射度 Brouwer 不动点定理

1 顶点在给定曲面上的四边形

对 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的有限个点 $B_1, B_2, \dots, B_m$, 以 $B_1 B_2 \dots B_m$ 表示 $\{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ 的凸包(即包含 $B_1, B_2, \dots, B_m$ 的最小凸集), $|B_1 B_2|$ 表示直线段 $B_1 B_2$ 的长度, $\angle B_1 B_2 B_3$ 表示射线 $\overrightarrow{B_2 B_1}$ 与 $\overrightarrow{B_2 B_3}$ 所夹的角的弧度数(不考虑旋转的正负方向, 规定 $\angle B_1 B_2 B_3 \in [0, \pi]$). 设 D 是 Euclid 平面 $\mathbb{R}^2$ 中的单位圆盘, 即以原点为心, 以 1 为半径的闭圆盘, U 是 $\mathbb{R}^2$ 中包含 D 的一个连通区域, $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ 是 Lipschitz 连续的函数. 假定 λ 是 F 的一个 Lipschitz 常数, 即

$$|F(P) - F(Q)| \leq \lambda |PQ|, \quad \forall P, Q \in U. \quad (1)$$

令曲面

$$M = M_F = \{(x, y, F(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U\}. \quad (2)$$

设 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中一个给定的凸四边形, 它的两条对角线 $A_1 A_3$ 与 $A_2 A_4$ 相交于 E , 并且

$$\max\{|EA_i| : i = 1, \dots, 4\} \leq 1, \quad \angle A_1 A_2 A_3 = \alpha \leq \pi/2. \quad (3)$$

本文讨论与曲面 M 有关的如下几何问题:

问题 P 在上述曲面 M 上是否存在共平面的四个点 B_1, B_2, B_3, B_4 , 使得它们的凸包 $B_1 B_2 B_3 B_4$ 是一个与 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 全等的四边形?

问题 P 实际上来源于人们熟知的稳定椅子数学模型^[1, 2]. 假设 A_1, A_2, A_3, A_4 是一张椅子的四条腿的端点, M 是地表面, 则问题 P 是否有解意味着能否在 M 上找到一个放椅子的稳定位置使得该椅子的四条腿能同时着地而不悬空摇晃.

当 $A_1A_2A_3A_4$ 是正方形且 λ 的值较小时, 问题 P 的答案是已知的^[1~3]. 本文考虑更一般的四边形, 借助于 Brouwer 不动点定理, 得到的一个主要结果是

定理 1 设曲面 $M = M_F$ 如(2)式所定义, $A_1A_2A_3A_4$ 是一个等腰梯形. 若(1)及(3)式成立, 且 $\lambda \leq \min\{1, \operatorname{tg} \alpha\}$, 则问题 P 有解.

此外, 本文还对问题 P 作了一些进一步的讨论.

2 几个引理

为证明定理 1, 先给出几个引理.

证明定理 1 的主要途径是: 通过某种处理手法将问题 P (限于定理 1 所讨论情形) 与某一个 2 维映射 $\eta: K \rightarrow W$ 联系起来, 引理 1 即讨论了此类 2 维映射, 这是最关键的, 由该引理的结论 $\eta^{-1}(0, 0) \neq \emptyset$ 可推出问题 P 有解. 引理 2 及 3 则是为了建立问题 P 与映射 $\eta: K \rightarrow W$ 之间的联系作准备.

为证明引理 1, 需要用到 Brouwer 不动点定理^[4, 5].

Brouwer 不动点定理 从 n 维球体 B^n ($n \geq 1$) 到自身的任一个连续映射均含有至少一个不动点.

引理 1 设 $\beta_1 < \beta_2$ 是实数, $K = [\beta_1, \beta_2] \times [0, \pi]$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的长方形, $\partial_1 K = \{\beta_1\} \times [0, \pi]$, $\partial_2 K = [\beta_1, \beta_2] \times \{0\}$, $\partial_3 K = \{\beta_2\} \times [0, \pi]$ 及 $\partial_4 K = [\beta_1, \beta_2] \times \{\pi\}$ 是 K 的 4 条边. 又设 $W = [-4, 4] \times [-4, 4] \subset \mathbb{R}^2$,

$$W_1 = \{(x, y) \in W: -4 \leq y \leq x \leq 4\},$$

$$W_2 = \{(x, y) \in W: -4 \leq x \leq y \leq 4\},$$

$$J_1 = \{(x, x) \in W: -4 \leq x < 0\}, \quad J_2 = \{(x, x) \in W: 0 < x \leq 4\}.$$

若 $\eta: K \rightarrow W$ 是连续映射, 满足

$$\begin{cases} \eta(\partial_2 K) \subset W_1, & \eta(\partial_4 K) \subset W_2, \\ \eta(\partial_1 K) \cap J_2 = \emptyset, & \eta(\partial_3 K) \cap J_1 = \emptyset, \end{cases} \quad (4)$$

则存在 $(\beta_0, \varphi_0) \in K$ 使得 $\eta(\beta_0, \varphi_0) = (0, 0)$.

证 记 $\partial_1 W = \{-4\} \times [-4, 4]$, $\partial_2 W = [-4, 4] \times \{-4\}$, $\partial_3 W = \{4\} \times [-4, 4]$, $\partial_4 W = [-4, 4] \times \{4\}$, $\partial W = \bigcup_{i=1}^4 \partial_i W$, 则 ∂W 是正方形 W 的边界.

令 $W' = W - \{(0, 0)\}$. 作径向投射 $g_1: W' \rightarrow \partial W$ 为

$$g_1(x, y) = \left(\frac{4x}{\max\{|x|, |y|\}}, \frac{4y}{\max\{|x|, |y|\}} \right), \quad \forall (x, y) \in W'.$$

又作同胚 $g_2: W \rightarrow K$ 为

$$g_2(x, y) = (\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1)(x + 4)/8, \pi(y + 4)/8), \quad \forall (x, y) \in W.$$

假如引理 1 不成立, 则可以得到一个连续映射

$$g = g_1 \eta g_2: W \rightarrow \partial W.$$

由(4)式可推出

$$\begin{cases} g(\partial_1 W) \subset \partial W - \{(4, 4)\}, & g(\partial_2 W) \subset \partial_2 W \cup \partial_3 W, \\ g(\partial_3 W) \subset \partial W - \{(-4, -4)\}, & g(\partial_4 W) \subset \partial_4 W \cup \partial_1 W. \end{cases}$$

据此可知存在 $\epsilon \in (0, 1]$, 使得 $g(-4, 4) \in \partial_1 W \cup \partial_4 W - [4 - \epsilon, 4] \times \{4\}$, $g(4, -4) \in \partial_3 W \cup \partial_2 W - [-4, -4 + \epsilon] \times \{-4\}$, 并且 $g|(\partial_1 W \cup \partial_2 W)$ 是 $\partial W - [4 - \epsilon, 4] \times \{4\}$ 中从点 $g(-4, 4)$ 到 $g(4, -4)$ 的一条道路, $g|(\partial_3 W \cup \partial_4 W)$ 是 $\partial W - (-4, -4 + \epsilon] \times \{-4\}$ 中从点 $g(4, -4)$ 到 $g(-4, 4)$ 的一条道路. 因此, $g| \partial W$ 是 ∂W 上的一个映射度^[4]为 1 的连续自映射. 令对径映射 $g_3: \partial W \rightarrow \partial W$ 为

$$g_3(x, y) = (-x, -y), \quad \forall (x, y) \in \partial W,$$

则 g_3 也是映射度为 1 的连续自映射. 于是, $g| \partial W$ 同伦于 g_3 , 从而存在同伦 $H: \partial W \times [0, 2] \rightarrow \partial W$ 使得

$$H(x, y, 0) = g(x, y), \quad H(x, y, 2) = g_3(x, y)$$

(对所有的 $(x, y) \in \partial W$). 作 $g_0: W \rightarrow \partial W$ 为

$$g_0(x, y) = \begin{cases} g(2x, 2y), & \text{若 } |x| \leq 2, |y| \leq 2; \\ H(4x/|x|, 4y/|x|, |x| - 2), & \text{若 } |x| \geq 2, |x| \geq |y|; \\ H(4x/|y|, 4y/|y|, |y| - 2), & \text{若 } |y| \geq 2, |y| \geq |x|, \end{cases}$$

容易看出 g_0 是连续映射且 g_0 没有不动点, 但这与 Brouwer 不动点定理矛盾. 证毕.

对任一正数 λ , 令

$$L(\lambda) = \{f: f \text{ 是区间 } [-1, 1] \text{ 上的实值函数, 并且对所有的 } x \text{ 及 } y \in [-1, 1] \text{ 均有} \\ |f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|\},$$

又令 $L = \bigcup \{L(\lambda); 0 < \lambda < \infty\}$. 定义函数空间 L 上的 C^0 度量 d 为

$$d(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)|: x \in [-1, 1]\}, \quad \forall f, g \in L.$$

引理 2 设 a 及 b 均是不大于 1 的正数, 则

(i) 对任一个 $f \in L(1)$ 均存在唯一的实数 $\theta_f = \theta_{abf} \in [-\pi/4, \pi/4]$, 使得

$$(a + b)\sin\theta_f + f(-a\cos\theta_f) - f(b\cos\theta_f) = 0;$$

(ii) θ_f 连续地依赖于 f (就 $L(1)$ 上的 C^0 度量而言).

证 (i) 作映射 $\sigma: [-\pi/2, \pi/2] \times L(1) \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$\sigma(\theta, f) = (a + b)\sin\theta + f(-a\cos\theta) - f(b\cos\theta) \quad (5)$$

($\forall \theta \in [-\pi/2, \pi/2], \forall f \in L(1)$), 则 σ 显然是连续的. 因 $f \in L(1)$, 故当 $\theta \in (\pi/4, \pi/2]$ 时, $\sigma(\theta, f) > 0$, 当 $\theta \in [-\pi/2, -\pi/4]$ 时, $\sigma(\theta, f) < 0$, 当 $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$ 时, $\sigma(\theta, f)$ 是 θ 的严格递增函数. 因此, 对每一个给定的 $f \in L(1)$, 存在唯一的 $\theta_f \in [-\pi/4, \pi/4]$ 使得 $\sigma(\theta_f, f) = 0$.

(ii) 对任意的 $\epsilon \in (0, \pi/8]$, 令

$$\delta = \delta(\epsilon, f) = \min\{|\sigma(\theta, f)|: \theta \in [-\pi/2, \theta_f - \epsilon] \cup [\theta_f + \epsilon, \pi/2]\},$$

则由上述 $\sigma(\theta, f)$ 的性质易知 $\delta > 0$. 于是, 对任意的 $f_1 \in L(1)$, 当 $d(f_1, f) < \delta/2$ 且 $\theta \in [-\pi/2, \theta_f - \epsilon] \cup [\theta_f + \epsilon, \pi/2]$ 时总有 $|\sigma(\theta, f_1)| > \delta/2$, 由此推出 $|\theta_{f_1} - \theta_f| < \epsilon$. 这表明 θ_f 连续地依赖于 f .

注 1 对任意给定的 $\mu \geq 1$ 及 $r \in (0, 2]$, 令

$$L'(\mu, r) = \{g \in L(\mu): \text{对所有的 } x, y \in [-1, 1], \text{ 当 } |x - y| \leq r\mu/(\mu^2 + 1)^{1/2} \text{ 时,} \\ \text{总有 } |g(x) - g(y)| \leq r/(\mu^2 + 1)^{1/2}\}.$$

容易看出, 将引理 2 中的 $L(1)$ 改为 $L'(\mu, a + b)$, 该引理仍然成立, 其证明方法也相同.

注2 在引理2中, 令

$$u_f = -a \cos \theta_f, \quad v_f = b \cos \theta_f, \quad (6)$$

则 u_f 及 v_f 由 f 唯一地决定, 且它们均连续地依赖于 $f (\in L(1))$. 显然有

$$-u_f/a = v_f/b, \quad [(v_f - u_f)^2 + (f(v_f) - f(u_f))^2]^{1/2} = a + b. \quad (7)$$

又作映射 $\xi = \xi_{ab}: L(1) \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$\xi(f) = [af(v_f) + bf(u_f)] / (a + b), \quad \forall f \in L(1), \quad (8)$$

则 ξ 是一个连续的泛函.

定义投射 $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 及 $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$p(P) = x, \quad h(P) = y, \quad \forall P = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (9)$$

$p(P)$ 及 $h(P)$ 实际上就是点 $P \in \mathbb{R}^2$ 的横坐标及纵坐标. 对任意的 $P \in [-1, 1] \times \mathbb{R}$ 及 $f \in L(1)$, 令

$$\Delta(P, f) = h(P) - f(p(P)), \quad (10)$$

则当 $\Delta(P, f) = 0$ 时点 P 落在 f 的图象, 即曲线

$$G(f) \equiv \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2; x \in [-1, 1]\}$$

上; 当 $\Delta(P, f) > 0 (< 0)$ 时, 点 P 在曲线 $G(f)$ 的上(下)方.

对平面 $\mathbb{R}^2$ 中的任意两个点 $P \neq Q$, 以 $\gamma(\overrightarrow{PQ})$ 表示射线 $\overrightarrow{PQ}$ 的幅角, 即从 $\mathbb{R}^2$ 的横轴正向旋转到与射线 $\overrightarrow{PQ}$ 平行的方向的角度数, 规定 $\gamma(\overrightarrow{PQ}) \in (-\pi, \pi]$.

引理3 设 PP_1QQ_1 是含于 $[-1, 1] \times \mathbb{R}$ 中的一个等腰梯形, $p(P) < p(Q)$, $\angle PP_1Q = \angle P_1PQ_1 = \alpha \in (0, \pi/2]$. 又设 $f \in L(\lambda)$, $\lambda = \min\{1, \tan \alpha\}$, $\Delta(P, f) = \Delta(Q, f) = 0$.

(i) 若 $\gamma(\overrightarrow{PP_1}) < \gamma(\overrightarrow{PQ})$, 则 $\Delta(Q_1, f) \geq \Delta(P_1, f)$;

(ii) 若 $\gamma(\overrightarrow{PP_1}) > \gamma(\overrightarrow{PQ})$, 则 $\Delta(Q_1, f) \leq \Delta(P_1, f)$.

证 (ii) 的证明与 (i) 相似, 只证明 (i).

记 $\gamma_1 = \gamma(\overrightarrow{PP_1})$. 因 $f \in L(\gamma) \subset L(1)$, $\{P, Q\} \subset G(f)$, 且 $0 < \angle P_1PQ < \alpha \leq \pi/2$, $\gamma(\overrightarrow{PP_1}) < \gamma(\overrightarrow{PQ})$, 故

$$-\pi/4 \leq \gamma(\overrightarrow{PQ}) \leq \pi/4, \quad -3\pi/4 < \gamma_1 < \pi/4.$$

若 $-3\pi/4 < \gamma_1 < -\pi/4$, 则 $\pi/4 < \gamma(\overrightarrow{QQ_1}) = \gamma(\overrightarrow{P_1P}) = -\gamma_1 < 3\pi/4$,

$$\Delta(P_1, f) = \Delta(P_1, f) - \Delta(P, f) < 0,$$

$$\Delta(Q_1, f) = \Delta(Q_1, f) - \Delta(Q, f) > 0,$$

从而 $\Delta(Q_1, f) > \Delta(P_1, f)$.

下面假定 $-\pi/4 \leq \gamma_1 < \pi/4$. 设 $|PQ_1| = |P_1Q| = c$. 注意到 $\gamma(\overrightarrow{PQ_1}) = \gamma_1 + \alpha$, $\gamma(\overrightarrow{QP_1}) = \gamma_1 - \alpha$, 我们有

$$\Delta(Q_1, f) = \Delta(Q_1, f) - \Delta(P, f) \geq c \sin(\gamma_1 + \alpha) - \lambda c |\cos(\gamma_1 + \alpha)|, \quad (11)$$

$$\Delta(P_1, f) = \Delta(P_1, f) - \Delta(Q, f) \leq c \sin(\gamma_1 - \alpha) + \lambda c |\cos(\gamma_1 - \alpha)|. \quad (12)$$

记 $\tau = [\Delta(Q_1, f) - \Delta(P_1, f)] / 2c$. 若 $\alpha \leq \pi/4$, 则 $\lambda = \tan \alpha \leq 1$, $-\pi/2 \leq \gamma_1 - \alpha < \gamma_1 + \alpha < \pi/2$, 由 (11) 及 (12) 式可得 $\tau \geq \cos \gamma_1 \sin \alpha - \lambda \cos \gamma_1 \cos \alpha = 0$. 若 $\pi/4 < \alpha \leq \pi/2$, 则 $\lambda = 1$, 由 (11) 及 (12) 式可分别得

$$\begin{aligned}\tau &\geq \cos \gamma_1 \sin \alpha - \cos \gamma_1 \cos \alpha > 0, & \text{若 } \gamma_1 + \alpha \leq \pi/2, \text{ 且 } \gamma_1 - \alpha \geq -\pi/2; \\ \tau &\geq \cos \gamma_1 \sin \alpha - \sin \gamma_1 \sin \alpha > 0, & \text{若 } \gamma_1 + \alpha > \pi/2; \\ \tau &\geq \cos \gamma_1 \sin \alpha + \sin \gamma_1 \sin \alpha \geq 0, & \text{若 } \gamma_1 - \alpha < -\pi/2.\end{aligned}$$

于是, 无论何种情形均有 $\tau \geq 0$, 即 $\Delta(Q_1, f) \geq \Delta(P_1, f)$. 证毕.

注 3 将引理 3 中的条件“ $\angle PP_1Q = \angle P_1PQ_1 = \alpha \in (0, \pi/2]$ ”又设 $f \in L(\lambda)$, $\lambda = \min\{1, \operatorname{tg} \alpha\}$ ”改为“ $c = |PQ|$, E 为对角线 PQ 与 P_1Q_1 的交点, $\alpha_1 = \min\{\angle PEP_1, \angle P_1EQ\}$ ”. 又设 $\mu \geq \operatorname{ctg}(\alpha_1/2)$, $f \in L'(\mu, c)$ ”, 则该引理仍然成立, 其证明方法亦相似.

3 定理 1 的证明

定理 1 的证明的主要想法是: 将等腰梯形 $A_1A_2A_3A_4$ 移动到某一个位置, 使得

- (i) 对角线 A_1A_3 与 A_2A_4 的交点 E 落在 R^3 的 z -轴上;
- (ii) 顶点 A_1 及 A_3 落在曲面 M_F 上;
- (iii) 射线 $\overrightarrow{A_1A_3}$ 在 xy -平面 $R^2 (= R^2 \times \{0\} \subset R^3)$ 上的投影的幅角为 β ;
- (iv) $A_1A_2A_3A_4$ 所在平面与经过 A_1A_3 及 z -轴的那一个平面的夹角为 φ .

据引理 2, 对任意的 $\beta \in R$ 及 $\varphi \in [0, \pi]$, 这样做总是可行的. 设顶点 A_4 及 A_2 (在移动到满足上述条件的位置之后) 与曲面 M_F 的有向垂直距离分别为 $x_{\beta\varphi}$ 及 $y_{\beta\varphi}$. 据引理 3 及引理 1, 存在 $\beta_0 \in [0, 4\pi)$ 及 $\varphi_0 \in (0, \pi)$ 使得 $x_{\beta_0\varphi_0} = y_{\beta_0\varphi_0} = 0$. 此时, 等腰梯形 $A_1A_2A_3A_4$ 的四个顶点便全都落在曲面 M_F 上.

定理 1 的证 不妨假定 $|A_1E| = |A_2E| = a$, $|A_3E| = |A_4E| = b$, 则由 (3) 式得 $0 < b \leq a \leq 1$. 对每一个实数 β , 令 $f_\beta: [-1, 1] \rightarrow R$ 为

$$f_\beta(x) = F(x \cos \beta, x \sin \beta), \quad \forall x \in [-1, 1] \quad (13)$$

($F: U \rightarrow R$ 如第 1 节所述). 显然 $f_{\beta+2\pi} = f_\beta$. 因 F 连续, 故 f_β 连续地依赖于 β (就 C^0 度量而言). 因 $\lambda \leq \min\{1, \operatorname{tg} \alpha\} \leq 1$, 故 $f_\beta \in L(1)$. 令 $u_\beta = u_{f_\beta}$, $v_\beta = v_{f_\beta}$, 其中 u_{f_β} 及 v_{f_β} 如 (6) 式所定义, 又令

$$P_\beta = (u_\beta \cos \beta, u_\beta \sin \beta, f_\beta(u_\beta)), \quad Q_\beta = (v_\beta \cos \beta, v_\beta \sin \beta, f_\beta(v_\beta)), \quad (14)$$

则 u_β , v_β 及 P_β , Q_β 均连续地依赖于 β . 显然 P_β 及 Q_β 均是曲面 $M = M_F$ 上的点. 据 (7) 式易知线段 $P_\beta Q_\beta$ 的长度 $|P_\beta Q_\beta| = a + b = |A_1A_3|$. 令

$$C_\beta = \{P \in R^3: |PP_\beta| = |A_2A_1|, |PQ_\beta| = |A_2A_3|\},$$

则 C_β 是圆, 直线 $P_\beta Q_\beta$ 与 C_β 所在平面垂直, 并且穿过 C_β 的圆心.

作投射 $h_3: R^3 \rightarrow R$ 及 $p_3: R^3 \rightarrow R^2$ 为

$$h_3(x, y, z) = z, \quad p_3(x, y, z) = (x, y), \quad \forall (x, y, z) \in R^3.$$

设 $P_{\beta 0}$ 是圆 C_β 的最低点, 即 $P_{\beta 0}$ 是 C_β 中满足 $h_3(P_{\beta 0}) = \min(h_3(C_\beta))$ 的那一个点. 对 $\forall \varphi \in [0, \pi]$, 又设 $P_{\beta\varphi}$ 是圆 C_β 上从 $P_{\beta 0}$ 出发沿逆时针方向 (从点 P_β 处看过去) 旋转 φ 弧度后所到达的那一个点, 则 $P_{\beta\pi}$ 是 C_β 的最高点. 注意到 R^3 是向量空间, 点 P_β , Q_β 及 $P_{\beta\varphi}$ 等均可以看作 R^3 中的向量, 我们可以令

$$Q_{\beta\varphi} = Q_\beta + b(P_\beta - P_{\beta\varphi})/a. \quad (15)$$

显然 $P_\beta, P_{\beta\varphi}, Q_\beta, Q_{\beta\varphi}$ 四点共面, 它们张成的四边形 $P_\beta P_{\beta\varphi} Q_\beta Q_{\beta\varphi}$ 与等腰梯形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 全等, 并且对角线 $P_\beta Q_\beta$ 与 $P_{\beta\varphi} Q_{\beta\varphi}$ 的交点落在 $\mathbb{R}^3$ 的 z -轴 $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$ 上. 令 $x_{\beta\varphi}$ 及 $y_{\beta\varphi}$ 分别为点 $Q_{\beta\varphi}$ 及 $P_{\beta\varphi}$ 的相对于曲面 M_F 的高度, 即令

$$x_{\beta\varphi} = h_3(Q_{\beta\varphi}) - F(p_3(Q_{\beta\varphi})), \quad y_{\beta\varphi} = h_3(P_{\beta\varphi}) - F(p_3(P_{\beta\varphi})).$$

注意到 $|Q_{\beta\varphi} P_\beta| = |P_{\beta\varphi} Q_\beta| = |A_4 A_1| < a + b \leq 2$, $\{P_\beta, Q_\beta\} \subset M_F$, 并且 $\lambda \leq 1$, 由(1)式易推出 $\{x_{\beta\varphi}, y_{\beta\varphi}\} \subset [-4, 4]$. 因 $Q_{\beta\varphi}$ 及 $P_{\beta\varphi}$ 均连续地依赖于 β 及 φ , 故 $x_{\beta\varphi}$ 及 $y_{\beta\varphi}$ 亦连续地依赖于 β 及 φ . 据引理 3 可知, 对任意的 $\beta \in \mathbb{R}$ 均有

$$x_{\beta 0} \geq y_{\beta 0}, \quad x_{\beta \pi} \leq y_{\beta \pi}. \quad (16)$$

令 $\xi: L(1) \rightarrow \mathbb{R}$ 如(8)式所定义. 记 $\xi_\beta = \xi(f_\beta)$. 据(8)式及(14)式容易看出

$$\xi_\beta = [ah_3(Q_\beta) + bh_3(P_\beta)] / (a + b). \quad (17)$$

因 f_β 连续地依赖于 β , 故 ξ_β 连续地依赖于 β . 因 $f_{\beta+2\pi} = f_\beta$, 故 $\xi_{\beta+2\pi} = \xi_\beta$. 于是, 可以取 β_1 及 $\beta_2 \in [0, 4\pi)$, 使得 $\beta_1 < \beta_2 < \beta_1 + 2\pi$ 且

$$\xi_{\beta_1} = \min\{\xi_\beta; \beta \in \mathbb{R}\}, \quad \xi_{\beta_2} = \max\{\xi_\beta; \beta \in \mathbb{R}\}. \quad (18)$$

令 $K = [\beta_1, \beta_2] \times [0, \pi]$, 又令 W, W_1, W_2, J_1, J_2 及 $\partial_i K (i = 1, \dots, 4)$ 等均如引理 1 中所述. 作连续映射 $\eta: K \rightarrow W$ 为

$$\eta(\beta, \varphi) = (x_{\beta\varphi}, y_{\beta\varphi}), \quad \forall (\beta, \varphi) \in K. \quad (19)$$

由(16)式可得 $\eta(\partial_2 K) \subset W_1$, $\eta(\partial_4 K) \subset W_2$. 此外, 我们断言

$$\eta(\partial_1 K) \cap J_2 = \emptyset, \quad \eta(\partial_3 K) \cap J_1 = \emptyset.$$

事实上, 假如 $\eta(\partial_1 K) \cap J_2 \neq \emptyset$, 则存在某一个 $\varphi \in [0, \pi]$ 以及某一个 $\delta \in (0, 4]$, 使得 $\eta(\beta_1, \varphi) = (\delta, \delta) \in J_2$, 即

$$x_{\beta_1\varphi} = h_3(Q_{\beta_1\varphi}) - F(p_3(Q_{\beta_1\varphi})) = y_{\beta_1\varphi} = h_3(P_{\beta_1\varphi}) - F(p_3(P_{\beta_1\varphi})) = \delta \quad (20)$$

由(20)式易知存在 $\beta_3 \in (\beta_1, \beta_1 + \pi)$ 使得, 作为 $\mathbb{R}^3$ 中的向量,

$$Q_{\beta_3} = Q_{\beta_1\varphi} - (0, 0, \delta), \quad P_{\beta_3} = P_{\beta_1\varphi} - (0, 0, \delta). \quad (21)$$

由(17), (21)及(15)式可得

$$\begin{aligned} \xi_{\beta_3} &= [ah_3(Q_{\beta_3}) + bh_3(P_{\beta_3})] / (a + b) = \\ &= [ah_3(Q_{\beta_1\varphi}) + bh_3(P_{\beta_1\varphi})] / (a + b) - \delta = \\ &= [ah_3(Q_{\beta_1}) + bh_3(P_{\beta_1})] / (a + b) - \delta = \xi_{\beta_1} - \delta < \xi_{\beta_1}. \end{aligned}$$

但这与(18)式矛盾. 故必有 $\eta(\partial_1 K) \cap J_2 = \emptyset$. 同理有 $\eta(\partial_3 K) \cap J_1 = \emptyset$.

于是, 据引理 1 知存在 $(\beta_0, \varphi_0) \in K$, 使得 $\eta(\beta_0, \varphi_0) = (0, 0)$. 令 $B_1 = P_{\beta_0}$, $B_2 = P_{\beta_0\varphi_0}$, $B_3 = Q_{\beta_0}$, $B_4 = Q_{\beta_0\varphi_0}$, 则 B_1, B_2, B_3, B_4 均是曲面 M 上的点, 它们同在一个平面上, 所张成的四边形 $B_1 B_2 B_3 B_4$ 与给定的等腰梯形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 全等. 证毕.

4 讨论

定理 1 中的某些条件不能进一步减弱, 不然的话问题 P 可能无解.

例 1 定理 1 中“ $A_1 A_2 A_3 A_4$ 是个等腰梯形”这一条件不能减弱为“ $A_1 A_2 A_3 A_4$ 是个(一

般的)“四边形”. 事实上, 设 $r > 2$ 是任一给定的实数, 取 $U = D$ 并令 $F_r: D \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$F_r(x, y) = r - (r^2 - x^2 - y^2)^{1/2}, \quad \forall (x, y) \in D.$$

又令

$$M = M_r = \{(x, y, F_r(x, y)) \in \mathbb{R}^3: (x, y) \in D\},$$

则 M 是个球冠, M 上共面的四个点 B_1, B_2, B_3, B_4 必共圆. 但若 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 是不等腰的梯形, 则 A_1, A_2, A_3, A_4 这四个顶点不共圆, 因而此时问题 P 无解.

至于定理 1 中的条件“ $A_1 A_2 A_3 A_4$ 是个等腰梯形”能否减弱为“ $A_1 A_2 A_3 A_4$ 是个圆内接四边形”, 这个问题尚有待研究, 可参看下面的更一般的猜测 C.

例 2 对任一给定的正数 $\epsilon \leq 1/3$, 定理 1 中“ $\lambda \leq \operatorname{tg} \alpha$ ”这个条件不能减弱为“ $\lambda \leq (1 + \epsilon) \cdot \operatorname{tg} \alpha$ ”. 事实上, 取 $r > 5$, 使得 $r/(r^2 - 1)^{1/2} < 1 + (\epsilon/3)$. 设 $F = F_r$ 及 $M = M_r$ 如例 1 所述. 记 $\alpha_0 = \arcsin(1/r)$, 则曲面 M_r 的切线的斜率的上确界为 $\operatorname{tg} \alpha_0$, 因而(1)式中的 Lipschitz 常数可以选取为 $\lambda = \operatorname{tg} \alpha_0$. 取 $\alpha \in [0, \alpha_0]$ 使得 $(2 + \epsilon) \sin \alpha > 2 \sin \alpha_0$, 则有

$$\begin{aligned} \lambda = \operatorname{tg} \alpha_0 &= r \sin \alpha_0 / (r^2 - 1)^{1/2} < (1 + (\epsilon/3)) \sin \alpha_0 < \\ &(1 + (\epsilon/3))(1 + (\epsilon/2)) \sin \alpha < (1 + \epsilon) \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

取实数 a 及 b 使得 $\sin \alpha / \sin \alpha_0 \leq b < a \leq 1$, 则 $a + b > 2 \sin \alpha / \sin \alpha_0 = 2r \sin \alpha$. 显然, 可以作一个等腰梯形 $A_1 A_2 A_3 A_4$, 使得 $|EA_1| = |EA_2| = a$, $|EA_3| = |EA_4| = b$ (E 为对角线 $A_1 A_3$ 与 $A_2 A_4$ 的交点), 并且 $\angle A_1 A_2 A_3 = \angle A_4 A_1 A_2 = \alpha$. 另一方面, 对球冠 M_r 上的任意三个点 B_1, B_2, B_3 , 因它们的外接圆直径不超过 $2r$, 故当 $|B_1 B_3| = |A_1 A_3|$ 时一定有

$$\begin{aligned} \angle B_1 B_2 B_3 &\geq \arcsin(|B_1 B_3|/2r) = \arcsin((a + b)/2r) > \\ &\arcsin(\sin \alpha) = \alpha = \angle A_1 A_2 A_3. \end{aligned}$$

因而此时问题 P 亦无解.

当然, 如果在减弱了定理 1 中的某些条件之后又另外补充一些新的条件, 则问题 P 也可能有解. 例如, 有如下的定理, 该定理的条件也比较简洁.

定理 2 设曲面 $M = M_F$ 如(2)式所定义, $A_1 A_2 A_3 A_4$ 是个等腰梯形, E 为对角线 $A_1 A_3$ 与 $A_2 A_4$ 的交点. 假定(1)及(3)式成立. 记

$$c = |A_1 A_3|, \quad \alpha_1 = \min\{\angle A_1 E A_2, \angle A_2 E A_3\}, \quad \mu = \max\{\lambda, \operatorname{ctg}(\alpha_1/2)\}.$$

若对任意的 $P, Q \in U$, 当 $|PQ| \leq c\mu/(\mu^2 + 1)^{1/2}$ 时总有 $|F(P) - F(Q)| \leq c/(\mu^2 + 1)^{1/2}$, 则问题 P 有解.

与定理 1 相比, 定理 2 实际上去掉了对 F 的 Lipschitz 常数 λ 的大小的限制. 但另一方面, 定理 2 附加了一点条件, 它要求 F 在较大的范围内(在任一个直径为 $c\mu/(\mu^2 + 1)^{1/2}$ 的圆盘内)变动的幅度要比较小, 并且当 F 的 Lipschitz 常数 λ 越大时此变动幅度越小. 因此, 定理 1 与定理 2 互不包含.

定理 2 的证明方法与定理 1 完全相同, 在此不必赘述. 但需指出的是, 为了适用于定理 2 的证明, 引理 2 须按注 1 所述方式改动, 引理 3 则须按注 3 所述改动.

例 1 给出了 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 不是等腰梯形时定理 1 不成立的反例. 但例 1 中给出的函数 F_r 的定义域是有界的. 按照 F_r 的表达式, 即使它的定义域不限于单位圆盘 D , 也至多只能扩展到一个半径为 r 的圆盘上. 由此我们猜想, 当 F 的定义域 $U = \mathbb{R}^2$ 时, 情况可能会有所不同.

具体地说, 我们有如下的

猜测 C 设 $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 是个 Lipschitz 连续并且在整个平面 $\mathbb{R}^2$ 上有界的函数, 又设 $M = M_F$ 如 (2) 式所定义 (取 $U = \mathbb{R}^2$), 则对任一凸四边形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 均存在一个相应的正常数 $\rho = \rho_{A_1 A_2 A_3 A_4}$, 使得当 F 有一个 Lipschitz 常数 $\lambda \leq \rho$ 时问题 P 有解.

在定理 1 的证明中实际上使用的是 2 维球体的 Brouwer 不动点定理. 一个等腰梯形的形状及大小只需 3 个参数即可决定, 而一个一般的四边形则需 5 个参数才能决定. 据此我们估计, 假如猜测 C 正确的话, 其证明可能需要用到 3 或 4 维球体的 Brouwer 不动点定理, 而证明的关键则是要找到一种巧妙的处理办法将问题 P 与某一类 3 或 4 维球体 (或方体) 之间的映射联系起来. 这有待进一步的研究.

致谢 承蒙 北京大学 李同孚 先生多年来的关心与指导, 谨以此文表示纪念.

参 考 文 献

- 1 Willian F L. Discrete and System Models. Berlin; Springer-Verlag, 1983
- 2 姜启源. 数学模型. 北京: 高等教育出版社. 1988
- 3 邹 云. 关于“稳定的椅子”模型问题. 应用数学, 1990, 3(4): 98~101
- 4 Armstrong M A. Basic Topology. New York; Springer-Verlag, 1983
- 5 Maunder C R F. Algebraic Topology. Cambridge; Cambridge University Press. 1980