www.springerlink.com

math.scichina.com



幂零群的一个反例

刘合国^{①*}, 张继平^②, 廖军^②

- ① 湖北大学数学系, 武汉 430062;
- ② 北京大学数学科学学院, 北京 100871

E-mail: ghliu@hubu.edu.cn, jzhang@math.pku.edu.cn, jliao@pku.edu.cn

收稿日期: 2007-11-01; 接受日期: 2009-06-30; * 通信作者

国家基础研究发展规划 (批准号: 2006CB805904) 和教育部博士点基金和国家自然科学基金 (批准号: 10631010, 10971054) 资助项目

摘要 设 R 是含 1 环, I 是 R 的幂零子环 (即存在自然数 n, 使得 $I^n = 0$), 作为 R 的子环, 设 I 是由 x_j ($j \in J$) 生成的. 记 U = 1 + I, 它是幂零类 $\leq n - 1$ 的幂零群, 把 U 的由 $1 + x_j$ ($j \in J$) 生成的子群 记为 G. 本文构造的群例表明: G 的幂零类能够小于 U 的幂零类.

关键词 幂零类 幂零群 幂零环 Lie 环

MSC (2000) 主题分类 20F18

本文采用的术语和符号均依照文献 [1].

在群论研究中,幂零群是一个基本的研究对象,在一般群论、特别是在可解群理论里扮演着重要的角色. 熟知,一个有限群是幂零的当且仅当它是其 Sylow 子群的直积,这样对有限幂零群的研究就可化归到对有限 p- 群的研究. 在无限群论里,构造具体的群例是极其重要的工作. 一般地,最基本的幂零群例是 $\mathrm{Tr}_1(n,F)$: 域 F 上对角线元素全是 1 的全体上三角矩阵所构成的群. 这个群例可以被如下的方式进行推广.

设 R 是含 1 环, I 是 R 的一个幂零子环, 即存在自然数 n, 使 $I^n = 0$. 记

$$U = 1 + I = \{1 + x \mid x \in I\} \subseteq R,$$

则有

- (a) $U \in R$ 的单位群的子群;
- (b) 记 $U_i = 1 + I^i, 1 \leq i \leq n, 则$

$$1 = U_n \leqslant U_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant U_1 = U$$

是 U 的一个中心列, 这样 U 的幂零类至多是 n-1.

这是幂零群理论里的经典群例. 此外, 若把 $\mathrm{Tr}_1(n,F)$ 推广到无限维, 即可得到 McLain 的著名群例 M(Q,F), 它是局部幂零的特征单群 (参见文献 [2]).

现在, 我们要研究在上面的幂零群 U = 1 + I 里自然出现的一个问题: 作为 R 的子环, 设 I 是由 $\{x_j | j \in J\}$ 生成的, 记 U 的由 $\{1 + x_j | j \in J\}$ 生成的子群为 G, 问 U 与 G 的幂零类的关系如何? 本文构造的群例表明: G 的幂零类能够小于 U 的幂零类.

引用格式: Liu H G, Zhang J P, Liao J. A counter example for nilpotont groups. Sci China Math, 2010, 53, doi: 10.1007/s11425-010-4116-2

设 M 是含 1 的交换环 R 上的 $n \times n$ 矩阵环, I 是上三角矩阵子环, 其中对角线及其以下的元素 全为 0, 那么 I 是一个类为 n-1 的幂零子环. 用 e_{ij} 表示 M 的在 (i,j) 位置上为 1 其它位置全为 0 的矩阵, 其中 $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$. 注意到

$$e_{ij}e_{kl} = \begin{cases} e_{il}, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

因此 I 可由 $\{r_1e_{12}, r_2e_{23}, \ldots, r_{n-1}e_{n-1n} | r_i \in R\}$ 生成. U = 1 + I 是环 R 上 $n \times n$ 单位上三角矩阵群, 易知 U 与 $G = \langle 1 + r_ie_{i,i+1} | r_i \in R, i = 1, \ldots, n-1 \rangle$ 是同一个群.

一般地, 当 I 由集合 $\{r_{ij}e_{ij} | r_{ij} \in R, 1 \le i < j \le n\}$ 的某个子集生成时, 可得

定理 1 设 $I = \langle r_k e_{i_k j_k} | r_k \in R, i_k < j_k \rangle$, 其中 i_k 和 j_k 属于 $\{1, \ldots, n\}$, 并且设 $G = \langle 1 + r_k e_{i_k j_k} | r_k \in R, i_k < j_k \rangle$, 那么 U = 1 + I = G.

证明 注意到

$$[1 + e_{ij}, 1 + e_{kl}] = \begin{cases} 1 + e_{il}, & j = k, \\ 1 - e_{kj}, & i = l, \\ 1, & j \neq k, i \neq l, \end{cases}$$
 (1)

对任意的 $u \in U$, 有

$$u = 1 + r_1 e_{s_1 t_1} + r_2 e_{s_2 t_2} + \dots + r_k e_{s_l t_l},$$

其中 $s_k < t_k, t_k \le t_{k+1}$. 显然, u 中的每一个 $e_{s_k t_k}$ 可以由 I 的生成元生成. 不妨设

$$e_{s_k t_k} = e_{s_k k_1} e_{k_1 k_2} \cdots e_{k_{k-1} t_k},$$

则

$$1 + e_{s_k t_k} = [1 + e_{s_k k_1}, 1 + e_{k_1 k_2}, \dots, 1 + e_{k_{k-1} t_k}]$$

其中括号内的元素都是G的生成元.因此

$$u = (1 + r_l e_{s_l t_l})(1 + r_{l-1} e_{s_{l-1} t_{l-1}}) \cdots (1 + r_1 e_{s_1 t_1})$$

可以由 G 的生成元生成. 则有 $U \leq G$, 那么 U = G. 当然, 这时 G 的幂零类就等于 U 的幂零类.

进一步, 我们考虑 G 的幂零类和中心列. 首先, 为方便我们给出一些记号. $S = \{e_{ij} | 1 \le i < j \le n\}$ 的一个子集 T 称为是无关的, 如果 T 的任何一个元素都不可能表示成 T 中其它元素的乘积. 设 X 是 S 的一个子集, 我们总是可以找到 X 的一个无关的子集 \bar{X} 使得 X 的每一个元都可以表示成 \bar{X} 中元素的乘积, 这个集合称为 X 的极大无关子集. \bar{X} 中元素的乘积我们称为 X 的一个字. 设 X 是 X 的一个字, 则 X 表示成 X 中元素的积的方式可能不唯一. 例如 $E_{15} = E_{12}e_{24}e_{45} = E_{13}e_{35}$. 设

$$l(x) = \max\{r \mid x = x_1 x_2 \cdots x_r, \ x_i \in \bar{X}\},\$$

称为x的长.设

$$l(X) = \max\{l(x) \mid x \in X$$
的一个非平凡字},

称为 X 的长. 例如, 集合 $\bar{S} = \{e_{12}, e_{23}, \dots, e_{n-1n}\}$ 是集合 S 的一个极大无关子集且 l(S) = n-1.

设 I 和 G 如定理 1 所述分别为环和群. 设 X 是 $\{g-1|g\in G\}$ 的一个矩阵生成元集, 即

$$X = \{ e_{i_k j_k} \mid i_k \in \Gamma, j_k \in J \},$$

其中 Γ , J 是 {1,2,...,n} 的子集, \bar{X} 是 X 的一个极大无关子集. 则有

$$G = \langle 1 + r_k e_{i_k, i_k} \mid r_k \in R, e_{i_k, i_k} \in \bar{X} \rangle.$$

采用与文献 [1] 或 [3] 一致的符号, 由 [3, 引理 3.6], G 的下中心列的第 t 项是

$$\gamma_t G = \langle [g_1, g_2, \dots, g_t] \mid g_1, g_2, \dots, g_t \in G \rangle
= \langle [1 + r_1 e_{i_1 j_1}, 1 + r_2 e_{i_2 j_2}, \dots, 1 + r_s e_{i_s j_s}] \mid r_i \in R, s \geqslant t, e_{i_k j_k} \in \bar{X} \rangle.$$

由 (1), $e_{i_1j_1}, e_{i_2j_2}, \ldots, e_{i_sj_s}$ 或者按 (1) 的方式从左到右依次可以构成长为 s 的字, 或者

$$[1 + r_1 e_{i_1 j_1}, 1 + r_2 e_{i_2 j_2}, \dots, 1 + r_s e_{i_s j_s}] = 1.$$

如果 l(X) = l, 那么 $\gamma_{l+1}G = 1$, 即群 G 有一个长为 l 的中心列. 而且由 l(X) 的定义, 群 G 的幂 零类是 l. 类似的方法可以得到群 G 的上中心列的第 t 项是

$$\zeta_t G = \langle 1 + r_t \cdot e_{i_t j_t} | X$$
 的任一个包含 $e_{i_t j_t}$ 的非单位字 $x \neq 0$, 满足 $l(x) \leq t - 1 + l(e_{i_t j_t}) \rangle$.

又因为 l(X) = l 那么 $\zeta_i G = G$. 因此我们有下面的

定理 2 设 G 和 X 是上述中的群和集合, 并且 X 的长为 l(X) = l. 那么群 G 的幂零类为 l, 并且群 G 的下中心列是

$$\gamma_i G = \langle 1 + r_{ks} e_{ks} \mid e_{ks}$$
可以表示成 \bar{X} 中至少 i 个元的乘积, $r_{ks} \in R \rangle$,

群 G 的上中心列是

$$\zeta_j G = \langle 1 + r_{ks} e_{ks} \mid X$$
 的任一个包含 e_{ks} 的非单位字 x (即 $x \neq 0$), 满足 $l(x) \leqslant j - 1 + l(e_{ks}), r_{ks} \in R \rangle$.

由上面的定理,直接得到以下推论.

推论 1 设 G 和 X 如上所述. 如果 X 有一个极大无关子集含有 s 个元, 即 $|\bar{X}| = s$, 记群 G 的 幂零类为 c. 则 $1 \le c \le s$. 而且 c = 1 当且仅当 $\bar{X} = X$, 即 X 的每一个元是一个无关的元; c = s 当且仅当 X 有一个非零元是 \bar{X} 中所有元的乘积, 此时 $G \simeq U(s,R)$.

进一步, 我们还可以给出一定条件下群 G 的结构.

推论 2 设 G, X 和 \bar{X} 如上所述. 如果 \bar{X} 有一个划分 $\{X_i \mid 1 \leq i \leq r\}$, 满足

- (i) $\stackrel{\text{def}}{=}$ $i \neq j$ 时, $X_i X_j = X_j X_i = 0$;
- (ii) $\langle X_i \rangle$ 中存在一个非零元是 X_i 中所有元素的乘积.

令 $|X_i| = n_i$, 则由 X_i 对应生成的群同构于 $U(n_i, R)$, 由 \bar{X} 即 X 对应生成的群 G 同构于

$$\begin{bmatrix} U(n_1,R) & & & & \\ & U(n_2,R) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & U(n_r,R) \end{bmatrix},$$

其中 $U(n_i, R)$ 是环 $R \perp n_i$ 阶单位上三角矩阵群.

下面的群例表明: U 的幂零类可以小于 I 的幂零类. 这个例子可参见文献 [4], 作者的证明过程中有一些小的错误将在下面的例子中予以纠正. 为了叙述的方便, 我们直接引用文献 [4] 中的定理、引理以及相应的符号.

例 1 设 $A = Z_{2^m} \oplus Z_{2^{m+1}}$. 则有 $\Delta_1 = \Gamma_1$, 当 $t \ge 2$ 时, $\Delta_t = \Gamma_{2(t-1)}$, 以及 $\{\Gamma_t\}$ 的长为 2m, Δ 的幂零类为 m+1. 取 $I = \mathcal{J}$, $U = \Delta$, 那么 U 的幂零类是 m+1, I 的幂零类是 2m. 因此当 m>1 时, U 的幂零类小于 I 的幂零类.

证明 设 $A = \langle y \rangle \oplus \langle x \rangle$, 其中 $|y| = 2^m$, $|x| = 2^{m+1}$. 既然每一个模 \mathcal{E}_{ij} 是循环的,而且可以由一个初等同态生成,我们用 \mathcal{J} 表示 2×2 的矩阵环,(i,j) 位置上的元素为 (c_{ij}) ,其中 c_{11} 是 e^{yy} 的系数, c_{12} 是 e^{yx} 的系数, c_{21} 是 e^{xy} 的系数, c_{22} 是 e^{xx} 的系数. 生成元的乘积定义如下 $(e^{rr})^2 = 2e^{rr}$, $e^{ru}e^{ur} = e^{rr}$, $e^{ru}e^{uu} = 2e^{ru}$, $e^{rr}e^{ru} = 2e^{ru}$ 其中 $r \neq u$, $\{r, u\} = \{y, x\}$,其它形式的乘积为 0.

由 [4, 定理 6.1],

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{bmatrix} c_{11} + 1 & 0 \\ 0 & c_{22} + 1 \end{bmatrix} \in \Delta \middle| c_{11} \equiv c_{22} \pmod{2^m} \right\} = \Delta_1.$$

接下来对 $t \ge 2$ 归纳地证明, $\{\Gamma_{2(t-1)}\}$ 是一个中心列, 即有 $\Gamma_{2(t-1)} \le \Delta_t$. 当 t = 2 即 $\Gamma_2 \le \Delta_2$ 由 [4, 命 题 3.2] 知成立.

由于对所有的 t > 0 和 $k \in [0, t-1]$,

$$\Gamma_{2(t-k)} = \left\{ \begin{bmatrix} c_{11} + 1 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} + 1 \end{bmatrix} \middle| 2^{m-t+k} \middle| c_{12}, c_{21}; \ c_{11} \equiv c_{22} \pmod{2^{m-t+k+1}} \right\}.$$

假设对 t-1 是成立的, 即 $\Gamma_{2(t-2)} \leq \Delta_{t-1}$. 在上面的等式中设 k=2,

$$\Gamma_{2(t-2)} = \left\{ \left[\begin{array}{ccc} c_{11} + 1 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} + 1 \end{array} \right] \middle| 2^{m-t+2} \middle| c_{12}, c_{21}; \ c_{11} \equiv c_{22} \pmod{2^{m-t+3}} \right\}.$$

如果 $c+1 \in \Gamma_{2(t-1)}$ 和 $a+1 \in \Delta$, 那么

$$(c,a) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{12}a_{21} - a_{12}c_{21} & a_{12}(c_{11} - c_{22}) + c_{12}(a_{22} - a_{11}) \\ a_{21}(c_{22} - c_{11}) + c_{21}(a_{11} - a_{22}) & c_{21}a_{12} - a_{21}c_{12} \end{bmatrix} .$$

在这个矩阵中, 注意到 p=2, 有对角线模 2^{m-t+3} 是同余的. 而且 (1,2) 位置上的元素是被 2^{m-t+2} 整除的, (2,1) 位置上的元素是被 2^{m-t+2} 整除的. 因此 $1+(c,a)\in\Gamma_{2(t-2)}$, 可以推出 $\Gamma_{2(t-1)}\leqslant\Delta_t$.

下面证明当 $t \ge 2$ 时, $\Delta_t \le \Gamma_{2(t-1)}$. 当 t = 2 很容易验证. 假设 $t \ge 3$ 以及 $\Delta_{t-1} = \Gamma_{2(t-2)}$.

设 $a+1 \in \Delta_t$ 考虑 4 个初等自同态 e^{ru} 其中 $\{r, u\} = \{x, y\}$. 由归纳假设以及 [4, 引理 6.3 和引理 6.9], 存在 \mathcal{J} 的中心的一个元 C^{ru} , 满足

$$[e^{ru} + 1, a + 1] \equiv C^{ru} + 1 \pmod{J_{2(t-2)}}.$$

用 d^{ru} 表示 (e^{ru}, a) , 有

$$d^{ru} \equiv (a+1)(e^{ru}+1)C^{ru} \pmod{J_{2(t-2)}}.$$

为了证明 $1+a\in\Gamma_{2(t-1)},$ 由 [4, 引理 6.3], 只需要证明 $a-a_{22}\in J_{2(t-1)},$ 或者等价地证明

$$2^{m-t+2}|a_{11}-a_{22}, 2^{m-t+1}|a_{12}, a_{21}.$$

又 $(d^{xx})_{22}$ 是被 2^{m-t+2} 整除的, 因此由 [4, 3]理 6.8 和引理 6.10], $d^{xx} \in J_{2(t-2)}$. 因此所有的 d^{xx} 都可以被 2^{m-t+2} 整除, 因为 $(d^{xx})_{21} = a_{21}e^{xy}$, $(d^{xx})_{12} = a_{12}e^{yx}$, 2^{m-t+2} 整除 a_{21} 和 a_{12} .

又 $(d^{yx})_{22} = -a_{21}$,因此可以被 2^{m-t+2} 整除. 由 [4, 引理 6.8 和引理 6.9], $d^{yx} \in J_{2(t-2)}$. 同时 $(d^{yx})_{12} = (a_{22} - a_{11})$ 也可以被 2^{m-t+2} 整除. 可以推出

$$2^{m-t+2}|a_{11}-a_{22}, \quad 2^{m-t+1}|a_{12}, a_{21},$$

因此 $a - a_{22} \in J_{2(t-1)}$, 由 [4, 引理 6.3], $a + 1 \in \Gamma_{2(t-1)}$. 归纳地可以完成证明.

下面的两个定理给出了群 U 和群 G 的幂零类之间的两个关系, 这对我们讨论它们之间幂零类的关系以及构造例子是有帮助的.

定理 3 如果 I 的幂零类为 c, G 的幂零类为 c-1, 则 U 的幂零类为 c-1.

证明 设 $G = \langle 1 + x_j \mid j \in J \rangle$. 由 [3, 引理 3.6], G 的幂零类为 c - 1 当且仅当对 I 的任意生成元 x_{i_k} , 换位子 $[1 + x_{i_1}, 1 + x_{i_2}, \dots, 1 + x_{i_k}]$ 都等于 1. 由 [3, 引理 9.1], 有

$$[1 + x_{i_1}, 1 + x_{i_2}, \dots, 1 + x_{i_c}] = 1 + [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_c}],$$

其中 $[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}]$ 是一个 Lie 积. 因此, 对 I 的任意生成元 x_{i_s} ,

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_c}] = 0.$$

设 $y_i \in N$, i = 1, ..., c 是 $x_{i_1}, ..., x_{i_c}$ 上单项式的线性组合. 又 I 的幂零类为 c, 则 U 上所有的换位子满足

$$[1+y_1, 1+y_2, \dots, 1+y_c] = 1 + \sum [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_c}] = 1,$$

其中 $y_i \in I$. 因此 U 的幂零类为 c-1.

定理 4 如果 G 是一个 Abel 群, 那么 U 也是一个 Abel 群.

证明 设 x,y 是 I 的任意两个生成元, 由于 I 的幂零类为 c, 有

$$[1+x,1+y] = \sum_{0 \le i+j \le c} (-1)^{i+j} x^i y^j (1+x)(1+y)$$
$$= 1 + \left(\sum_{0 \le i+j \le c-2} (-1)^{i+j} x^i y^j\right) [x,y].$$

由假设 G 是一个 Abel 群可以推出

$$\left(\sum_{0 \le i+j \le c-2} (-1)^{i+j} x^i y^j\right) [x, y] = 0.$$
 (2)

接下来我们将证明 [x,y] = 0. 把 (2) 右乘 I 的生成元上的单项式 $x_1x_2 \cdots x_{c-2}$, 得到

$$0 = x_1 x_2 \cdots x_{c-2} \left(\sum_{0 \le y + i \le c-2} (-1)^{i+j} x^i y^j \right) [x, y]$$

$$= x_1 x_2 \cdots x_{c-2}[x, y] + x_1 x_2 \cdots x_{c-2} \left(\sum_{0 < i+j \le c-2} (-1)^{i+j} x^i y^j \right) [x, y]$$

= $x_1 x_2 \cdots x_{c-2}[x, y]$.

基于这种事实, 我们有

$$\left(\sum_{0\leqslant i+j\leqslant c-3}(-1)^{i+j}x^iy^j\right)[x,y]=0.$$

对 i+j 进行归纳, [x,y]=0 对 I 的任意生成元成立.

设 u,v 是 I 的生成元上的单项式的线性组合. 直接计算, 得到 [1+u,1+v] 等于 1. 因此, U 是 Abel 群.

由定理 3 和定理 4 直接得到

推论 3 如果 I 的幂零类 \leq 3, 那么群 G 的幂零类等于群 U 的幂零类.

推论 3 说明如果 G 的幂零类小于 U 的幂零类, 那么 I 的幂零类至少是 4.

下面的例子表明: 存在环 I, 使得群 G 的幂零类小于群 U 的幂零类.

例 2 设 A 是自由生成元 $y_i, 1 \le i \le 4$ 上幂零类为 4 的自由幂零 K- 代数, 其中 K 是一个特征 为 0 的域. 作为 K 上的向量空间, A 有一组基: $y_{i_1} \cdots y_{i_k}$, 此时称它的度为 k. 设 I 是由

$$(1 - y_i - y_j - y_k)[y_i, y_j, y_k] - ([y_i, y_k] + [y_j, y_k])[y_i, y_j], \quad 1 \le i, j, k \le 4$$

生成的理想, 令 $R \neq A$ 对 I 的商代数, 即 R = A/I,

设

$$U = 1 + R$$
, $G = \langle 1 + x_i | 1 \le i \le 4 \rangle$,

其中 x_i 是 y_i 在自然同态作用下在 R 里的像. 则群 G 的幂零类是 2, 而群 U 的幂零类至少是 3, 所以 群 G 的幂零类小于群 U 的幂零类.

证明 直接计算可以得到

$$\begin{split} &[1+x_1,1+x_2,1+x_3]\\ &= \left[1+\sum_{0\leqslant k+l\leqslant 2}(-1)^{k+l}x_1^kx_2^l[x_1,x_2],1+x_3\right]\\ &= 1+\sum_{0\leqslant i+j\leqslant 2}(-1)^{i+j}\bigg(\sum_{0\leqslant k+l\leqslant 2}(-1)^{k+l}x_1^kx_2^l[x_1,x_2]\bigg)^ix_3^j\bigg[\sum_{0\leqslant k+l\leqslant 2}(-1)^{k+l}x_1^kx_2^l[x_1,x_2],x_3\bigg]\\ &= 1+(1-x_3)[(1-x_1-x_2)[x_1,x_2],x_3]\\ &= 1+(1-x_1-x_2-x_3)[x_1,x_2,x_3]-([x_1,x_3]+[x_2,x_3])[x_1,x_2]\\ &= 1\ \mathrm{mod}(I). \end{split}$$

类似地, 对所有 G 的生成元有 $[1+x_i,1+x_j,1+x_k]=1$, 又由 [3, 引理 3.6] 知 G 是一个幂零类为 2 的幂零群.

下面我们考虑群 U 的幂零类. 理想 I 可以表示成如下形式:

$$I = \langle (1 - x_i - x_j - x_k) | x_i, x_j, x_k \rangle - ([x_i, x_k] + [x_j, x_k]) | x_i, x_j \rangle | 1 \leqslant i, j, k \leqslant 4 \rangle$$

$$= \left\{ \sum [x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}] x_i + \sum x_j [x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}] + \sum ([x_k, x_l, x_r] - ([x_k, x_r] + [x_l, x_r]) [x_k, x_l]) \right\},$$

其中 $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}, x_i, x_j, x_k, x_l, x_r$ 是 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 的置换. 特别地, 考虑

$$[1 + x_1 + x_2, 1 + x_3, 1 + x_4] = 1 + (1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4)[x_1 + x_2, x_3, x_4]$$
$$- ([x_1 + x_2, x_4] + [x_3, x_4])[x_1 + x_2, x_3]$$
$$\equiv 1 - [x_2, x_4][x_1, x_3] - [x_1, x_4][x_2, x_3] \mod(I).$$

设

$$z = [x_2, x_4][x_1, x_3] + [x_1, x_4][x_2, x_3],$$

下面我们将证明 $z \notin I$, 那么群 U 的幂零类至少是 3, 即大于群 G 的幂零类. 假设 $z \in I$, 注意到 z 有表达式

$$\begin{split} z &= [x_2, x_4][x_1, x_3] + [x_1, x_4][x_2, x_3] \\ &= x_2 x_4 x_1 x_3 - x_4 x_2 x_1 x_3 - x_2 x_4 x_3 x_1 + x_4 x_2 x_3 x_1 \\ &+ x_1 x_4 x_2 x_3 - x_4 x_1 x_2 x_3 - x_1 x_4 x_3 x_2 + x_4 x_1 x_3 x_2 \\ &= [x_1, x_4, x_2] x_3 - x_4 [x_3, x_1, x_2] + [x_4 x_3, x_1, x_2] \\ &\equiv [x_4 x_3, x_1, x_2] \mod(I), \end{split}$$

z 中每一个单项式的度都是 4. 因此

$$z \in \left\{ \sum_{i} [x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}] x_i + \sum_{j} x_j [x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}] \right\},$$

否则 z 包含一个度为 3 的单项式. 因此

$$[x_4x_3, x_1, x_2] \in \left\{ \sum_i [x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}] x_i + \sum_j x_j [x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}] \right\}.$$

由于 x_1, x_2, x_3, x_4 的对称性, 同样有

$$[x_1x_2, x_3, x_4] \in \left\{ \sum_i [x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}] x_i + \sum_j x_j [x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}] \right\}.$$

设 $[x_1x_2, x_3, x_4]$ 表示成

$$[x_1, x_2, x_3]x_4, \quad [x_2, x_3, x_1]x_4, \quad x_4[x_1, x_2, x_3], \quad x_4[x_2, x_3, x_1], \dots, x_1[x_3, x_4, x_2].$$

单项式的 K- 线性组合. 总共存在这样的 4!=24 项, 由 Jacobi 恒等式

$$[x_1, x_2, x_3] + [x_2, x_3, x_1] + [x_3, x_1, x_2] = 0,$$

知 $[x_3,x_1,x_2] = -[x_1,x_2,x_3] - [x_2,x_3,x_1]$,因此可以由其中的 16 项表示,以对应的系数为未知数,将这些项展开比较对应单项式的系数,我们得到一个含有 24 个方程 16 个未知量的方程组. 则

$$[x_1x_2, x_3, x_4] \in \left\{ \sum_i [x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}] x_i + \sum_j x_j [x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}] \right\}$$

当且仅当该线性方程组至少有一解.

设 $[x_1, x_2, x_3]x_4, [x_2, x_3, x_1]x_4, x_1[x_2, x_3, x_4], x_1[x_3, x_4, x_2], [x_3, x_4, x_1]x_2, x_3[x_1, x_2, x_4]$ 对应的系数分别为 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$. 由

$$[x_1x_2, x_3, x_4] = x_1x_2x_3x_4 - x_3x_1x_2x_4 - x_4x_1x_2x_3 + x_4x_3x_2x_1,$$

以及

$$\begin{split} &[x_1,x_2,x_3]x_4=x_1x_2x_3x_4-x_2x_1x_3x_4-x_3x_1x_2x_4+x_3x_2x_1x_4,\\ &[x_2,x_3,x_1]x_4=x_2x_3x_1x_4-x_3x_2x_1x_4-x_1x_2x_3x_4+x_1x_3x_2x_4,\\ &x_1[x_2,x_3,x_4]=x_1x_2x_3x_4-x_1x_3x_2x_4-x_1x_4x_2x_3+x_1x_4x_3x_2,\\ &x_1[x_3,x_4,x_2]=x_1x_3x_4x_2-x_1x_4x_3x_2-x_1x_2x_3x_4+x_1x_2x_4x_3,\\ &[x_3,x_4,x_1]x_2=x_3x_4x_1x_2-x_4x_3x_1x_2-x_1x_3x_4x_2+x_1x_4x_3x_2,\\ &x_3[x_1,x_2,x_4]=x_3x_1x_2x_4-x_3x_2x_1x_4-x_3x_4x_1x_2+x_3x_4x_2x_1, \end{split}$$

的展开式有下列等式 (下面的 5 个单项式仅出现在上述表达式中):

由 $x_1x_3x_2x_4$ 对应的系数相等得到 $a_2 - a_3 = 0$;

由 $x_3x_4x_1x_2$ 对应的系数相等得到 $a_5 - a_6 = 0$;

由 $x_1x_4x_3x_2$ 对应的系数相等得到 $a_5 + a_3 - a_4 = 0$;

由 $x_3x_2x_1x_4$ 对应的系数相等得到 $a_1 - a_2 - a_6 = 0$,

则有 $a_2 = a_3, a_5 = a_6, a_1 = a_4$;

由 $x_1x_2x_3x_4$ 对应的系数相等得到 $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = 1$,

与上述 $a_2 = a_3, a_1 = a_4$ 矛盾.

因此这个方程组无解, 所以

$$[x_1x_2, x_3, x_4] \notin \left\{ \sum_i [x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}] x_i + \sum_j x_j [x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}] \right\},$$

于是 $[x_1x_2, x_3, x_4] \notin I$. 即 $z \notin I$, 这表明 G 的幂零类小于 U 的幂零类.

进一步地, 本文的群例如何在某个含 1 环 R 上的线性群 $\mathrm{Tr}_1(n,R)$ 上实现, 是个值得考虑的问题. 另外, 本文的方法是构造性的, 它为构造其它的幂零群例可能提供了一条有效的思路.

参考文献.

- $1\,\,$ Robinson D J S. A Course in the Theory of Groups, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1995
- 2 McLain D H. A characteristically-simple group. Proc Cambridge Philos Soc, 1954, 50: 641-642
- $3\,\,$ Khukhro E I. p-Automorphisms of Finite p-groups . Cambridge: Cambridge University Press, 1997
- 4 Aviñó M A, Schultz P. The upper central series of a p-group acting on a bounded abelian p-group. arXiv:math. GR/0606605 v1 23 Jun 2006