

利用宇宙飞船检测引力波

周威彦

童 傅

(加拿大皇后大学)

(中国科学院紫金山天文台)

摘 要

本文讨论了单色平面引力波对宇宙飞船轨道的影响。着重指出 $\frac{\bar{\omega}}{n} = 2$ 和 $\frac{\bar{\omega}}{n} = 1, 3$ 这三种主共振态是二类不同的共振态,前者直接影响系统的能量,而后者则主要使轨道在空间转动和改变形状。

一、引 言

广义相对论所预言的引力辐射,由于过于微弱较难寻找,至今仍是实验物理学家的一个猎取目标。自从二年前用引力辐射理论合理地解释了脉冲双星 PSR1913 + 16 的周期变化后,增强了人们在宇宙现象中寻找引力波的信心。当前在月球激光测距,海盗号火星探测器的高精度测距及 Van Patten-Everitt 卫星跟踪卫星计划中都安排了检测引力波的工作。目前,卫星-卫星多卜勒测速的精度已达 10^{-4} cm/s,估计不久还可提高一个量级。因此,通过一周的跟踪有可能检测出能源密度为 10^4 erg/s · cm² 的引力波。早在 1971 年 Anderson^[1] 在处理水手六号、七号飞船的多卜勒讯号时就意识到利用宇宙飞船检测引力波的可能性。1975 年苏联 Руденко^[2], 研究了低频单色平面引力波对沿圆轨道运动的人造卫星的影响。以后, Mashhoon^[3,4] 及 Turner^[5] 又讨论了椭圆轨道的情况,并且指出当引力波频率与飞船轨道运动轨率之比为正整数时将出现共振。当比值为 1, 2, 3 时出现主共振,这时即使轨道偏心率退化为零共振也不消失。

本文将讨论当单色平面引力波作用于一个作椭圆运动的飞船-地球系统时,飞船轨道的变化。本文着重指出,以前大家公认的 $\frac{\bar{\omega}}{n} = 1, 2, 3$, 三个主共振态中只有“2”是真共振,它直接影响系统的能量,导致系统失散。而其他两个状态则不同,它们不会使系统的能量有长期变化,只会使椭圆不断旋转和改变椭圆的形状。它们的物理特征与“2”完全不同。

二、运动方程

设摄动引力波是一弱场,可用线性近似:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (1)$$

另外,假设引力波 $h_{\mu\nu}$ 满足横向无迹规定^[6]. 若宇宙飞船轨道椭圆的大小 a 远小于引力波波长,则按照 Mashhoon 的方法^[3],考虑由引力波所引起的测地线的微差来求导飞船对地球的相对运动,有

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \frac{GM}{r^3}\gamma = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h^- \cdot \gamma, \quad (2)$$

对于沿 z 轴入射的单色平面波其 $h_{\mu\nu}$ 可写成:

$$h_{\mu\nu} = \text{Re} \{ (A_+ t_{\mu\nu} + A_\times S_{\mu\nu}) e^{-i\bar{\omega}(t - \frac{z}{C})} \} \quad (3)$$

其中 C 为光速, $\bar{\omega}$ 为引力波频率, A_+ 、 $A_\times$ 为二个独立的线偏振振幅. 根据横向无迹规定,压力张量和剪切张量可表示为

$$(t_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (S_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

引进 h_0 、 α_1 、 α_2 , 令

$$A_+ = h_0 \cos \alpha_1, \quad A_\times = -h_0 \sin \alpha_1, \quad (5)$$

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\bar{\omega}}{C} z.$$

引力波作用在飞船上的附加摄动力可表示为

$$\begin{cases} F_{x'} = \frac{\bar{\omega}^2}{2} h_0 \sin(\bar{\omega}t + \alpha_2)(-x' \cos \alpha_1 + y' \sin \alpha_1), \\ F_{y'} = \frac{\bar{\omega}^2}{2} h_0 \sin(\bar{\omega}t + \alpha_2)(x' \sin \alpha_1 + y' \cos \alpha_1), \\ F_z = 0. \end{cases} \quad (6)$$

为计算方便,不失一般,我们可将坐标系 $(x'y'z)$ 绕 z 轴后退 $\frac{\alpha_1}{2}$ 度,这样在新坐标系 (xyz) 中摄动力可简化为

$$\begin{cases} F_x = -\frac{\bar{\omega}^2}{2} h_0 \sin(\bar{\omega}t + \alpha_2)x, \\ F_y = \frac{\bar{\omega}^2}{2} h_0 \sin(\bar{\omega}t + \alpha_2)y, \\ F_z = 0. \end{cases} \quad (7)$$

而宇宙飞船的坐标则可表示为

$$\gamma = a(\cos E - e)\mathbf{P} + a\sqrt{1-e^2} \sin E \mathbf{Q}. \quad (8)$$

其中

$$\mathbf{P} = \begin{cases} \cos Q \cos \omega - \sin Q \sin \omega \cos I, \\ \sin Q \cos \omega + \cos Q \sin \omega \cos I, \\ \sin \omega \sin I. \end{cases}$$

$$Q = \begin{cases} -\cos Q \sin \omega - \sin Q \cos \omega \cos I, \\ -\sin Q \sin \omega + \cos Q \cos \omega \cos I, \\ \cos \omega \sin I. \end{cases}$$

其中 $Q = \eta + \frac{\alpha_1}{2}$, n 满足 $n^2 a^3 = \mu$.

再有克卜勒方程

$$E - e \sin E = M = n(t - T), \quad (10)$$

并令 $\alpha'_2 = \alpha_2 + \bar{\omega} T$.

三、摄动计算

对于上节中建立起来的运动方程,根据天体力学中的摄动理论,可导出引力波对飞船轨道的影响.

如果飞船原在 $z = 0$ 平面上运动,由于 $F_z = 0$ 它将永远在此平面上. 反之,若飞船轨道面与 z 轴不垂直,则 z 将不为常数. 但是,我们曾假设 $\frac{\bar{\omega}}{C} a \ll 1$. 因此,我们将略去含 $\frac{\bar{\omega}}{C} z h_0$ 的项. 为书写方便,引进记号 $C_{K,i}$ 和 $S_{K,i}$.

$$\left\{ \begin{aligned} C_{K,i} &= \frac{\cos \left[\alpha'_2 + \left(\frac{\bar{\omega}}{n} - K + i \right) E \right]}{\left(\frac{\bar{\omega}}{n} - K + i \right)} + \frac{\cos \left[\alpha'_2 + \left(\frac{\bar{\omega}}{n} - K - i \right) E \right]}{\left(\frac{\bar{\omega}}{n} - K - i \right)}, \\ S_{K,i} &= \frac{\sin \left[\alpha'_2 + \left(\frac{\bar{\omega}}{n} - K + i \right) E \right]}{\left(\frac{\bar{\omega}}{n} - K + i \right)} - \frac{\sin \left[\alpha'_2 + \left(\frac{\bar{\omega}}{n} - K - i \right) E \right]}{\left(\frac{\bar{\omega}}{n} - K - i \right)}. \end{aligned} \right. \quad (11)$$

引力波对飞船机械能、动量矩的影响可表示为

$$\Delta \varepsilon = \frac{a^2 \bar{\omega}^2}{4} h_0 \sum_{-\infty}^{\infty} J_K \left(e \frac{\bar{\omega}}{n} \right) \left[(P_y^2 - P_x^2) \left(\frac{1}{2} S_{K,2} - e S_{K,1} \right) - (Q_y^2 - Q_x^2) \frac{1 - e^2}{2} S_{K,2} + (P_y Q_y - P_x Q_x) \sqrt{1 - e^2} (e C_{K,1} - C_{K,2}) \right], \quad (12)$$

$$\Delta \mathbf{G} = \begin{cases} D[P_x P_z A + Q_y Q_z B + (P_y Q_z + P_z Q_y) C]; \\ D[P_x P_z A + Q_x Q_z B + (P_x Q_z + P_z Q_x) C]; \\ -2D[P_x P_y A + Q_x Q_y B + (P_x Q_y + P_y Q_x) C]. \end{cases} \quad (13)$$

而角动量大小 $G \equiv |\mathbf{G}|$, 有

$$\Delta G = D[(A - B)(P_x Q_x - P_y Q_y) + C(P_y^2 - P_x^2 - Q_y^2 + Q_x^2)]. \quad (14)$$

其中

$$\left\{ \begin{aligned} D &= \frac{\bar{\omega}^2 a^2}{4n} h_0; \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \sum_{-\infty}^{\infty} J_K \left(e \frac{\bar{\omega}}{n} \right) \left[\left(\frac{1}{2} + 2e^2 \right) C_{K,0} - \left(\frac{11}{4} + e^2 \right) e C_{K,1} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2} + e^2 \right) C_{K,2} - \frac{e}{4} C_{K,3} \right]; \\ B &= \sum_{-\infty}^{\infty} J_K \left(e \frac{\bar{\omega}}{n} \right) (1 - e^2) \left[\frac{1}{2} C_{K,0} - \frac{e}{4} C_{K,1} - \frac{1}{2} C_{K,2} + \frac{e}{4} C_{K,3} \right]; \\ C &= \sum_{-\infty}^{\infty} J_K \left(e \frac{\bar{\omega}}{n} \right) \sqrt{1 - e^2} \left[-\frac{5}{4} e S_{K,1} + \frac{1}{2} (1 + e^2) S_{K,2} - \frac{e}{4} S_{K,3} \right]; \end{aligned} \right. \quad (15)$$

从 (13)、(14) 我们不难导出引力波对轨道倾角 I 、升交点经度 Q 及偏心率 e 的影响

$$\begin{aligned} \Delta I &= \frac{h_0}{4} \left(\frac{\bar{\omega}}{n} \right)^2 (1 - e^2)^{-\frac{1}{2}} \sin I \left[\left(\frac{A - B}{2} \sin 2\omega + C \cos 2\omega \right) \cos I \cos 2Q \right. \\ &\quad \left. + (A \cos^2 \omega + B \sin^2 \omega - C \sin 2\omega) \sin 2Q \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \frac{h_0}{4} \left(\frac{\bar{\omega}}{n} \right)^2 (1 - e^2)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{A - B}{2} \sin 2\omega \sin 2Q \right. \\ &\quad \left. + (A \sin^2 \omega + B \cos^2 \omega) \cos I \cos 2Q \right. \\ &\quad \left. + C (\sin 2Q \cos 2\omega + \cos 2Q \sin 2\omega \cos I) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

$$\Delta e = \frac{h_0}{4} \left(\frac{\bar{\omega}}{n} \right)^2 [(p_y^2 - p_x^2) A_e + (Q_y^2 - Q_x^2) B_e + (P_y Q_y - P_x Q_x) C_e]. \quad (18)$$

其中

$$\left\{ \begin{aligned} A_e &= \sum_{-\infty}^{\infty} J_K \left(e \frac{\bar{\omega}}{n} \right) (1 - e^2) \left(\frac{1}{4} S_{K,1} - \frac{e}{2} S_{K,2} + \frac{1}{4} S_{K,3} \right); \\ B_e &= \sum_{-\infty}^{\infty} J_K \left(e \frac{\bar{\omega}}{n} \right) (1 - e^2) \left(-\frac{5}{4} S_{K,1} + e S_{K,2} - \frac{1}{4} S_{K,3} \right); \\ C_e &= \sum_{-\infty}^{\infty} J_K \left(e \frac{\bar{\omega}}{n} \right) (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{5}{2} e C_{K,0} - \left(\frac{3}{2} + \frac{9}{4} e^2 \right) C_{K,1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} e C_{K,2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{e^2}{4} \right) C_{K,3} \right). \end{aligned} \right. \quad (18')$$

另外, 根据拉格朗日方程, 我们还可给出轨道椭圆在轨道平面内的转动,

$$\begin{aligned} \Delta \omega + \Delta Q \cos I &= \frac{h_0}{4} \left(\frac{\bar{\omega}}{n} \right)^2 \frac{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{e} [F(p_y^2 - p_x^2) + H(Q_y^2 - Q_x^2) \\ &\quad + K(P_y Q_y - P_x Q_x)]. \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$\left\{ \begin{aligned} F &= \sum_{-\infty}^{\infty} J_K \left(e \frac{\bar{\omega}}{n} \right) \left(-2e C_{K,0} + \left(\frac{5}{4} + e^2 \right) C_{K,1} - \frac{1}{4} C_{K,3} \right); \\ H &= \sum_{-\infty}^{\infty} J_K \left(e \frac{\bar{\omega}}{n} \right) \left(\frac{e}{2} C_{K,0} - \frac{1}{4} C_{K,1} - \frac{e}{2} C_{K,2} + \frac{1}{4} C_{K,3} \right); \\ K &= \sum_{-\infty}^{\infty} J_K \left(e \frac{\bar{\omega}}{n} \right) (1 - e^2)^{-\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{3}{2} - \frac{11}{4} e^2 \right) S_{K,1} + \frac{e}{2} (1 + e^2) S_{K,2} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{2} - \frac{e^2}{4} \right) S_{K,3} \right]. \end{aligned} \right. \quad (20)$$

四、主共振态的讨论

从上节所列诸式可见,在引力波的影响下,宇宙飞船轨道椭圆的诸根数将围绕其平均值作周期性振荡。但是,当 $\bar{\omega}/n$ 接近或等于正整数时,将出现共振。这时,一些轨道根数将产生长期或长期变化。我们同时还可以看到上述各式的振幅中,绝大多数都含有偏心率 e 作因子,唯有 $\bar{\omega}/n = 1, 2, 3$ 时出现的共振项中会有不含 e 因子的共振项,它们即使在 $e = 0$ 时也不会消失,因此人们称之为主共振态。自从 1975 年 Руденко 讨论引力波对飞船运动的影响开始, Mashhoon, Turner 等所有讨论这个问题的作者都认为三个主共振态都会导致系统失散。他们应用了坐标摄动法。我们亦曾应用坐标摄动法得到了类似的结果。但是在这里使用坐标摄动法是不合适的。对于共振态采用根数摄动法较适宜。通过轨道椭圆各根数的摄动表式,我们可以看到,这三个主共振态具有二种不同的物理特性。主共振态 $\bar{\omega}/n = 2$ 直接影响飞船系统的能量,使它逃逸或陨落。但是,主共振态 $\bar{\omega}/n = 1, 3$ 则不然,它不直接影响宇宙飞船轨道运动的能量,而只会使它的轨道椭圆在空中旋转和改变形状。下面我们作一些具体的讨论。

(1) $\bar{\omega}/n = 2$

这时, ε, Q 及 I 等轨道根数将出现共振,其主共振项为

$$\begin{cases} \Delta\varepsilon = \frac{\mu h_0}{a} \left\{ \sin^4\left(\frac{I}{2}\right) \cos(2Q + q) + \cos^4\left(\frac{I}{2}\right) \cos(2Q - q) \right\} E; \\ \Delta Q = \frac{-h_0}{2} \left\{ \cos^2\left(\frac{I}{2}\right) \sin(2Q + q) + \sin^2\left(\frac{I}{2}\right) \sin(2Q - q) \right\} E; \\ \Delta I = \frac{-h_0}{2} \sin I \left\{ \cos^2\left(\frac{I}{2}\right) \cos(2Q + q) - \sin^2\left(\frac{I}{2}\right) \cos(2Q - q) \right\} E; \\ \Delta q = -2h_0 \left\{ \cos^4\left(\frac{I}{2}\right) \sin(2Q + q) - \sin^4\left(\frac{I}{2}\right) \sin(2Q - q) \right\} E. \end{cases} \quad (21)$$

其中, $q = 2\omega - \alpha'_2$ 。特别是在 $Q = 0$ 或 $\pm \frac{\pi}{2}$, 即升交点位于偏振面内时,上式可简化为

$$\begin{cases} \Delta\varepsilon = \frac{\mu h_0}{a} \cos q \left[\sin^4\left(\frac{I}{2}\right) + \cos^4\left(\frac{I}{2}\right) \right] E; \\ \Delta I = -\frac{h_0}{2} [\sin I \cos I \cos q] E; \\ \Delta Q = \frac{h_0}{2} [\cos I \sin q] E; \\ \Delta q = -2h_0 \sin q \left[\sin^4\left(\frac{I}{2}\right) + \cos^4\left(\frac{I}{2}\right) \right] E. \end{cases} \quad (22)$$

因此,当 $\cos q > 0$ 时,飞船运动的能量将增大,轨道椭圆将变大,而轨道平面则在引力波的压迫之下趋于垂直于波的传播方向,而 q 的变化将有助于这个方程。反之,若 $\cos q < 0$, 则轨道椭圆将变小,轨道面在引力波的影响之下将趋于波的传播方向。 q 的变化将延缓这过程。

(2) $\bar{\omega}/n = 1$

这时 e 、 ω 等轨道根数出现共振, 其主共振项为

$$\begin{cases} \Delta e = \frac{h_0}{16} \{ -2 \cos 2Q \sin^2 I \cos(2\omega - q) \\ \quad + 3 \cos 2Q (1 + \cos^2 I) \cos q \\ \quad - 6 \sin 2Q \cos I \sin q \} E; \\ \Delta \omega = \Delta q = \frac{h_0}{16e} \{ 2 \cos 2Q \sin^2 I \sin(2\omega - q) \\ \quad - 3 \cos 2Q (1 + \cos^2 I) \sin q \\ \quad - 6 \sin 2Q \cos I \cos q \} E. \end{cases} \quad (23)$$

现讨论升交点在偏振面内的情况, 这时 $Q = 0$ 或 $\pm \frac{\pi}{2}$. (23) 式可改写成

$$\begin{cases} \Delta e = \frac{h_0}{16} \{ -2 \sin^2 I \cos(2\omega - q) \\ \quad + 3(1 + \cos^2 I) \cos q \} E, \\ \Delta \omega = \Delta q = \frac{h_0}{16e} \{ 2 \sin^2 I \sin(2\omega - q) \\ \quad - 3(1 + \cos^2 I) \sin q \} E. \end{cases} \quad (24)$$

当 $\omega = q = 0$ 时, (24) 式有驻定解:

$$\begin{cases} \Delta e = \frac{h_0}{16} (1 + 5 \cos^2 I) E, \\ \Delta \omega = \Delta q = 0. \end{cases} \quad (25)$$

这时, 引力波将轨道椭圆压扁.

(3) $\bar{\omega}/n = 3$

这时 e 、 ω 及 q 的主共振项为

$$\begin{cases} \Delta e = \frac{9}{16} h_0 \{ \cos 2e (1 + \cos^2 I) \cos q \\ \quad - 2 \sin 2Q \cos I \sin q \} E; \\ \Delta \omega = -\Delta q = \frac{9}{16} \frac{h_0}{e} \{ \cos 2Q (1 + \cos^2 I) \sin q \\ \quad + 2 \sin 2Q \cos I \cos q \} E. \end{cases} \quad (26)$$

方程在 $Q = 0$ 或 $\pm \frac{\pi}{2}$ 时, 可简化成

$$\begin{cases} \Delta e = \frac{9}{16} h_0 \{ (1 + \cos^2 I) \cos q \} E; \\ \Delta \omega = -\Delta q = \frac{9}{16} \frac{h_0}{e} \{ (1 + \cos^2 I) \sin q \} E. \end{cases} \quad (27)$$

(27) 式在 $q = 0$ 时驻定的解:

$$\begin{cases} \Delta e = \frac{9}{16} h_0 (1 + \cos^2 I) E; \\ -\Delta \omega = \Delta q = 0. \end{cases} \quad (28)$$

当 $q \neq 0$ 或 $\pm\pi$ 时, 有分析解:

$$\begin{cases} e = e_0 / |\sin q|; \\ \operatorname{ctg} q = \pm \frac{9}{16} \frac{h_0}{e_0} (1 + \cos^2 I) E + C. \end{cases} \quad (29)$$

其中 $\sin q > 0$ 时取“+”号, $\sin q < 0$ 时取“-”号.

上面我们讨论了引力波对宇宙飞船运动影响的一般特征. 可以作为利用宇宙飞船检测引力波时参考.

参 考 文 献

- [1] Anderson, A. J., *Nature*, **229**, p. 547, 1971.
- [2] Руденко, В. Н., *А. Ж.*, **52**, p. 444, 1975.
- [3] Mashhoon, B., *Ap. J.*, **223**, p. 285, 1978.
- [4] Mashhoon, B., *Ap. J.*, **227**, p. 1019, 1979.
- [5] Turner, M. S., *Ap. J.*, **233**, p. 685, 1979.
- [6] Misner, C. W., Thorne, K. S. and Wheeler, J. A., *Gravitation* (San Francisco: Freeman), 1973.

DETECTION OF GRAVITATIONAL WAVE BY SPACECRAFT

W. Y. Chau

Tong Fu

(Queen's University, Canada) (Purple Mountain Observatory, Academia Sinica)

Abstract

The orbital perturbations of a spacecraft with the monochromatic gravitational plane waves are discussed here.

Our attention in this paper is to distinct the resonance of $\frac{\bar{\omega}}{n} = 2$ from $\frac{\bar{\omega}}{n} = 1, 3$. They are classified in two groups. The former one disturbs the energy of the system directly and the latters perturb the shape of the orbits and cause the orbits rotate in the space.