向量优化问题的线性标量化方法和 Lagrange 乘子研究

杨新民^{1*}, 陈光亚²

1. 重庆师范大学数学科学学院, 重庆 401331;

2. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190

E-mail: xmyang@cqnu.edu.cn, chengy@amss.ac.cn

收稿日期: 2019-01-31; 接受日期: 2019-06-26; 网络出版日期: 2020-01-06; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11431004 和 11771064) 和重庆市自然科学基金 (批准号: cstc2018jcyj-yszxX0009) 资助项目

摘要 向量优化是数学规划一个重要分支, 其理论与方法不仅与很多学科有密切联系, 而且在新兴的多学科交叉领域中有着广泛的应用. 本文从向量值广义凸映射、择一定理、线性标量化方法和 Lagrange 乘子存在性定理等 4 个方面对这一领域的研究进展情况及所用方法作了较为系统的总结. 首先, 介绍基于像空间方法的一类广义凸向量值映射和集值映射, 总结已有的广义凸映射之间的关系. 其次, 介绍线性系统下择一定理到非线性系统下择一定理的发展, 重点总结凸性或广义凸性条件下的择一定理研究. 同时, 针对择一定理的应用, 给出向量优化问题各种解在凸或广义凸性条件下的线性标量化方法, 进而总结向量优化问题的解, 特别是真有效解的 Lagrange 乘子存在性结果.

关键词 向量优化 广义凸性 择一定理 线性标量化 Lagrange 乘子存在性

MSC (2010) 主题分类 90C26, 90C29, 90C30, 90C46

1 引言

在很多实际问题中, 衡量一个决策“好”或“坏”的标准往往不止一个, 一般需要多个, 甚至是无限多个指标来衡量. 例如, 人们购买一种商品时, 不仅考虑商品的质量, 还要考虑商品的价格等多个指标. 从数学上讲, 这一类问题就是向量极值问题, 即研究在某种约束条件下向量值函数 (多个甚至无限多个数值目标的函数) 的最优化问题. 我们将这一类问题称为多目标优化或向量优化问题.

向量优化问题 (vector optimization problem, VOP) 的数学模型通常包含三部分: 决策空间 (决策集或可行集)、向量值函数 (目标函数和约束函数) 和目标空间及其上定义的偏序, 其数学模型为

$$(\text{VOP}) \quad \min_{x \in S} f(x),$$

英文引用格式: Yang X M, Chen G Y. The linear scalarizations and Lagrange multipliers for vector optimization (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 253–268, doi: 10.1360/N012019-00042

其中 X 是线性空间, Y 是局部凸线性空间, $D \subset Y$ 是点凸锥, S 是 X 中的非空子集, $f: S \rightarrow Y$ 是向量值映射. 特别地, 当 $Y = \mathbb{R}^p$ 时, (VOP) 退化为如下多目标优化问题 (multiobjective optimization problem, MOP):

$$(\text{MOP}) \quad \min_{x \in S} (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))^T,$$

其中 $\mathbb{R}^p$ 表示 p 维 Euclid 空间. 当 $p = 1$ 时, (MOP) 退化为如下数值优化问题:

$$(\text{P}) \quad \min_{x \in S} f_1(x).$$

若将 (VOP) 中的目标函数推广为集值映射 $F: S \rightarrow 2^Y$, 则该优化问题称为集值优化问题 (set-valued optimization problem, SVOP).

向量优化问题的起源最早可以追溯到经济学中. 例如, Franklin 提出了多个目标的矛盾如何协调的问题^[1]; Smith^[2] 提出了经济均衡问题; Edgeworth^[3] 研究了均衡竞争等. 但国际上一般认为向量优化问题最早是由法国经济学家 Pareto 在经济福利问题中提出的. 他在经济福利理论的著作^[4]中, 不仅提出了多目标优化问题, 并且还引进了 Pareto 最优的概念. 这对于向量优化问题的形成起着十分重要的作用, 具有深远影响. 尽管如此, 向量优化学科的正式形成开始于 20 世纪 50 年代. 1951 年, Koopmans^[5] 从生产与分配的活动分析中提出了多目标优化问题, 并且第一次提出了 Pareto 最优解的概念. 同年, Kuhn 和 Tucker^[6] 从数学规划的角度, 给出了多目标优化问题 Pareto 最优解的概念, 并研究了它的充分与必要条件. 1954 年, Debreu^[7] 对于价值理论和 Pareto 最优性条件的研究, 使向量优化问题逐渐受到人们的关注. 1968 年, Johnsen^[8] 出版了第一部关于多目标决策模型的专著. 从此, 不少学者先后转入这一研究领域, 取得许多成果, 建立了向量优化问题的基本理论, 使之成为应用数学的一个新的学科分支.

对于向量优化问题, “最优解” 的概念与数值优化问题最优解的概念有本质不同. 其主要原因是, 与实数的大小关系不同, 向量序关系并非全序, 即向量空间中不同元素之间不一定都能比较大小. 因此, 向量优化问题 “最优解” 概念的建立是基于凸锥 $D \subset Y$ 诱导的二元关系, 即对任意的 $x, y \in Y$, 考虑序关系 $y \leq_D z \Leftrightarrow z - y \in D$. 容易证明, 二元关系 $\leq$ 是偏序关系当且仅当 D 是点凸锥.

此外, 我们还需要如下序关系:

$$\begin{aligned} y <_D z &\Leftrightarrow z - y \in \text{int}D, \\ y \leq_D z &\Leftrightarrow z - y \in D \setminus \{0\}, \end{aligned}$$

其中 $\text{int}D$ 表示 D 的拓扑内部.

经典的 Pareto 最优表达的是 “找不到比之更好就是最好” 的思想, 是由 $\mathbb{R}^p$ 的非负象限 (或称为自然锥序) $\mathbb{R}_+^p$ 诱导的偏序关系定义的, 即 $\bar{x} \in S$ 称为 (MOP) 的 Pareto 有效解, 若不存在 $x \in S$ 使得 $f(x) \leq_{\mathbb{R}_+^p} f(\bar{x})$, 或等价地,

$$(f(S) - f(\bar{x})) \cap (-\mathbb{R}_+^p) = \{0\}.$$

同理, 若不存在 $x \in S$ 使得 $f(x) <_{\mathbb{R}_+^p} f(\bar{x})$, 或等价地,

$$(f(S) - f(\bar{x})) \cap (-\text{int}\mathbb{R}_+^p) = \emptyset,$$

则称 $\bar{x}$ 为 (MOP) 的 Pareto 弱有效解.

对于 (VOP) 问题, 其“最优解”概念是将自然锥序推广到一般锥序 D , 通过偏序关系 $\leq_D$ 引进锥有效解和锥弱有效解. 同理, 也可对集值优化问题 (SVOP) 引进弱有效解 (弱有效元) 和有效解 (有效元) 的概念.

虽然, Pareto 有效解很好地刻画了多目标优化问题解的“最优性”, 但依然存在一些不好的性质. 例如, 1951 年, Kuhn 和 Tucker^[6] 在 Pareto 有效解的最优性条件的研究过程中, 发现 Pareto 有效解集合过大, 甚至并不具备线性标量优化特征. 为了消除这一反常性质, 他们针对可微多目标优化问题, 首次提出了真有效解的概念, 后被称为 Kuhn-Tucker 真有效解. 此后, 很多学者开始通过不同的方法加强有效解的条件, 得到一系列向量优化问题真有效解的概念, 如 Geoffrion 真有效解^[9]、Borwein 真有效解^[10]、Benson 真有效解^[11]、Henig 真有效解^[12] 和超有效解^[13] 等.

另一方面, 注意到这些精确解的存在性需要可行集 S 的紧性和目标函数 $f(x)$ 的连续性条件, 而很多实际问题建立优化模型后并不满足这些条件. 此外, 在计算过程中, 数值算法通常产生的是优化问题的近似解. 因此, 从理论和计算的角度, 我们需要进一步研究向量优化问题的近似解的概念. 20 世纪 70 年代开始, 一些学者开始提出一系列近似解的概念. 例如, Kutateladze^[14] 首次针对向量优化问题, 引进了近似有效解和近似弱有效解的概念. 随后, White^[15] 和 Tanaka^[16] 等又提出了新的近似解的概念. 2006 年, Gutiérrez 等^[17,18] 通过 co-radiant 集 $C \subset Y$ ($\forall \alpha \geq 1, \alpha C \subset C$) 统一了多种近似解的概念. 除此之外, 文献 [19] 利用改进集 (improvement set) $C \subset Y$ ($0 \notin C$ 且 $C + D = C$), 引进了向量优化问题统一解的概念.

近几十年来, 对于向量优化问题的理论研究除了各类解的概念外, 还包括各类解之间的关系, 特别是多种真有效解之间的关系 (参见文献 [20–22]); 一定条件下 (弱) 有效解与各类真有效解的存在性研究 (参见文献 [23–26]); 在凸性或广义凸性条件下的择一定理及其各类解的线性标量化和非凸条件下的非线性标量化 (参见文献 [27–33]); 各类解的 Lagrange 乘子存在性定理、鞍点定理和对偶定理 (参见文献 [34–41]) 等. 这些理论成果越来越多地发表在国际一流的重要期刊上. 从 20 世纪 80 年代开始出版了很多向量优化相关的专著和综述性文献 (参见文献 [42–49]). 与此同时, 这一学科在经济、决策、管理、工程设计、环境保护、医疗卫生、交通运输和国家安全等诸多领域得到了广泛的应用 (参见文献 [50–52]).

在向量优化问题的理论研究中, 特别是各类解的 Fritz John 型和 Kuhn-Tucker 型最优性条件、线性标量化刻画、Lagrange 乘子的存在性及其对偶理论中, 向量优化问题相关集合或函数的凸性或广义凸性, 基本上是必备的条件. 也可以说, 凸性或广义凸性概念贯穿整个向量优化理论. 因此, 本文主要介绍向量值映射的凸性和广义凸性的研究进展及基于凸性或广义凸性条件的择一定理, 并介绍基于择一定理的向量优化问题各种解的线性标量化方法和 Lagrange 乘子存在性的理论研究现状. 首先, 第 2 节介绍基于像空间分析的向量值凸映射和广义凸映射, 并给出它们之间的关系. 第 3 节介绍择一定理及其在向量优化问题中的应用. 主要阐述线性系统下的择一定理到非线性系统的择一定理的推广, 特别是在凸性或广义凸性条件下的择一定理研究. 针对向量优化问题的线性标量化方法进行详细的阐述, 介绍基于第 2 节中广义凸函数类下的线性标量化刻画. 最后, 在线性标量化结果的基础上, 进一步介绍向量优化问题各种解, 特别是真有效解的 Lagrange 乘子存在性定理.

2 基于像空间方法的广义凸性

凸性理论, 包括凸集和凸函数在最优化理论中起着重要作用. 这主要基于凸函数具备很好的性质.

例如, 实值凸函数在定义域内部几乎处处左右可导、局部 Lipschitz 连续和存在次梯度向量等. 此外, 凸数值优化问题可通过次梯度向量等价刻画最优解, 并且其局部极小点为全局极小点. 但是, 面对实际问题, 不论是对集合还是对函数的凸性要求, 都是较强的. 我们更多需要解决的是非凸优化问题. 为此, 多年来人们通过多种途径减弱凸性条件, 引进广义凸性概念. 它们能保持凸函数良好的性质, 但相比凸函数条件更弱, 这样的函数如拟凸和伪凸等 (参见文献 [53]).

同样, 在向量优化问题理论与方法的研究中, 向量值映射的凸性或广义凸性概念也作为重要基础被诸多学者广泛研究. 本节主要介绍一类基于像空间方法的向量值广义凸映射.

对于凸集 $S \subset X$ 上的实值函数 ϕ , 凸性概念定义为, 对于任意的 $\lambda \in (0, 1)$ 和 $x, y \in S$, 有

$$\phi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda\phi(x) + (1 - \lambda)\phi(y).$$

容易验证 ϕ 是 S 上的凸函数当且仅当其上图 $\text{epi}\phi = \{(x, \alpha) \in S \times \mathbb{R} : \phi(x) \leq \alpha\}$ 为凸集.

对于凸集 $S \subset Y$ 上的向量值函数 $f : S \rightarrow Y$, 1973 年, Craven 和 Mond^[54] 将实值凸函数的概念通过向量空间中的锥序 D 直接推广到向量值映射, 给出了 f 的锥凸性概念.

定义 2.1^[54] f 称为 D -凸函数, 若对于任意的 $\lambda \in (0, 1)$, $x_1, x_2 \in S$, 有

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) - f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \in D,$$

或等价地表示为

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq_D \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

容易验证, f 是 D -凸函数等价于 f 的上图 $\text{epi}f = \{(x, \alpha) \in S \times Y : f(x) \leq_D \alpha\}$ 为 $X \times Y$ 上的凸集.

1982 年, Hayashi 和 Komiya^[55] 将 $[x_1, x_2]$ 线段的任意点 $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ 减弱为存在 S 中某一点 x_3 满足关系式, 推广了锥凸向量值映射, 引进了锥似凸的向量值映射.

定义 2.2^[55] 称 f 在集合 S 上是 D -似凸映射, 若对于任意的 $\lambda \in (0, 1)$, $x_1, x_2 \in S$, 存在 $x_3 \in S$, 使得

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) - f(x_3) \in D.$$

1986 年, Jeyakumar^[56] 将锥似凸映射进一步推广到锥次似凸映射.

定义 2.3^[56] 称 f 在集合 S 上是 D -次似凸的, 如果存在 $\theta \in \text{int}D$, 对任意的 $\lambda \in (0, 1)$, $x_1, x_2 \in S$ 和 $\epsilon > 0$, 存在 $x_3 \in S$, 使得

$$\epsilon\theta + \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) - f(x_3) \in D.$$

这些广义凸概念的引进促进了向量优化问题各类解的线性标量化、Lagrange 乘子存在性和对偶问题等理论研究. 特别地, Li 和 Wang^[57] 在锥次似凸映射下研究了多目标优化问题弱有效解及真有效解的线性标量化和 Lagrange 乘子的存在性, 并在文中提出公开问题: What is the more generalized convexity that can be used to guarantee that Theorem 3.1 and the other results of this paper remain true? 对于这一公开问题, 文献 [27, 28] 提出了广义锥次似凸概念, 进行了回答.

定义 2.4^[27, 28] 称 f 在 S 上是广义 D -次似凸的, 如果存在 $\theta \in \text{int}D$, 对任意的 $\lambda \in (0, 1)$, $x_1, x_2 \in S$ 和 $\epsilon > 0$, 存在 $x_3 \in S$ 和 $\eta > 0$, 使得

$$\epsilon\theta + \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) - \eta f(x_3) \in D.$$

同时, 文献 [28] 给出了以上几种广义凸映射之间的蕴涵关系, 且举例说明蕴涵关系不可逆:

$$\boxed{D\text{-凸}} \implies \boxed{D\text{-似凸}} \implies \boxed{D\text{-次似凸}} \implies \boxed{\text{广义 } D\text{-次似凸}}.$$

另一方面, Yang^[28] 又注意到 Singh^[58] 研究的如下非线性多目标分式优化问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & F(x) = \left(\frac{f_1(x)}{h_1(x)}, \dots, \frac{f_p(x)}{h_p(x)} \right)^T \\ \text{s.t.} \quad & S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \geq 0\}, \end{aligned}$$

其中 $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))^T : S \rightarrow \mathbb{R}^p$, $h_i(x) > 0$, $i = 1, \dots, p$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

为研究如上多目标分式优化问题的最优性条件和对偶理论, Singh^[58] 引进了假设 1: 存在 $i \in \{1, \dots, p\}$ 使得 $\tilde{f}_j(x) = \frac{h_i(x)f_j(x)}{h_j(x)}$ ($j = 1, \dots, p$, $j \neq i$) 为凹函数. 显然, 当 $h_j(x) = h_i(x)$ 且 $f_j(x)$ ($j \neq i$) 为凹函数时假设 1 成立. 此外, 若 $g_k(x)$ ($k = 1, \dots, m$) 也为凹函数, 则该问题为凸优化问题. Singh^[58] 基于假设 1 和相关集合的开性与相关函数的可微性条件, 通过等价转换形式建立了分式规划问题的最优性条件和对偶理论, 并且提出: 在没有类似假设 1 的条件下, 研究一般的分式规划问题是有待解决的问题 (To establish these types of results without something like Assumption 1 seems to be still an open question).

针对此公开问题, 文献 [28] 对广义锥次似凸映射建立了分式封闭性质, 统一了非线性分式向量优化 (分母相同) 与非线性向量优化的最优性条件和对偶理论, 很好地解决了 Singh 提出的问题.

引理 2.1^[28] 设 $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $g(x) > 0$, $\forall x \in S$, 则 $f : S \rightarrow Y$ 是广义 D -次似凸映射当且仅当 $\frac{f}{g} : S \rightarrow Y$ 为广义 D -次似凸映射.

注意到, 这些广义凸映射的定义直接应用到向量优化问题中不够简便. 因此, 文献 [29, 55] 基于像空间方法给出了它们的等价刻画:

$$\begin{aligned} \boxed{D\text{-似凸}} & \xLeftrightarrow{\text{文献 [55]}} \boxed{f(S) + D \text{ 凸}} \\ \boxed{D\text{-次似凸}} & \xLeftrightarrow{\text{文献 [29]}} \boxed{f(S) + \text{int} D \text{ 凸}} \\ \boxed{\text{广义 } D\text{-次似凸}} & \xLeftrightarrow{\text{文献 [29]}} \boxed{\text{cone} f(S) + \text{int} D \text{ 凸}}. \end{aligned}$$

这些等价刻画不仅形式上简化了广义凸函数的定义, 而且在向量优化问题的理论研究中起到了关键作用. 在以上等价刻画的基础上, 可以通过凸集分离定理或择一定理直接建立向量优化问题的标量化刻画, 从而进一步研究各种解的 Lagrange 乘子存在性和对偶理论等.

集值优化作为向量优化的推广, 近几十年来也成为优化理论和应用的主要研究领域之一. 随着向量值凸函数和广义凸函数的引进和广泛应用, 集值映射的凸性或广义凸性研究也成为一个问题. 集值映射的凸性和广义凸性概念基本是在向量值映射相关概念上进行平行推广. 例如, 1987 年, Corley^[59] 引进了锥凸集值映射; Li 和 Chen^[34] 1997 年提出了锥似凸集值映射; Song^[35] 1997 年提出了近似锥次似凸集值映射的概念; 1998 年, Li^[60] 提出了锥次似凸集值映射; Yang 等^[61] 于 2000 年提出了广义次类凸集值映射; 2001 年, Yang 等^[30] 给出了邻近锥次似凸集值映射的概念.

对于集合 $S \subset Y$ 上的集值映射 $F : S \rightarrow 2^Y$, 以上凸性和广义凸性可用像空间方法等价描述, 并且

有如下蕴涵关系:

其中 $\text{conv}(F(S))$ 表示像集 $F(S)$ 的凸包, $\text{cl}(F(S) + D)$ 和 $\text{cone}(F(S) + D)$ 分别表示 $(F(S) + D)$ 的拓扑闭包和锥包.

邻近锥次似凸作为最弱的广义凸映射, 近十年来得到诸多国内外学者的关注. 例如, Sach^[62] 对邻近次似凸集值映射进一步研究, 指出邻近次似凸映射是诸多已有广义凸映射的推广, 并给出如下等价刻画:

随后, 在邻近次似凸映射的基础上, Sach^[63] 提出了内部锥似凸集值映射; 仇秋生^[64] 提出了广义弱锥次似凸映射. 然而, 文献 [64] 指出这两种广义凸性概念在 $\text{int}D \neq \emptyset$ 时等价于邻近锥次似凸映射, 即有如下关系:

其中 $A = \text{cone}_+(F(S) + D) = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda(F(S) + D)$.

因此, 目前邻近锥次似凸映射依然是最弱的集值广义凸映射, 并且被很多学者应用到集值优化问题

的理论研究中, 如 Henig 真有效解、Benson 真有效解和各种近似真有效解的线性标量化刻画、Lagrange 乘子存在性定理和对偶理论等 (参见文献 [31, 36–40, 65, 66]).

3 择一定理及其应用

基于第 2 节广义凸函数类在向量优化理论中的应用, 本节主要介绍择一定理、基于择一定理的线性标量化及其 Lagrange 乘子的存在性.

3.1 择一定理

在非线性规划问题、Nash 均衡问题及其非线性互补等问题中, 线性不等式组的相容性定理 (或择一性定理、 S -引理) 是其最优性条件的建立和对偶理论研究的基石. 经典的择一定理是 1902 年由 Farkas 针对线性系统的无解问题提出的.

引理 3.1^[67] 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $C \in \mathbb{R}^n$, 则下面两组论断有且仅有一个成立.

(i) $Ax \leq 0$, $C^T x > 0$ 有解;

(ii) $A^T y = C$, $y \geq 0$ 有解.

该结果刻画了线性系统的择一性, 被称为 Farkas 引理. 随后, 在此基础又建立了 Gordan 择一定理等其他形式的择一定理.

引理 3.2^[67] 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 则下面两组论断有且仅有一个成立.

(i) $Ax < 0$ 有解;

(ii) $A^T y = 0$, $y \geq 0$ 有解.

这些择一定理的建立不仅解决了线性规划问题的强对偶理论, 也解决了非线性规划的基础理论—Fritz John 型必要条件和 Kuhn-Tucker 型必要条件.

针对非线性系统, 能否建立类似于 Farkas 引理或 Gordan 择一定理的结果成为诸多学者研究的问题. 20 世纪 40 年代开始, 不断涌现出针对二次函数、凸函数或广义凸函数的择一定理.

针对二次函数 $f(x) = x^T A x + 2a^T x + c$, $h(x) = x^T B x + 2b^T x + d$ (其中 $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为对称矩阵, $x, a, b \in \mathbb{R}^n$, $c, d \in \mathbb{R}$), 1971 年, Yakubovich^[68, 69] 基于 Dines^[70] 提出的两个齐次二次函数联合数值域的凸性理论给出了如下 S -引理的证明.

引理 3.3^[68, 69] 设 $h(x)$ 满足 Slater 条件, 即存在 $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ 满足 $h(\bar{x}) < 0$, 则如下两个系统等价:

$$(S_1) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad h(x) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq 0;$$

$$(S_2) \quad \exists \mu \geq 0 \text{ s.t. } f(x) + \mu h(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

此后, 研究者采用不同的方法给出 S -引理的证明 (参见文献 [71]), 如文献 [72] 给出的“袁氏引理”等.

不同于二次函数择一定理证明的复杂性, 对于凸集 $S \subset \mathbb{R}^n$ 上的凸函数, 可直接利用凸集分离定理建立基于 Gordan 择一定理的结果.

定理 3.1^[73] 设 $f_i : S \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, k$) 是集合 S 上的凸函数, 则下面两组论断有且仅有一个成立.

(i) $f_i(x) < 0$ ($i = 1, \dots, k$) 在 S 上有解;

(ii) 存在不全为 0 的数 $\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, k$, 使得

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x) \geq 0, \quad \forall x \in S.$$

若将此结果推广到无限维空间上关于锥序 D 的向量值凸映射, 则基于凸集分离定理可建立如下择一定理.

定理 3.2 ^[54] 设 $S \subset X, f: S \rightarrow Y$ 是集合 S 上的 D -凸映射, 则下面两组论断有且仅有一个成立.

- (i) $f(S) \cap -\text{int}D \neq \emptyset$;
- (ii) 存在 $\lambda \in D^* \setminus \{0\}$ 使得 $\langle \lambda, f(x) \rangle \geq 0, \forall x \in S$.

随后, 作为凸性的推广, 人们开始在不同的广义凸条件下建立择一定理. 例如, 文献 [28, 30, 55, 56] 分别在 D -似凸、 D -次似凸、广义 D -次似凸和邻近次似凸映射下建立了择一定理. 目前, 在此类广义凸映射中, 条件最弱的择一定理为 Yang 等 ^[30] 提出的集值映射的择一定理.

定理 3.3 ^[30] 设 $F: S \rightarrow 2^Y$ 是集合 S 上的邻近 D -次似凸集值映射, 则下面两组论断有且仅有一个成立.

- (i) 存在 $x \in S$ 使得 $F(x) \cap -\text{int}D \neq \emptyset$.
- (ii) 存在 $\lambda \in D^* \setminus \{0\}$ 使得 $\langle \lambda, y \rangle \geq 0, \forall y \in F(x)$.

建立了凸性或广义凸性条件下的择一定理, 向量优化和集值优化理论研究得以迅速发展, 尤其在各类解的线性标量化刻画、Fritz John 型和 Kuhn-Tucker 型最优性条件、Lagrange 乘子存在性和 Lagrange 鞍点定理及其对偶理论方面取得了突破性进展 (参见文献 [28–31, 35, 38, 40, 66]). 与此同时, 为了研究基于 co-radiant 集和改进集的向量优化问题统一解, 文献 [41, 65] 在邻近次似凸映射的基础上进一步推广, 引进了基于 co-radiant 集和改进集的广义凸映射, 通过建立择一定理进一步研究统一解的其他理论.

3.2 线性标量化

在相当多的情形下向量优化问题还没有现成的数学工具可供使用, 而关于数值优化问题的理论和求解算法已经非常丰富. 因此, 如何在向量优化问题与数值问题之间搭一个桥梁, 把困难的向量优化问题转化为较为成熟的数值优化问题一直是向量优化学者探索的一个重要问题, 其中标量化方法的研究就是这方面的一个重要内容.

对于标量化方法来说, 其主要问题是, 寻求特殊的泛函 $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$, 通过与向量优化问题目标函数的复合, 将向量优化问题转化为如下数值优化问题:

$$\min_{x \in S} (g \circ f)(x). \quad (3.1)$$

设 D 的正极锥和严格正极锥分别定义如下:

$$\begin{aligned} D^* &:= \{y^* \in Y^* : \langle y^*, y \rangle \geq 0, \forall y \in D\}, \\ D^{s*} &:= \{y^* \in Y^* : \langle y^*, y \rangle > 0, \forall y \in D \setminus \{0\}\}. \end{aligned}$$

特别地, 在模型 (3.1) 中, $g(y) = \langle \lambda, y \rangle$, 其中 $\lambda \in D^* \setminus \{0\}$ 时, g 为线性泛函, 此类标量化被称为线性标量化方法. 而在有限维空间 $\mathbb{R}^p$ 中, 考虑 $\lambda \in \mathbb{R}_+^p \setminus \{0\}$ 时, 上述标量化问题化为通常意义下的线性

加权法, 即

$$\min_{x \in S} \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(x).$$

我们知道, 对于如上的线性加权标量化问题, 当 $\lambda \in \mathbb{R}_+^p \setminus \{0\}$ 时, 其解是 (MOP) 问题的 Pareto 弱有效解; 当 $\lambda \in \text{int}\mathbb{R}_+^p$ 时, 其解是 (MOP) 问题的 Pareto 有效解, 但反之不一定成立. 例如, 在 (MOP) 问题中, 令 $X = \mathbb{R}^2$, $p = 2$, $D = \mathbb{R}_+^2$, $S = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 1\} \cup \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq 1\} \cup \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$, $f: S \rightarrow \mathbb{R}^2$ 定义为 $f_1(x) = x_1$, $f_2(x) = x_2$, $\bar{x} = (0, 0)^T$, 则 $f(S) - f(\bar{x})$ 和 $-\mathbb{R}_+^2$ 的图形如图 1 所示.

容易验证, $(0, 0)^T$ 是该问题的 Pareto 有效解, 但不存在 $\lambda \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{0\}$ 使得 $\bar{x}$ 为对应线性标量化问题的最优解. 其主要原因是, λ 的存在性是基于凸集分离定理或择一定理, 若多目标优化或向量优化问题中的目标函数不满足凸性或广义凸性条件, 则结论不一定成立. 如何利用凸集分离定理或择一定理建立线性标量化呢? 这主要基于 (VOP) 问题各类解的接触点形式表示, 如

$$\begin{aligned} \bar{x} \in S \text{ 为弱有效解} &\iff (f(S) - f(\bar{x})) \cap -\text{int}D = \emptyset \text{ (或 } (f(S) - f(\bar{x}) + D) \cap -\text{int}D = \emptyset) \\ \bar{x} \in S \text{ 为有效解} &\iff f(S) - f(\bar{x}) \cap -D = \{0\} \text{ (或 } (f(S) - f(\bar{x}) + D) \cap -D = \{0\}) \\ \bar{x} \in S \text{ 为 Benson 真有效解} &\iff \text{cl cone}(f(S) - f(\bar{x}) + D) \cap -D = \{0\}. \end{aligned}$$

对于弱有效解 (或有效解) $\bar{x} \in S$, 当 $f(S) - f(\bar{x}) + D$ 为凸集时, 直接由凸集分离定理或择一定理可知, 存在 $\lambda \in D^* \setminus \{0\}$ 使得 $\bar{x}$ 为 $\min_{x \in S} \langle \lambda, f(x) \rangle$ 的最优解. 例如, 在 (MOP) 问题中, 令 $X = \mathbb{R}^2$, $p = 2$, $S = D = \mathbb{R}_+^2$, $f: S \rightarrow \mathbb{R}^2$ 定义为 $f_1(x) = x_1$, $f_2(x) = x_2$, $\bar{x} = (0, 0)^T$, 则 $f(S) - f(\bar{x}) = f(S) - f(\bar{x}) + \mathbb{R}_+^2$ 和 $-\mathbb{R}_+^2$ 的图形如图 2 所示.

由图 2 可知, $f(S) - f(\bar{x}) = f(S) - f(\bar{x}) + \mathbb{R}_+^2$ 为凸集 (即 f 为 S 上的 D -凸映射), $\bar{x}$ 为该问题的 Pareto 有效解. 因此, 由凸集分离定理可得超平面的存在性. 事实上, 从几何意义上来说, $\lambda = (1, 1)^T \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{0\}$ 表示该超平面的法向量.

图 1 $f(S) - f(\bar{x})$ 和 $-\mathbb{R}_+^2$ 的图形

 图 2 $f(S) - f(\bar{x})$ 和 $-\mathbb{R}_+^2$ 的图形

基于如上的研究思路, 在向量优化问题线性标量化方法的研究中, 很多学者都是直接通过凸集分离定理或择一定理 (参见定理 3.1–3.3), 建立各类解, 特别是弱有效解和有效解, 与如下线性数值优化问题 $(P)_\lambda$ 最优解之间的等价刻画:

$$(P)_\lambda \quad \min_{x \in S} \langle \lambda, f(x) \rangle,$$

其中 $\lambda \in Y^* \setminus \{0\}$.

定理 3.4 ^[42] 设 $\bar{x} \in S$, f 是 S 上的 D -凸映射, 则

- (i) $\bar{x}$ 是 (VOP) 的弱有效解当且仅当存在 $\lambda \in D^* \setminus \{0\}$ 使得 $\bar{x}$ 是 $(P)_\lambda$ 的最优解;
- (ii) 若存在 $\lambda \in D^* \setminus \{0\}$ 使得 $\bar{x}$ 是 $(P)_\lambda$ 的严格最优解, 或存在 $\lambda \in D^{s*}$ 使得 $\bar{x}$ 是 $(P)_\lambda$ 的最优解, 则 $\bar{x}$ 是 (VOP) 的有效解.

在研究真有效解的线性标量化时, 注意到, 真有效解, 如 Benson 真有效解和 Borwein 真有效解都是按两个锥相交为单点集 $\{0\}$ 定义的. 因此, 为了研究真有效解的线性标量化, 文献 [10] 给出了针对两个凸锥的锥分离定理.

引理 3.4 ^[10] 设 $N, K \subset Y$ 是闭凸锥, 且 $N \cap K = \{0\}$. 若 K 是点锥且是满足局部紧性, 则 $(-N^*) \cap (K^{s*}) \neq \emptyset$.

基于如上锥分离定理, 可以直接建立凸性条件下真有效解的线性标量化结果.

定理 3.5 ^[10] 设 $\bar{x} \in S$, f 是 S 上的 D -凸函数, 则 $\bar{x}$ 是 (VOP) 的 Benson 真有效解 (或 Borwein 真有效解) 当且仅当存在 $\lambda^* \in D^{s*}$ 使得 $\bar{x}$ 是 $(P)_\lambda$ 的最优解.

近几十年来, 这一研究方向的主要进展是, 将凸性条件下的标量化结果推广到各类广义凸条件下的相应结果. 其中基于第 3.1 小节中广义凸函数类的线性标量化是人们主要的研究方向. 例如, 文献 [57] 在锥次似凸映射下研究了向量优化问题弱有效解和 Benson 真有效解的线性标量化刻画; 文献 [28, 29] 将锥次似凸推广到广义锥次似凸映射, 研究了向量优化问题弱有效解、有效解和 Benson 真有效解的线性标量化刻画. 另一方面, 最近, 对于近似解或统一解的线性标量化也得到了极大的关注. 文献 [18, 31, 74] 分别在锥次似凸和邻近锥次似凸假设下研究了向量优化基于 co-radiant 集的近似有效解和近似真有效解的线性标量化刻画. 基于改进集的向量优化问题统一解的线性标量化研究可参见文献 [75–77].

对于集值优化问题 (SVOP), 同样可以在各类广义凸性条件下研究各种解的标量化刻画. 这方面

的工作中, 文献 [30] 建立了邻近次似凸集值优化问题弱有效元、有效元和真有效元的标量化结果.

定理 3.6 [30] 设 $\bar{x} \in S$, $\bar{y} \in F(\bar{x})$, $F - \bar{y}$ 是 S 上的邻近 D -次似凸映射, 则

(i) $(\bar{x}, \bar{y})$ 是 (SVOP) 的弱有效元 (即 $(F(S) - \bar{y}) \cap (-\text{int} D) = \emptyset$) 当且仅当存在 $\lambda \in D^* \setminus \{0\}$ 使得 $\bar{x}$ 是 $\min_{x \in S} \langle \lambda, F(x) \rangle$ 的最优解;

(ii) 若 D 是局部紧集, 则 $(\bar{x}, \bar{y})$ 是 (SVOP) 的 Benson 真有效元 (即 $\text{cl cone}(F(S) + D - \bar{y}) \cap (-D) = \{0\}$) 当且仅当存在 $\lambda \in D^{s*}$ 使得 $\bar{x}$ 是 $\min_{x \in S} \langle \lambda, F(x) \rangle$ 的最优解.

由于邻近次似凸映射的一般性, 定理 3.6 推广了很多关于向量优化或集值优化问题的标量化结果 (参见文献 [10, 28, 29, 57, 60, 61]), 与此同时, 也为进一步研究集值优化问题或向量平衡问题精确解和统一解的标量化方法奠定了理论基础 (参见文献 [65, 76, 77]). 例如, 文献 [76] 在线性空间中, 利用代数闭包和内部的性质, 通过改进集引进广义凸函数, 研究线性空间中集值优化问题统一解标量化刻画; 文献 [77] 基于向量优化的结果, 研究向量平衡问题基于改进集的各种解的线性标量化刻画, 从而进一步研究其稳定性理论等.

3.3 Lagrange 乘子的存在性

对于数值优化问题, 最优解的最优性充分和必要条件是求解优化问题的重要理论基础. 同样, 在向量优化问题的理论中, 各种解的最优性条件也是一个极为重要的研究方向. 它不仅是求解算法的理论基础, 也是研究向量优化问题其他理论, 如对偶和稳定性等理论的基础.

本小节考虑带有不等式约束的向量优化问题, 即可行集 $S = \{x \in X' : g(x) \leq_C 0\}$, 其中 X' 为 X 中的非空子集, C 为局部凸线性空间 Z 中内部非空的闭凸锥, $g : X \rightarrow Z$. 若该问题为有限维空间 $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^p$, $Z = \mathbb{R}^m$ 中的可微多目标优化问题, 且 $D = \mathbb{R}_+^p$, $C = \mathbb{R}_+^m$, 则可通过 Farkas 择一定理建立弱有效解 $\bar{x} \in S$ 点处的 Fritz John 型必要条件, 即存在不全为 0 的乘子 $u \in \mathbb{R}_+^p$ 和 $v \in \mathbb{R}_+^m$, 使得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p u_i \nabla f_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m v_j \nabla g_j(\bar{x}) &= 0, \\ \sum_{j=1}^m v_j g_j(\bar{x}) &= 0. \end{aligned}$$

注意到, Fritz John 型条件中目标函数微分的乘子有可能为 0, 这导致即使对于凸优化问题, 以上必要条件也不一定是充分条件. 从而, 为了使目标函数前面的乘子不全为 0, 一些统称为约束品性 [67] 的条件被广大学者引进. 这些约束品性的使用有助于建立 u_i ($i = 1, \dots, p$) 不全为 0 的 Kuhn-Tucker 型最优性条件. 这样一来, 在一定的凸性或广义凸性条件下, 我们可建立 Kuhn-Tucker 型充分条件.

由于

$$\sum_{i=1}^p u_i \nabla f_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m v_j \nabla g_j(\bar{x}) = \nabla L(\bar{x}, u, v),$$

其中 $L(\bar{x}, u, v) = \sum_{i=1}^p u_i f_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m v_j g_j(\bar{x})$, 从而, 与数学分析中 Lagrange 乘子方法一样, 可以将带约束条件的向量优化问题转化为没有约束条件的向量极值问题

$$\begin{aligned} \min \quad & L(\bar{x}, u, v) \\ \text{s.t.} \quad & u \geq 0, \quad v \geq 0. \end{aligned}$$

对于向量优化问题, 所谓 “Lagrange 乘子”, 实际上是满足一定条件的一类连续线性算子. 我们用 $L(Z, Y)$ 表示从 Z 到 Y 的所有连续线性算子全体, 子集 L^+ 定义为

$$L^+ = \{T \in L(Z, Y) : T(S) \subset D\}.$$

这样一来, 可构造问题 (VOP) 的向量值 Lagrange 函数

$$L(x, T) = f(x) + T(g(x)), \quad (x, T) \in X' \times L^+.$$

从而建立如下无约束向量优化问题 (unconstrained vector optimization problem, UVOP):

$$\begin{aligned} \min \quad & L(x, T) \\ \text{s.t.} \quad & T \in L^+, \quad x \in X'. \end{aligned}$$

特别地, 当 $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^p$, $Z = \mathbb{R}^m$ 时, L^+ 对应的集合为 $\Gamma = \{\Lambda \in \mathbb{R}^{p \times m} : \Lambda C \subset D\}$, 且 Lagrange 函数为

$$L(x, \Lambda) = f(x) + \Lambda(g(x)), \quad (x, \Lambda) \in S \times \Gamma.$$

我们的问题是, 什么条件下存在 $T \in L^+$ 使得 (VOP) 问题与 (UVOP) 有相同的解. 这类结果通常称为 Lagrange 乘子存在性准则. 同单目标优化问题一样, 即使对于可微优化问题, Lagrange 乘子的存在性相当于 Kuhn-Tucker 最优性条件的成立. 因此, 即使对于凸优化问题, Lagrange 乘子并非总是存在. 为了保证 Lagrange 乘子的存在性, 通常需要一定的约束品性. 对于不具备可微性的向量优化问题, 最常用的约束品性为 Slater 约束品性, 即存在 $\bar{x} \in S$ 使得 $g(\bar{x}) \in \text{int}C$.

Sawaragi 等^[42] 在有限维空间中基于锥凸映射和 Slater 约束品性建立了 Benson 真有效解的 Lagrange 乘子存在定理.

定理 3.7^[42] 设 $\bar{x}$ 是 (VOP) 问题的 Benson 真有效解. 若 f 为 S 上的 D -凸映射, g 为 X' 上的 C -凸映射, 且 (VOP) 满足 Slater 约束品性, 则存在 $\bar{\Lambda} \in \Gamma$ 使得 $\bar{x}$ 为所对应的 (UVOP) 问题的有效解, 且有互补条件 $\bar{\Lambda}g(\bar{x}) = 0$.

随后, 文献 [34] 将定理 3.7 中的锥凸条件推广到锥次似凸, 在 f 为 S 上的 D -次似凸映射、 (f, g) 为 X' 上的 $D \times C$ -次似凸映射的条件下建立了 Benson 真有效解的 Lagrange 乘子存在性定理.

在随后的几十年中, 关于向量优化问题 Lagrange 乘子定理的研究主要通过两种方式进行推广. 其一是, 将广义凸性假设进一步推广, 取得更弱条件下的向量优化问题或集值优化问题各类解的 Lagrange 乘子存在性定理. 例如, 1998 年, Chen 和 Rong^[29] 基于广义锥次似凸, 建立了广义的 Gordan 型择一定理, 通过标量化途径, 建立了向量优化问题 (VOP) 关于 Benson 真有效解的 Lagrange 乘子准则.

定理 3.8^[29] 设 D 是局部紧集, $\bar{x} \in S$. 若 $f(x) - f(\bar{x})$ 为 S 上的广义 D -次似凸映射, $(f(x) - f(\bar{x}), g(x))$ 为 X' 上的广义 $D \times C$ -次似凸映射, 且 (VOP) 满足 Slater 约束品性, 则 $\bar{x}$ 为 (VOP) 的 Benson 真有效解当且仅当存在 $\bar{T} \in L^+$ 使得 $\bar{x}$ 为所对应的 (UVOP) 问题的 Benson 真有效解, 且有互补条件 $\bar{T}(g(\bar{x})) = 0$.

此外, 将约束品性进行推广, 在更弱的约束条件下建立 Lagrange 乘子存在定理. 例如, Qiu^[66] 考虑带有锥约束的集值优化问题, 即 $S = \{x \in X' : G(x) \cap (-C) \neq \emptyset\}$, 其中 $G : X \rightarrow 2^Z$. 针对此类集值优化问题, 他考虑 Yang 等^[30] 提出的更一般的广义凸映射—邻近锥次似凸映射, 将传统的 Slater 约束品性进行推广, 给出了新的广义 Slater 约束品性, 建立了集值优化问题 Benson 真有效解的 Lagrange 乘子存在性定理, 推广了文献 [29, 34] 中的结果.

定义 3.1^[66] 称 (SVOP) 问题满足广义 Slater 约束品性, 如果

$$\text{cl}[\Lambda(G(X'))] \cap (-\text{int}C) \neq \emptyset,$$

其中 $\Lambda(G(X')) = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i : n \in N, \lambda_i \geq 0, z_i \in G(X'), i = 1, \dots, n\}$.

定理 3.9^[66] 设 $\bar{x}$ 是 (SVOP) 问题的 Benson 真有效解, $\bar{y} \in F(\bar{x})$. 若 $(F - \bar{y}, G)$ 为 X' 上的邻近 $D \times C$ -次似凸映射, 且 (SVOP) 满足广义 Slater 约束品性, 则存在 $\bar{T} \in L^+$ 使得 $\bar{x}$ 为所对应的 (UVOP) 问题的 Benson 真有效解, 且有互补条件 $\bar{T}(G(\bar{x}) \cap (-C)) = 0$.

近几年来, 随着向量优化问题近似解和统一解的研究, 一些学者开始研究近似解和统一解的 Lagrange 乘子存在性. 例如, 文献 [41, 65] 在邻近次似凸性条件下分别研究了两类统一的 Benson 真有效解的线性标量化结果, 进而给出了它们 Lagrange 乘子的存在性定理, 部分结果形式上推广了定理 3.9 中的结果.

4 一些继续深入研究的课题

本文主要介绍向量优化问题的线性标量化, 由于它涉及锥凸性, 我们基于像空间思想, 给出了广义锥凸性概念及其发展, 总结了各类广义凸性条件下的择一定理, 进而在线性标量化方法基础上总结了向量优化问题各类解的 Lagrange 乘子存在定理. 关于向量优化问题的线性标量化和 Lagrange 乘子定理, 还存在一些有待进一步深入探讨的课题, 具体包括:

(1) Lagrange 乘子存在性定理依赖约束品性, 研究各种锥约束品性和等价性及强弱性是一件有意义的工作.

(2) 向量优化问题不同类型解 (包括有效解、弱有效解、各种真有效解和近似解) 下的 Lagrange 乘子定理对约束品性的要求是值得思考的课题.

(3) 向量优化问题的线性标量化涉及的凸性还有进一步推广的可能. 我们希望能够找到更广的凸性, 使其线性标量化结果能够在新凸性条件下成立. 如果能够找到某些凸性, 使其线性标量化与新凸性在一定条件下等价, 也许对有些解可行, 有些解不行, 但这方面工作值得探索.

参考文献

- 1 Willcox W B. The Papers of Benjamin Franklin, Volume 19. New Haven: Yale University Press, 1975
- 2 Smith A. An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations: Volume One. London: W. Strahan and T. Cadell, 1776
- 3 Edgeworth F Y. Mathematical Psychics: An Essay on the Application of Mathematics to the Moral Sciences. London: Kegan Paul, 1881
- 4 Pareto V. Cours d'Economie Politique. Lausanne: Librairie Droz, 1896
- 5 Koopmans T C. Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities. Activity Analysis of Production and Allocation. New York: John Wiley & Sons, 1951
- 6 Kuhn H W, Tucker A W. Nonlinear programming. In: Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Berkeley: University of California Press, 1951, 481–492
- 7 Debreu G. Valuation equilibrium and Pareto optimum. Proc Natl Acad Sci USA, 1954, 40: 588–592
- 8 Johnsen E. Studies in Multiobjective Decision Models. Lund: Studentlitteratur, 1968
- 9 Geoffrion A M. Proper efficiency and the theory of vector maximization. J Math Anal Appl, 1968, 22: 618–630
- 10 Borwein J M. Proper efficient points for maximizations with respect to cones. SIAM J Control Optim, 1977, 15: 57–63
- 11 Benson H P. An improved definition of proper efficiency for vector maximization with respect to cones. J Math Anal Appl, 1979, 71: 232–241

- 12 Henig M I. Proper efficiency with respect to cones. *J Optim Theory Appl*, 1982, 36: 387–407
- 13 Borwein J M, Zhuang D M. Super efficiency in convex vector optimization. *Math Methods Oper Res*, 1991, 35: 175–184
- 14 Kutateladze S S. Convex epsilon-programming. *Soviet Math Dokl*, 1979, 5: 390–393
- 15 White D J. Epsilon efficiency. *J Optim Theory Appl*, 1986, 49: 319–337
- 16 Tanaka T. A new approach to approximation of solutions in vector optimization problems. In: *Proceedings of APORS*. Singapore: World Scientific, 1995
- 17 Gutiérrez C, Jiménez B, Novo V. A unified approach and optimality conditions for approximate solutions of vector optimization problems. *SIAM J Optim*, 2006, 17: 688–710
- 18 Gutiérrez C, Jiménez B, Novo V. On approximate efficiency in multiobjective programming. *Math Methods Oper Res*, 2006, 64: 165–185
- 19 Chicco M, Mignanego F, Pusillo L, et al. Vector optimization problems via improvement sets. *J Optim Theory Appl*, 2011, 150: 516–529
- 20 Guerraggio A, Molho E, Zaffaroni A. On the notion of proper efficiency in vector optimization. *J Optim Theory Appl*, 1994, 82: 1–21
- 21 杨新民. Benson 真有效解与 Borwein 真有效解的等价性. *应用数学*, 1994, 7: 246–247
- 22 Zheng X Y. Proper efficiency in locally convex topological vector spaces. *J Optim Theory Appl*, 1997, 94: 469–486
- 23 Benson H P. Existence of efficient solutions for vector maximization problems. *J Optim Theory Appl*, 1978, 26: 569–580
- 24 Borwein J M. On the existence of Pareto efficient points. *Math Oper Res*, 1983, 8: 64–73
- 25 Luc D T. An existence theorem in vector optimization. *Math Oper Res*, 1989, 14: 693–699
- 26 Huang X X, Yang X M. Some existence results of efficiency in vector optimization. *Math Methods Oper Res*, 2001, 53: 391–401
- 27 杨新民. 择一定理的推广. *运筹学杂志*, 1993, 12: 77–78
- 28 Yang X M. Alternative theorems and optimality conditions with weakened convexity. *Opsearch*, 1992, 29: 125–135
- 29 Chen G Y, Rong W D. Characterizations of the Benson proper efficiency for nonconvex vector optimization. *J Optim Theory Appl*, 1998, 98: 365–384
- 30 Yang X M, Li D, Wang S Y. Near-subconvexlikeness in vector optimization with set-valued functions. *J Optim Theory Appl*, 2001, 110: 413–427
- 31 Gutiérrez C, Huerga L, Novo V. Scalarization and saddle points of approximate proper solutions in nearly subconvexlike vector optimization problems. *J Math Anal Appl*, 2012, 389: 1046–1058
- 32 Zaffaroni A. Degrees of efficiency and degrees of minimality. *SIAM J Control Optim*, 2003, 42: 1071–1086
- 33 Gerth C, Weidner P. Nonconvex separation theorems and some applications in vector optimization. *J Optim Theory Appl*, 1990, 67: 297–320
- 34 Li Z F, Chen G Y. Lagrangian multipliers, saddle points, and duality in vector optimization of set-valued maps. *J Math Anal Appl*, 1997, 215: 297–316
- 35 Song W. Lagrangian duality for minimization of nonconvex multifunctions. *J Optim Theory Appl*, 1997, 93: 167–182
- 36 Qiu Q S. Henig efficiency in vector optimization with nearly cone-subconvexlike set-valued functions. *Acta Math Appl Sin Engl Ser*, 2007, 23: 319–328
- 37 Xu Y H, Liu S Y. Benson proper efficiency in the nearly cone-subconvexlike vector optimization with set-valued functions. *Appl Math J Chinese Univ Ser B*, 2003, 18: 95–102
- 38 Gutiérrez C, Huerga L, Jiménez B, et al. Proper approximate solutions and ε -subdifferentials in vector optimization: Basic properties and limit behaviour. *Nonlinear Anal*, 2013, 79: 52–67
- 39 Gutiérrez C, Huerga L, Novo V, et al. Chain rules for a proper ε -subdifferential of vector mappings. *J Optim Theory Appl*, 2015, 167: 502–526
- 40 Gutiérrez C, Huerga L, Novo V, et al. Duality related to approximate proper solutions of vector optimization problems. *J Global Optim*, 2016, 64: 117–139
- 41 Zhao K Q, Yang X M. E -Benson proper efficiency in vector optimization. *Optimization*, 2015, 64: 739–752
- 42 Sawaragi Y, Nakayama H, Tanino T. *Theory of Multiobjective Optimization*. New York: Academic Press, 1985
- 43 Luc D T. *Theory of Vector Optimization*. New York: Springer, 1989
- 44 Jahn J. *Vector Optimization: Theory, Applications, and Extensions*. New York: Springer, 2011

- 45 Chen G Y, Huang X X, Yang X Q. Vector Optimization. Set-Valued and Variational Analysis. New York: Springer, 2005
- 46 Stadler W. A survey of multicriteria optimization or the vector maximum problem, part I: 1776–1960. J Optim Theory Appl, 1979, 29: 1–52
- 47 Dauer J P, Stadler W. A survey of vector optimization in infinite-dimensional spaces, part 2. J Optim Theory Appl, 1986, 51: 205–241
- 48 Guerraggio A, Molho E, Zaffaroni A. On the notion of proper efficiency in vector optimization. J Optim Theory Appl, 1994, 82: 1–21
- 49 戎卫东, 杨新民. 向量优化及其若干进展. 运筹学学报, 2014, 18: 9–38
- 50 Andersson J. A survey of multiobjective optimization in engineering design. Technical Report LiTH-IKP-R-1097. Linköping: Linköping University, 2000
- 51 Villa C, Loziquez E, Labayrade R. Multi-objective optimization under uncertain objectives: Application to engineering design problem. In: Evolutionary Multi-Criterion Optimization. New York: Springer, 2013, 796–810
- 52 Marler R T, Arora J S. Survey of multi-objective optimization methods for engineering. Struct Multidiscip Optim, 2004, 26: 369–395
- 53 杨新民, 戎卫东. 广义凸性及其应用. 北京: 科学出版社, 2016
- 54 Craven B D, Mond B. Transposition theorems for cone-convex functions. SIAM J Appl Math, 1973, 24: 603–612
- 55 Hayashi M, Komiya H. Perfect duality for convexlike programs. J Optim Theory Appl, 1982, 38: 269–275
- 56 Jeyakumar V. A generalization of a minimax theorem of Fan via a theorem of the alternative. J Optim Theory Appl, 1986, 48: 525–533
- 57 Li Z F, Wang S Y. Lagrange multipliers and saddle points in multiobjective programming. J Optim Theory Appl, 1994, 83: 63–81
- 58 Singh C. A class of multiple-criteria fractional programming problems. J Math Anal Appl, 1986, 115: 202–213
- 59 Corley H W. Existence and Lagrangian duality for maximizations of set-valued functions. J Optim Theory Appl, 1987, 54: 489–501
- 60 Li Z F. Benson proper efficiency in the vector optimization of set-valued maps. J Optim Theory Appl, 1998, 98: 623–649
- 61 Yang X M, Yang X Q, Chen G Y. Theorems of the alternative and optimization with set-valued maps. J Optim Theory Appl, 2000, 107: 627–640
- 62 Sach P H. Nearly subconvexlike set-valued maps and vector optimization problems. J Optim Theory Appl, 2003, 119: 335–356
- 63 Sach P H. New generalized convexity notion for set-valued maps and application to vector optimization. J Optim Theory Appl, 2005, 125: 157–179
- 64 仇秋生. 集值映射的广义凸性与集值最优化. 博士学位论文. 上海: 上海大学, 2009
- 65 Gao Y, Yang X M, Yang J, et al. Scalarizations and Lagrange multipliers for approximate solutions in vector optimization problems with set-valued maps. J Ind Manag Optim, 2015, 11: 673–683
- 66 Qiu J H. Dual characterization and scalarization for Benson proper efficiency. SIAM J Optim, 2008, 19: 144–162
- 67 Bazaraa M S, Sherali H D, Shetty C M. Nonlinear Programming. New York: John Wiley & Sons, 2006
- 68 Yakubovich V A. S -procedure in nonlinear control theory (in Russian). Vestnik Leningrad Univ, 1971, 1: 62–77
- 69 Yakubovich V A. S -procedure in nonlinear control theory (English translation). Vestnik Leningrad Univ, 1977, 4: 73–93
- 70 Dines L L. On the mapping of quadratic forms. Bull Amer Math Soc, 1941, 47: 494–498
- 71 Pólik I, Terlaky T. A survey of the S -lemma. SIAM Rev, 2007, 49: 371–418
- 72 Yuan Y X. On a subproblem of trust region algorithms for constrained optimization. Math Program, 1990, 47: 53–63
- 73 Rockafellar R T. Convex Analysis. Princeton: Princeton University Press, 1970
- 74 Gao Y, Yang X, Teo K L. Optimality conditions for approximate solutions of vector optimization problems. J Ind Manag Optim, 2011, 11: 495–510
- 75 Gutiérrez C, Huerga L, Jiménez B, et al. Approximate solutions of vector optimization problems via improvement sets in real linear spaces. J Global Optim, 2018, 70: 875–901
- 76 Zhou Z A, Yang X M, Zhao K Q. E -super efficiency of set-valued optimization problems involving improvement sets.

J Ind Manag Optim, 2016, 12: 1031–1039

77 Chen C R, Zuo X, Lu F, et al. Vector equilibrium problems under improvement sets and linear scalarization with stability applications. Optim Methods Softw, 2016, 31: 1240–1257

The linear scalarizations and Lagrange multipliers for vector optimization

Xinmin Yang & Guangya Chen

Abstract Vector optimization is an important part of mathematical programming. Its theory and methods have a promising interdisciplinary research field with many significant applications. In this survey, we mainly introduce the progress on the generalized convexity of vector-valued maps, alternative theorems, linear scalarization methods and Lagrange multiplier rules. We first introduce a class of generalized convexity for the vector-valued and set-valued maps, which is based on image space analysis, and summarize the relationship among them. Secondly, we introduce the development of the alternative theorems in linear systems to nonlinear systems. For nonlinear systems, we focus on the research of the alternative theorem under convexity or generalized convexity assumptions. Its applications in the linear scalarization and the Lagrange multiplier rules on vector optimization problems are summarized.

Keywords vector optimization problems, generalized convexity, alternative theorems, linear scalarization, the existence of Lagrange multiplier

MSC(2010) 90C26, 90C29, 90C30, 90C46

doi: 10.1360/N012019-00042