中国科学: 数学 2020 年 第 50 卷 第 7 期: 899～968
SCIENTIA SINICA Mathematica
创刊 70 周年特邀综述

现代优化理论与应用

邓琪[1], 高建军[1], 葛冬冬[1*], 何斯迈[1], 江波[1], 李晓澄[2], 王子卓[3], 杨超林[1], 叶荫宇[2*]

1. 上海财经大学交叉科学研究院, 上海 200433;
2. Department of Management Science and Engineering, Stanford University, Stanford, CA 94305, USA;
3. 香港中文大学 (深圳) 数据科学学院, 深圳 518172

E-mail: qideng@shufe.edu.cn, gao.jianjun@shufe.edu.cn, ge.dongdong@mail.shufe.edu.cn, simaihe@mail.shufe.edu.cn, jiang.bo@mail.shufe.edu.cn, chengli1@stanford.edu, wangzizhuo@cuhk.edu.cn, yang.chaolin@mail.shufe.edu.cn, yyye@stanford.edu

收稿日期: 2020-02-13; 接受日期: 2020-04-13; 网络出版日期: 2020-06-23; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11831002, 11771269, 71601103, 71771141 和 71825003) 资助项目

摘要 过去数十年间, 现代运筹学, 特别是优化理论、方法和应用有了长足的发展. 本文就运筹与优化多个领域的一些背景知识、前沿进展和相关技术做了尽可能详尽的概述, 涵盖了线性规划、非线性规划、在线优化、机器学习、组合优化、整数优化、机制设计、库存管理和收益管理等领域. 本文的主要目标并非百科全书式的综述, 而是着重介绍运筹学某些领域的主流方法、研究框架和前沿进展, 特别强调了近期一些比较重要和有趣的发现, 从而激发科研工作者在这些领域进行新的研究.

关键词 优化理论 线性规划 在线优化 非线性规划 机器学习 组合优化 整数规划 机制设计 库存管理 收益管理

MSC (2010) 主题分类 49M37, 65K05, 90C05, 90C06, 90C10, 90C11, 90C15, 90C20, 90C22, 90C25, 90C26, 90C27, 90C29, 90C30, 90C39, 90C46, 90C90

1 背景介绍

运筹学的主要目标是, 在给定的资源约束下, 合理调配资源进行量化决策, 以实现设定目标尽可能优化. 它是一门高度强调应用性和交叉性的学科, 与数学、概率与统计学、计算机科学、经济学和管理学等多个学科有着密不可分的关系. 它诞生于 20 世纪上半叶, 特别是二战期间, 以服务大规模军事任务为目的, 取得了蓬勃的发展. 其兴起的真正标志是, 对于较大规模线性约束和目标问题的建模优化和以单纯形法为核心算法、依托现代计算机技术实现的成功求解.

过去的数十年里, 运筹科学的应用范围进一步扩大, 在大规模制造与生产、供应链管理、现代交通 (如航海、航空和铁路管理)、能源 (如石油与电网运营)、经济与金融等多个事关国计民生的重要领域

英文引用格式: Deng Q, Gao J J, Ge D D, et al. Modern optimization theory and applications (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 899–968, doi: 10.1360/SSM-2020-0035

都起到了极其重要的决策支撑或辅助作用. 研究领域与框架理论也有了深入的开拓, 核心的数学规划 (或称数学优化) 理论涵盖了线性规划、混合整数线性规划、非线性规划 (特别是凸优化与非凸优化)、组合优化、随机优化与鲁棒优化、在线学习与在线优化等一系列连续或离散、确定或随机的优化模型. 高效的算法也不断被发明和深入发展, 从最初解决线性系统而发展起来的经典的单纯形法, 到后来可以针对更广泛意义模型的椭圆法、内点法, 到今天针对大规模问题 (特别是机器学习) 的梯度法及其变种加速方法、交替方向法等, 层出不穷.

最近的十年里, 随着大数据和人工智能时代的到来, 数学优化在机器学习中的应用越发广泛而深入, 而机器学习也为数学优化带来了更大的挑战. 首先, 随着相关软硬件的发展, 可用数据量级不断提高, 使得经典算法不再适用, 呼唤着新的算法不断产生. 其次, 尽管很多问题的最坏情形算法复杂度早已被证明, 但现实中的问题往往并不是最坏情形, 通过利用更多的数据信息和模型结构, 高效的算法不断被提出, 一定程度上在不断打破之前的认知. 再则, 随着机器学习与优化的不断交互, 越来越多的传统优化算法重新焕发生命, 在新的场景下有了新的意义. 最后, 机器学习研究重点由线性模型演变为复合结构模型, 而优化问题也由凸优化变为更为复杂的非凸优化. 如今, 如何更好地优化非凸模型已成为一个最重要的研究热点, 如深度神经网络.

本文就运筹与优化多个领域的一些背景知识、前沿进展和相关算法及方法论做了尽可能详尽的概述. 文章主要涵盖了现代优化理论的线性规划、在线优化、非线性规划、机器学习、组合优化、整数优化等, 以及与应用结合的机制设计、库存管理和收益管理等领域. 需要提醒读者的是, 本文的主要目标并非百科全书式的综述, 而是更注重介绍运筹学某些领域的主流方法、研究框架与前沿进展, 特别强调了近期一些比较重要和有趣的发现, 希望以此引起科研工作者注意, 激发读者对这些领域的兴趣并进行有意义的研究.

在线性规划部分, 首先讨论一些最新的算法结果, 包括内点法、椭球算法和线性规划的大规模计算等. 其次综述了这些算法和线性规划问题上的一些新进展. 然后介绍线性规划问题与 Markov 决策过程 (Markov decision process, MDP) 之间的关系. 在此基础之上, 本文综述近些年线性规划算法在求解 MDP 和它对应的近似动态规划、还有两人回合制随机博弈 (two-player turn-based stochastic game, 2-TBSG) 上面的应用.

在在线优化部分, 首先介绍在线优化的一些背景知识及与传统优化问题的核心区别. 然后着重讨论几个经典类型的在线优化问题, 包括秘书问题、多臂老虎机问题和在线线性优化问题, 并对这些问题的背景、近期发展和主要结论做了介绍.

在非线性规划部分, 首先介绍无约束问题的算法, 包含经典的共轭梯度法、三次正则化 Newton 法和信赖域方法等, 以及正在发展中的高阶算法. 然后讨论一些带结构的非线性规划问题, 如带线性约束的问题、带流形约束的问题、多项式优化问题和张量优化问题, 并对为这些问题所定制化设计的算法及收敛性做了介绍.

在机器学习部分, 首先介绍机器学习中的主要优化算法, 内容包括梯度法和次梯度法、Nesterov 加速算法、条件梯度法、随机优化法、坐标梯度法、邻近点法和二阶算法. 接着针对非凸优化这一近期研究热点专门展开讨论, 介绍低秩矩阵优化、跳出鞍点和深度学习等研究问题的新进展.

在组合优化部分, 主要介绍一些针对组合问题具有一定普遍意义的优化算法和模型, 以及相应的算法设计思路和一些基于优化理论的算法逼近率分析工具. 主要内容按基础优化模型分 3 部分: 基于线性规划的组合问题及算法, 基于非线性规划的组合问题及算法, 基于离散凸规划的组合问题及算法.

在整数优化部分, 首先回顾整数规划的常用算法, 包括分支 - 定界算法和割平面算法. 接着讨论非线性整数优化中的几类问题. 针对 0-1 二次型整数优化问题, 我们介绍了采用半定规划构造逼近算

法和分支 - 定界算法的研究, 并回顾协正优化与 0-1 整数优化的关系. 我们还介绍了带有半连续变量和基数约束的非线性优化问题的研究成果. 最后介绍采用机器学习方法提升整数优化算法性能的研究进展.

在机制设计部分, 介绍机制设计中的优化方法, 以及在拍卖、交通管理及其他经济与管理领域中的应用. 机制设计领域中的一个主要研究方法是, 通过用参量揭示数学规划的技巧, 将机制设计问题转化为一个优化问题 (一般是无穷维线性规划) 进行求解.

在库存管理部分, 首先介绍 Markov 决策过程在库存管理中的应用. 这一类问题是随机库存管理领域最早研究的问题, 其核心科学问题是刻画和证明库存系统最优策略的结构性质. 其次, 介绍库存系统的近似策略设计与优化, 重点介绍两类近几年学界比较关注的近似策略. 然后, 综述鲁棒优化在库存管理中应用的文献. 最后, 介绍在线学习与优化方法在库存管理中的应用.

在收益管理部分, 介绍收益管理问题的背景及其中主要的优化问题, 包括动态资源分配和定价问题及选择模型下定价和选品的优化问题, 对这些问题中用到的优化方法和主要进展做了阐述, 并对一些近期主要的研究方向进行了讨论. 另外值得一提的是, 在在线优化部分已经讨论了在线和网络收益管理以遗憾 (regret) 为度量开展的一些研究框架和结果.

2 线性规划

线性规划问题可以说是目前优化领域中最重要且已经被大量研究过的一类问题. 本节将回顾 3 个线性规划相关主题的最新进展: (i) 线性规划算法; (ii) 线性规划和 Markov 决策过程; (iii) 在线线性规划. 本节主要介绍 (i) 和 (ii) 两个领域近期一些比较重要和有趣的发现. (iii) 将在下一节讨论, 希望这些讨论能激发科研工作者在这些领域进行新的研究.

2.1 线性规划算法

近年来, 我们见证了基础线性规划 (linear programming, LP) 算法的一些令人欣喜的改进. 第 2.1.1 小节将回顾几种新型算法和经典 LP 算法的改进. 第 2.1.2 小节将讨论解决大规模 LP 问题的算法的一些最新结果. 本节讨论的所有算法都基于 LP 问题的标准形式:

$$\begin{aligned} &\min\ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ &\text{s.t.}\ \ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

这里 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 决策变量是 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

2.1.1 基于经典算法的新发现

自 1984 年 Karmarkar 取得突破性成果—证明内点法可以在多项式时间内解决线性规划问题以来, 内点法一直是研究线性和非线性规划问题的热点领域. 最近, Lee 和 Sidford [1] 提出了一种加权路径查找算法, 并证明了它的迭代次数在 $O(\sqrt{m}L)$ 与 $O(\sqrt{\text{rank}(A)}L)$ 之间, 这里 L 代表算法的精度; 具体地说, 如果希望达到 ϵ 的精度, 那么 $L = \log(1/\epsilon)$. 他们的思想是给对数障碍函数引入权重, 并通过适应性地调整权重, 来使内点法的更新步长更大. 两位作者还研究了最小费用流问题, 并减少了之前这个问题的最快运行时间. 之后, Lee 和 Sidford [2] 通过研究逆维护问题 (inverse maintenance problem), 对内点法里面内嵌的优化子问题得到了更高效的优化, 进而进一步减少了内点法的运行时间. 同时,

在最近的另一篇文献中, Lamperski 等 [3] 设计了一种遗忘椭球算法 (oblivious ellipsoid algorithm), 这个算法的特点在于它可以证明 LP 问题不可行性的内在机制, 从而解决了传统椭球方法无法验证 LP 不可行性的问题. Lee 等 [4] 还考虑了解决大量只在约束条件右端 $\boldsymbol{b}$ 上有所不同的 LP 问题, 提出了一种利用邻近关键区域几何性质的方法, 并且还设计了一种数据驱动的算法来利用有关 $\boldsymbol{b}$ 的分布信息.

2.1.2 大规模线性规划

随机化算法 Vu 等 [5] 引入了一种随机投影算法, 通过减少约束的数量来近似地求解大规模 LP 问题. 他们的思想与之前 (参见文献 [6,7]) 通过处理 MDP 问题的近似 LP 问题来减少约束数量的工作类似. 而不同的是, Vu 等 [5] 研究的是 LP 的一般形式. 他们的文献使用了 Johnson-Lindenstrauss 引理, 讨论了 LP 在某些投影矩阵的作用下解的可行性和最优性的保持.

一阶方法 Wang 和 Shroff [8] 设计了一种新的交替方向乘子法 (alternating direction method of multipliers, ADMM) 来求解线性规划问题, 该算法分离了标准形式 LP 问题 (2.1) 的等式和不等式约束; 基于这种分离, Wang 和 Shroff [8] 设计了具有收敛性的 2- 块 (2-block) ADMM 算法. Lin 等 [9] 利用 ADMM 解决了内点法中对数障碍惩罚的子问题, 从而提出了一种基于 ADMM 的内点法来求解大规模线性规划问题. Yen 等 [10] 考虑了如何解决稀疏 LP 问题 (即当 (2.1) 中的矩阵 A 是稀疏的) 并提出了一种基于增广 Lagrange 方法和坐标下降法组合的算法.

最后, 引用文献 [11] 中的话来结束这一部分:

"线性规划是一项伟大技术革命中的一部分. 它使人类看清自己的目标, 制定详细的决策方案, 让人类即使在面对极为复杂的实际情形时也能够 '最佳' 地实现其目标 $\cdots\cdots$ 我们在这条路上已经走的很远了, 但仍要继续走下去 $\cdots\cdots$"

2.2 线性规划和 Markov 决策过程

本节考虑 MDP 中的问题并讨论如何将线性规划中的理论和算法用于分析求解 MDP. 主要关注有限状态/动作的无限时段折现 MDP, 同时, 在我们的讨论中还会介绍在其他变体 (如平均成本和可数状态空间) 下得到的一些相关结论. 设状态空间为 $\mathcal{S}=\{1,2,\ldots,m\}$, k_i 是在状态 $i\in\mathcal{S}$ 下的可行动作数, $n=k_1+\cdots+k_m$ 为总的行动数. 令 $\mathcal{A}_1=\{1,2,\ldots,k_1\}$, $\mathcal{A}_2=\{k_1+1,k_1+2,\ldots,k_1+k_2\},\ldots,$ 通项表达式为

$$\mathcal{A}_i=\sum_{s=0}^{i-1}k_s+\{1,2,\ldots,k_i\},\quad \text{对每个 } i\in\mathcal{S},\ \text{其中 } k_0=0.$$

一个 (稳定的) 策略可以由集合函数 $\pi=\{\pi_i\}_{i\in\mathcal{S}}$ 表示, 其中 $\pi_i\in\mathcal{A}_i$ 表示在状态 i 下采取的动作. 对于 $\mathcal{A}_i$ 中的每个动作 j, 它指定了 $i,i'\in\mathcal{S}$ 之间的转移概率 $p^j(i,i')$ 和即时成本 $c^j(i,i')$. MDP 的目标是找到一个策略 π, 来最小化累积折扣成本,

$$\mathrm{E}^{\pi}\Bigg[\sum_{t=0}^{\infty}\gamma^t c^{\pi_{i_t}}(i_t,i_{t+1})\Bigg],$$

这里的 $(i_0,i_1,\ldots)$ 是 Markov 链在策略 π 下状态转移的路径, 上式即这个路径下的数学期望, $\gamma\in(0,1)$ 是折现率.

d'Epenoux [12] 和 De Ghellinck [13] (另可参见文献 [14–16]) 表明, 折现无限时段 MDP 问题可以按照标准形式化为原始 LP 问题:

$$\begin{aligned} &\min\ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ &\text{s.t.}\ \ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

它的对偶为

$$\begin{aligned} &\max\ \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ &\text{s.t.}\ \ \boldsymbol{s} = \boldsymbol{c} - A^\top \boldsymbol{y} \geqslant 0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 是给定的秩为 m 的实矩阵, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ 是给定的实向量, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}$ 是问题的原变量, $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s})$ 是问题的对偶变量.

具体来说, MDP 问题可以化为系数为 $(A, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ 的 LP 问题 (2.2) 和 (2.3). 首先, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ 是一个全一向量. 第二, 向量 $\boldsymbol{c}$ 的第 j 个分量代表动作 j 的预期的即时成本. 也就是说, 如果 $j \in \mathcal{A}_i$, 则动作 j 在状态 i 下可行, 并且有表达式

$$c_j = \sum_{i'} p^j(i,i')c^j(i,i'),$$

其中 j 的取值是由 i 决定的, 即

$$j \in \mathcal{A}_i = \{k_1 + \cdots + k_{i-1} + 1, \ldots, k_1 + \cdots + k_{i-1} + k_i\}.$$

第三, LP 问题的约束矩阵具有以下形式:

$$A = E - \gamma P \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

当第 j 个动作选定时, 这里 P 的第 j 列就是转移概率的分布. 具体来说, 对于每个动作 $j \in \mathcal{A}_i$,

$$P_{i'j} = p^j(i,i')$$

对于 $i = 1, \ldots, m$ 都成立,

$$E_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } j\ \in \mathcal{A}_i, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

对于 $i = 1, \ldots, m$ 和 $j = 1, \ldots, n$ 成立.

以上得到的 LP 公式具有以下几种解释: 全一向量 $\boldsymbol{b}$ 表示最初在每个状态下只有一个个体. 对于 $j \in \mathcal{A}_i$, 原始变量 x_j 表示动作 j 的动作频率, 或者说是个体处于状态 i 并采取动作 j 的次数的现值期望. 在某些文献中, 原始向量 $\boldsymbol{x}$ 也被称为磁通矢量. 在这种解释下, 要解决原始 LP 问题 (2.2), 就必须根据守恒定律 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}$, 选择使现值数学期望值 $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$ 最小的动作频率 $\boldsymbol{x}$. 守恒定律确保了对于每个状态 i, 进入状态 i 的个体数量的现值期望等于离开状态 i 的个体数量的现值期望. 另一方面, 对偶 LP 问题 (2.3) 与 MDP 问题的 Bellman 方程密切相关, 并且可以从 Bellman 方程推导得出. 对偶变量 $\boldsymbol{y}$ 表示转移到 m 个状态的成本的现值期望, 约束 $\boldsymbol{c} \geqslant A^\top \boldsymbol{y}$ 刻画了转移到 m 个状态的成本值的最优性.

2.2.1 求解 MDP 问题的迭代复杂度

给定以上公式, 可以通过解决对应的 LP 问题 (2.2) 和 (2.3) 来找到 MDP 的最佳策略. 那么, 一个自然的评估算法优劣度的指标就是迭代复杂度, 即单纯形法或内点法解决对应的 LP 问题所需要的迭代次数. 第一个负面的结果 [17] 指出, 具有最小索引旋转规则的单纯形法在最坏的情形下需要指数时间的迭代次数. 在讨论正面结果之前, 首先指出, MDP 的策略与其对应的 LP 问题的基可行解之间存在一一的对应关系. LP 问题 (2.2) 的每个基可行解都对应着一个确定的 MDP 策略 π. 这可以通过以下事实证明: 对于每个基可行解, 即基础变量, 都有且仅有一个变量来自每个 $\mathcal{A}_i$, $i=1,\ldots,m$. LP 问题 (2.2) 和 (2.3) 的另一个重要特性是约束矩阵 A 的 Leontief 矩阵结构 [18]. 这两个特性是设计和分析用于解决 MDP 问题的 LP 算法的关键.

基于以上的两个观察, 已经能得到一些积极的结果. Ye[19] 指出组合内点法可以在 $O(n^{1.5}(\log(1/(1-\gamma))+\log n))$ 次迭代下解决 MDP 问题. 文章给出了原始 LP 问题 (2.2) 的最优解的几种分析性质, 包括最优解的上界和基本变量的下界. 此外, 文章还提出了一个基于中心路径偏差量的排除规则, 即如果决策变量偏离中心路径一定距离, 则它一定是最优解中的非基本变量. 其组合算法将此排除规则与预测/校正、路径/跟踪内点法相结合 (参见文献 [20]), 发现在每 $O(n^{0.5}(\log(1/(1-\gamma))+\log n))$ 次预测 - 校正算法迭代后都有至少一个变量被排除, 因此, MDP 问题便可以在 $O(n^{1.5}(\log(1/(1-\gamma))+\log n))$ 次迭代内解决.

对于单纯形法, Ye [21] 指出, 与 Melekopoglou 和 Condon [17] 得到的负面结果相反, 使用 Dantzig 最负成本旋转规则的原始单纯形法是解决 MDP 问题的强多项式时间算法. Ye [21] 证明了单纯形法无论初始解的取值为何, 最多迭代 $\frac{m(n-m)}{1-\gamma}\cdot\log\frac{m^2}{1-\gamma}$ 次后终止, 这个想法说明了 Leontief 矩阵结构可确保每次单纯形法的迭代都会在目标函数值上取得一个固定的减少. 具体来说, 在单纯形法的每次迭代中, 优化间隙 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-z^*$ (其中 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{c}$ 转置, z^* 是最优目标值) 将以 $1-\frac{1-\gamma}{m}$ 的速率减小. 结合 (2.2) 中可行解的有界性, Ye [21] 得出结论: 单纯形法最多终止于 $\frac{m(n-m)}{1-\gamma}\cdot\log\frac{m^2}{1-\gamma}$ 次迭代. 这个结果表明, 用于 MDP 的简单策略迭代算法是强多项式时间算法. 这个迭代法在每次迭代中根据单纯形方法的枢轴改进 MDP 策略的一个状态, 这与经典的 Howard 策略迭代算法不同, 后者可以在每次迭代中同时对多个状态进行枢轴转换. 值得注意的是, 上述工作所得到的复杂度均包含 $\frac{1}{1-\gamma}$. 而在很多实际的应用场景中, 折现因子 γ 都十分接近于 1.

后续工作 (参见文献 [22]) 考虑了使用 Dantzig 规则的单纯形法下的确定性 MDP 问题. 在确定性 MDP 问题中, 如果给定了状态和动作, 则转移是确定性的; 在矩阵 P 的每一列中, 只有一个元素为 1, 其他元素为 0. 文献 [22] 表明, 如果折现率是一致的, 则单纯形法以 $O(n^3m^2\log^2 n)$ 次迭代终止; 如果每个动作具有不同的折现率, 则迭代次数为 $O(n^5m^3\log^2 n)$. 尽管该文献所考虑的确定性设置比之前的工作有更多的限制, 但它计算出了一种并不依赖折现率 γ 的迭代复杂度. 其证明具有更强的 “离散的” 风格, 而文献 [19, 21] 则更多地依赖于 LP 算法的 “解析” 的一面. 具体来说, 每个 MDP 策略都被视为一个有向图, 其中每个节点代表一个状态, 并且每个节点只有一条表示动作的边指向其他节点. 其分析就集中于 MDP 策略生成的路径和环.

2.2.2 两人回合制随机博弈

两人回合制随机博弈 (2-TBSG) 是对只有一个玩家/决策者的 MDP 问题的推广. 它广泛应用于随机和对抗环境中长期决策序列的数学建模. Shapley [23] 首次提出了更通用的 2-TBSG 公式. 尽管在计算机科学、经济学和运筹学领域, 2-TBSG 已有很长的一段研究历史, 但由于它与最近的多智能体强

化学习[24] 和生成式对抗网络[25, 26] 的话题相关, 可以给这些领域提供理论和算法方面的启示, 因此仍有很高的热度.

与 MDP 问题类似, 2-TBSG 问题中也存在着有限多的状态, 并且每个状态都与有限数量的动作相关联, 由两个参与者之一控制. 若给定在每个状态下所采取的动作, 则这里的状态转移也是具有 Markov 性的. 2-TBSG 与 MDP 问题最主要的区别在于, 2-TBSG 中第一个参与者的目的是使折现的累积成本最大化, 而第二个参与者的目的是使折现的累积成本最小化. 详细的表述和符号参见文献 [27]. 不同于 MDP 问题, 2-TBSG 问题通常无法再表述为线性规划问题. Jurdziński 和 Savani[28] 及 Gärtner 和 Rüst[29] 讨论了如何将二人零和二元折现博弈和简单随机博弈分别表述为线性互补问题 (linear complementarity problem, LCP) 和广义 LCP 问题. 另外, 由于 2-TBSG 问题是 MDP 问题的推广, 故 2-TBSG 问题的迭代复杂度结果同样适用于 MDP 问题.

Hansen 等[27] 表明了, 2-TBSG 问题的策略迭代算法在最多 $O(\frac{mn}{1-\gamma}\log(\frac{n}{1-\gamma}))$ 次迭代后就终止. Howard[30] 的策略迭代算法可以看作是 2-TBSG 的策略迭代算法的一种简化, 因此, 它最多进行 $O(\frac{mn}{1-\gamma}\log(\frac{n}{1-\gamma}))$ 次迭代就可以解决 MDP 问题. 文献 [27] 推广了磁通矢量 ((2.2) 中的原决策变量 $\boldsymbol{x}$) 的概念到 2-TBSG 问题中, 并得到了与文献 [19, 21] 中磁通矢量相似的界限. 基于磁通矢量的性质, 文献 [27] 的主要思想是证明策略迭代算法 (strategy iteration method) 在目标值方面比值迭代算法 (value iteration method) 有更好的表现. 同时, 类似于 MDP 问题值迭代算法的情形, 可以利用收缩 (contraction) 观点来确定 2-TBSG 的值迭代算法的收敛速度. 这样, 就可以在值迭代的范围里分析策略迭代算法和 Howard 的策略迭代算法的迭代复杂度. Scherrer[31] 在这种收缩思想的基础上, 进一步改进了迭代复杂度的上限. 对于一般的 MDP 问题, Scherrer[31] 将 Hansen 等[27] 的复杂性结果改善了 $O(\log n)$ 的大小. 具体地说, Scherrer[31] 把 Hansen[27] 的复杂度里面的 $\log(\frac{n}{1-\gamma})$ 改进到 $\log(\frac{1}{1-\gamma})$. 此外, Scherrer[31] 确定了 (离开暂态的) 最大转移时间 τ_t 和重新访问常返态 τ_r 中状态的最大时间的度量, 并以 τ_t 和 τ_r 表示了迭代的复杂度. 这推广了确定性 MDP 问题的与 γ 无关的复杂度结果 (参见文献 [22]).

2.2.3 近似动态规划

MDP 问题中的状态数 m 有时可能过于庞大, 这使得关联的 LP 问题在计算上难以解决. 例如, 在一些应用情境中, 每个状态 $i \in \mathcal{S}$ 用一列状态变量的向量表示. 这样, 状态空间的基数 $m = |\mathcal{S}|$ 会随着状态变量的数量增长呈指数增长. 因此, 为了解决 "维数灾难", 一系列近似动态规划 (approximate dynamic programming, ADP) 方法开始出现. 其中, Schweitzer 和 Seidmann[32] 提出了近似线性规划 (approximate linear programming, ALP) 方法; 然后, de Farias 和 Van Roy[33], Hauskrecht 和 Kveton[34], Veatch 等[35] 进一步改进了 ALP 方法. ALP 方法的思想是用预选的基向量 $\phi_1, \ldots, \phi_k$ $(k \ll m)$ 来表示对偶变量 $\boldsymbol{y}$. 具体来说, 有 $\boldsymbol{y} = \Phi\boldsymbol{\theta}$, 其中 $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_k) \in \mathbb{R}^{m\times k}$ 和 $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^k$. 这样, 对偶 LP 问题 (2.3) 变为

$$\begin{aligned} &\max\ \boldsymbol{b}^\top \Phi\boldsymbol{\theta} \\ &\text{s.t.}\quad \boldsymbol{c} - A^\top \Phi\boldsymbol{\theta} \geqslant 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

其中决策变量为 $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^k$. 在原公式 (2.3) 中, 代价函数 (向量 $\boldsymbol{y}$) 上面没有任何限制, 所以, 它可以被理解成一种非参的函数. 在 ALP 公式 (2.4) 中, 代价函数被参数化为基函数的线性组合形式. 以上 ADP 的背景信息参见文献 [36], 线性表示的启发和示例参见文献 [37].

de Farias 和 Van Roy [33] 在 ALP 问题 (2.4) 的最优解与使用基函数 $(\phi_1, \ldots, \phi_k)$ 拟合对偶问题 (2.3) 的最优解 $\boldsymbol{y}^*$ 之间建立了等价关系. 通过这种方式, 他们证明了通过解决 ALP 问题 (2.4) 来近似地解决 MDP 问题的算法的合理性. 此外, 他们指出, 尽管在原本的 LP 问题 (2.3) 中选择不同的系数 $\boldsymbol{b} > 0$ 得到的是相同的最优解, 但系数的选择可能同时会影响 ALP 方法理论上的界限和实际表现. Petrik 和 Zilberstein [38] 讨论了由选择 $\boldsymbol{b}$ 引起的误差, 并提供了两种补救措施: 一种是适应性地减少约束条件, 另一种则是将约束条件纳入目标函数. 我们知道 ALP 公式减少了 (2.3) 中决策变量的数量, 约束的数量可能仍然非常大. 为了解决这个问题, de Farias 和 Van Roy [6] 随后提出了一种约束采样法来求解 (2.4). 类似地, Lakshminarayanan 等 [7] 用 (2.4) 中原始约束的正线性组合构造新的约束替换了原始约束. 此外, Desai 等 [39] 指出, 由于 ALP 公式本身是一种近似, 所以在 (2.4) 中添加 "硬" 约束条件可能并不是令人满意的. 因此, Desai 等 [39] 提出了另一种光滑化的版本, 即允许约束条件 $\boldsymbol{c} - A^\top \Phi \boldsymbol{\theta} \geqslant 0$ 被违反, 并增加了一个约束在总的违反预算上. 这个光滑的版本给出了与 de Farias 和 Van Roy [33] 相似的逼近界限, 并且在实验结果中表现得更好. 为了处理 ALP 计算上的问题, 近期的一些工作 [40, 41] 考虑了 ALP 问题的 Lagrange 形式, 并将约束作为惩罚项纳入目标函数中, 这样 ALP 的求解就简化为 (在线) 随机凸优化问题, 并提供了遗憾的边界.

2.2.4 其他工作

前面的部分中主要关注具有累积折现成本目标的有限状态 MDP/2-TBSG 问题. 这里展示一些最近使用不同设置的 MDP 问题的结果. Lee 等 [42] 考虑了具有可数状态的 MDP 问题, 并设计了一个具有可数无穷多决策变量和约束的关联 LP 问题. 一种具有对偶性和互补松弛性的单纯形法也随之被设计出来. Ghate 和 Smith [43] 研究了一个非时齐的 MDP 问题 (这里非时齐指转移概率矩阵随时间变化), 该问题也能转换为具有可数无穷多个决策变量和约束的 LP 问题. 针对与第 2.2.1 小节相同的折现 MDP 问题, Wang [44] 开发了一种随机 LP 算法; 直观地讲, 该算法可以看作是基于 LP 问题 (2.2) 和 (2.3) 的 Lagrange 函数的随机梯度下降算法. 在 MDP 问题的设置下, 状态转移概率是已知的. 然而, Wang [44] 中的算法仅需要根据转移概率所得到的随机采样, 这是符合强化学习 (reinforcement learning, RL) 问题的设置的. 类似地, 在这种采样的生成模型中解决 RL 问题或 MDP 问题的样本复杂度/计算复杂度的问题, 已经有了一系列的相关著作. 但由于这个系列不在 LP 问题的范围内, 因此感兴趣的读者可参见文献 [45, 46] 及其中的参考文献.

另一类值得注意的是在线线性规划 (online linear programming, OLP) 问题. 此类问题是指在一种在线的场景中来解决 LP 问题. 在过去的 20 年中, 计算机科学和运筹学界都对该问题进行了研究. 它属于在线学习 (在线决策) 这个领域, 是这个领域一个有趣而被广泛讨论的问题. 在这类问题中, 数据和信息逐次到达, 决策者对系统的学习和了解随着数据的生成不断进行. 与其他在线学习问题相比, OLP 问题的特殊之处在于存在约束条件. OLP 问题的应用十分广泛, 从收益管理到资源分配, 从在线广告到排班, 从拍卖市场到背包问题, 处处都离不开 OLP 问题. 我们将在下一节在线优化中对其展开详细论述.

3 在线优化问题进展及应用概览

在传统的优化问题中, 一般人们假设数据和模型是已知的, 问题的目标是找到给定数据和模型下的最优解. 以往优化领域的研究大量集中在这样的场景上. 即使在一些新的优化应用问题中, 例如, 在

机器学习或深度学习对应的优化问题中, 通常人们也是假设数据是已经产生的 (历史数据). 这些数据可以是以往数据的沉淀 (例如, 判断某种疾病依据历史上确诊患者的数据), 也可以是通过反复的实验积累的数据 (例如, AlphaGo Zero 通过与自己对弈产生的数据). 而且建模的方式通常假设这些数据是所谓 "稳定的 (stationary)". 例如, 某个疾病的定义是不会发生改变的, 或是说围棋比赛结局的输赢是根据一个不变的规则判断的. 而优化问题的目标是找到基于这样假设下最好的决策. 这样的优化问题称作静态的优化问题.

但在很多实际问题中, 静态的优化问题不能完全刻画实际的情形. 具体而言, 很多实际场景缺乏有效的历史数据 (例如, 一个新的销售策略在历史上从没有被尝试过), 因此, 模型的参数有不确定性, 而尝试积累数据的过程有可能会对未来的决策效果产生较大的影响 (例如, 使用了一个大的降价策略之后可能会对消费者的行为产生影响). 另外, 数据往往不能满足 "稳定性" 的要求 (例如, 消费者的需求和偏好会随时间改变). 在这种情形下, 一个关键的问题是, 如何能够得到一个动态的决策方案使得其可以在决策的过程中积累最有用的数据从而对模型的参数有更深的了解, 同时在整个的过程中获得整体最优的回报, 并且可以适应环境的不断变化. 这个问题是一个极具挑战而又有重要实际意义的问题.

这一类问题在近些年随着数据科学的发展逐渐地变得常见. 通常称这一类的问题为在线优化 (online optimization) 问题. 而处理这一类问题的算法通常被称为在线学习及优化 (online learning and optimization) 算法. 这一类算法的特点即是不断地在决策中去学习, 在学习中去决策, 将学习和决策的过程以最优的方式融为一体, 而达到整体的和长期的优化.

图 1 和 2 阐述了普通的数据分析 + 优化与在线优化的区别 (引自文献 [47]).

接下来, 简单地介绍几个经典的在线优化问题及相关的结论.

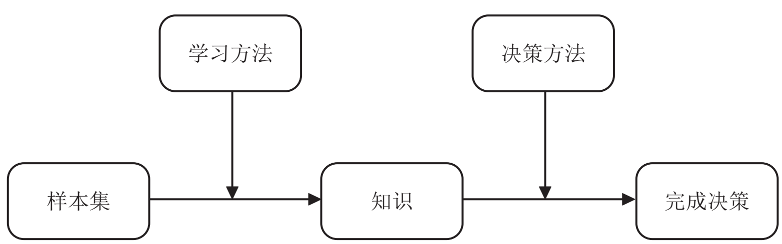

图 1　传统的数据分析 + 优化的过程

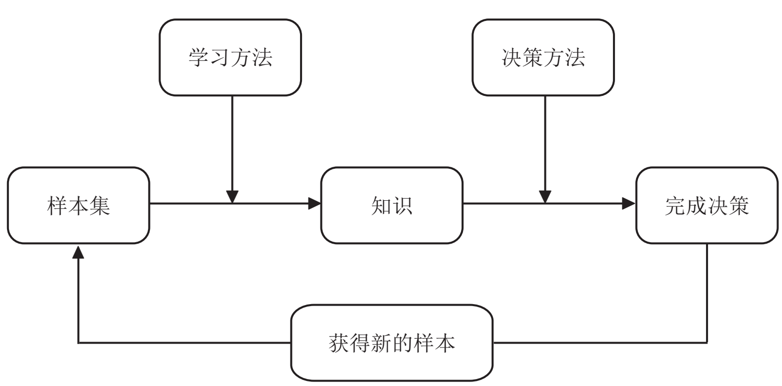

图 2　在线优化问题的过程, 目标为长期的优化

3.1 在线线性规划

在数学上, OLP 问题以标准线性规划为基本形式, 而约束矩阵随着线性目标函数的对应系数逐列显示. 在每个时间节点中, 决策变量的取值根据过去的观测所确定, 并且此后不能更改. 目标是最大程度地减小以在线方式求解得到的目标值与我们已经充分了解的 “线下” 求解得到的最优值之间的差距 (标准定义为竞争比率或遗憾). 考虑下面的线性规划问题:

$$\begin{aligned}
\max\ & \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \\
\text{s.t.}\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad i = 1, \ldots, m, \\
& 0 \leqslant x_j \leqslant 1, \quad j = 1, \ldots, n,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

其中 $r_j \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a}_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj}) \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}_+^m$. 在每个时刻 t, 系数 $(r_t, \boldsymbol{a}_t)$ 都会显示出来, 需要立即确定 x_t 的值. 不同于 “线下” 的设置, 在时刻 t 处, 没有之后要显示的系数的信息. 一种称为在线多维线性规划的更为通用的公式, 将 x_t 视为凸集合 $\mathcal{K}$ (通常为 $\mathbb{R}^k$ 中的一个标准的单纯形) 中的向量. 换句话说, 在每个时刻 t, 都有一组决策变量需要被确定. 针对一维 OLP (3.1) 的算法及分析, 通常都可以推广到多维情形 (参见文献 [48, 49]), 因此, 这里将主要讨论一维问题.

接下来, 首先讨论两种主要的模型, 它们主要的区别在于对系数列 $(r_j, \boldsymbol{a}_j)$ 和约束右端系数 $\boldsymbol{b}$ 的假设.

3.1.1 随机顺序模型

随机顺序模型假设总的决策变量数 n 已知, 且系数列以随机顺序到达, 即 $(r_j, \boldsymbol{a}_j)$ 的到达顺序服从均匀随机排序. 随机顺序模型下的文献主要关注 (3.1) 中的右端的 $\boldsymbol{b}$ 与约束数 m 之间的关系. OLP 问题随机顺序模型的目标通常是竞争比率. 具体来说, 一个算法 π 是 c- 竞争性的, 如果它满足

$$\mathrm{E}_\sigma\left[\sum_{j=1}^{n} r_j x_j\right] \geqslant c \cdot \mathrm{OPT},$$

其中, 左手边表示在算法 π 的作用下, 对于所有排列方式求得的在线目标值的数学期望, OPT 表示线下最优目标值. 一些早期的著作从各种生活情境中提炼出许多问题, 如多秘书问题 [50, 51]、在线匹配和关键词广告问题 [52–57] 及在线包装问题 [58]. 其中的一些文献设计了独立于输入参数且能实现常数竞争比率的算法 (参见文献 [54–57]). 另一些研究了 ε- 竞争性的 (接近最佳) OLP 算法存在性的关于 $\boldsymbol{b}$ 和 m 的充要条件. 这个问题最终被近期几项工作解决: 假设对所有 (i, j), 都有 $a_{ij} \in [0, 1]$, 那么存在一个 $(1 - \varepsilon)$- 竞争性的 OLP 算法当且仅当

$$B = \min_{i=1,\ldots,m} b_i \geqslant O\left(\frac{\log m}{\epsilon^2}\right). \tag{3.2}$$

这个条件刻画了, 随着 m 的增大, 约束量 B 的充分必要的变化速率. 值得注意的是, 这个结论与 n 无关, 是对于任意的固定的 n 都成立的. Agrawal 等 [48] 最坏的案例证明了定理的必要部分 (或下限). 而对于充分性, 几种算法 (参见文献 [49, 59, 60]) 已经被证明了在条件 (3.2) 下能达到 ε- 竞争性.

接下来, 简短地讨论几种典型随机顺序模型下的 OLP 算法及其竞争比率分析. 主要的一类算法是对偶算法并利用 LP 的最优条件设计具有动态更新对偶价格的阈值策略. 该对偶算法在文献 [50, 53]

中被第一次提出. Agrawal 等[48] 进一步地探究了对偶算法并设计了一种动态学习算法, 该算法可以只在几何时间间隔上更新对偶价格. 对于这类算法, 核心思想是用观测到的历史信息 (列与系数) 建立一个 LP 的缩放版本去估计 "线下的" 对偶最优解. 对于竞争比率的分析需依赖随机排列下的 Hoeffding 不等式, 并建立缩放的 LP 问题与原始线下问题的联系. 此外, 文献 [61] 将 OLP 问题解释为基于采样对偶价格的列的线性分类. 随后, 由于受到概率近似正确 (probably approximately correct, PAC) 学习框架的启发, 另一个对偶算法 (与文献 [48] 类似) 被提出.

对于这 3 个确立了条件 (3.2) 的充分性的算法, Agrawal 等[48] 和 Gupta 和 Molinaro[59] 受到乘法权重更新 (multiplicative weights update, MWU) 算法的启发, 设计出了对偶算法. 在随机顺序模型下, 尽管订单的到达是随机的, 列和系数 $(r_j, \boldsymbol{a}_j)$ 可以以一种对抗的方式被选择. 从这点来看, 被有效应用于许多对抗性在线学习问题的 MWU 算法似乎也是解决 OLP 问题的一个自然的选择. 与此同时, Kesselheim 等[49] 设计了一个无需利用对偶价格就可以决定决策变量值的方法. 对于每一个订单/需求, 该算法求解一个原问题的缩放版本并对得到的非整数解随机取整以获得一个该订单/需求的整体分配. 其分析与之前的基于对偶的算法有着相似的思想, 是对 λ 相关的随机变量采用 Chernoff 型的集中界限 (Chernoff-type concentration bound).

3.1.2 随机输入模型

随机输入模型假设列向量是独立同分布的随机变量, 换句话说, 列向量 $(r_j, \boldsymbol{a}_j)$ 皆服从一个 (已知或未知的) 分布 $\mathcal{P}$. 此外, 另一个常见的假设是一个关于右侧 $\boldsymbol{b}$ 的线性增长条件, $\boldsymbol{b} = n\boldsymbol{d} > 0$, 其中 $\boldsymbol{d}$ 是决策者已知的量. 随机输入模型的想法来自一个运营管理的背景, 其中列向量 $(r_j, \boldsymbol{a}_j)$ 代表一个客户报价, 决策变量 x_j 代表一个同意/拒绝此报价的决策. 在这一背景下, 关于顾客的独立同分布假设便是自然的, 并且决策变量的个数 n 蕴含了顾客总数和市场规模. 当 n 增加时, 线性增长条件要求资源/库存水平 $\boldsymbol{b}$ 和顾客数量 n 的比例保持在一个恒定的水平. 评估一个 OLP 算法 π 在随机输入模型下的表现用遗憾来定义:

$$\Delta(\pi) = \mathrm{E}\left[\sum_{j=1}^{n} r_j x_j^*\right] - \mathrm{E}\left[\sum_{j=1}^{n} r_j x_j\right],$$

其中, 期望的取值与分布 $\mathcal{P}$ 有关, 等号右侧第一项是线性规划问题 (3.1) 的线下最优解, 第二项是在线算法 π 下的目标值. 具体来说, 线下最优解, 是指对于每一个随机生成出来的 LP 问题 $\{r_j, a_j\}_{j=1}^n$, 先计算其最优解 $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, 然后再对 $\sum_{j=1}^n r_j x_j^*$ 求期望. 通常考虑对一分布族 $\mathcal{P}$ 取遗憾的最大值作为最坏情形的保证. 在渐近的意义下, 顾客数量 n 不断增加, 问题是在特定的 OLP 算法下遗憾如何关于 n 变化.

在随机输入模型下的 OLP 的算法与分析通常是基于特定问题的, 如网络收益管理问题. 定价和收益管理主要是研究消费者的购买行为以及企业针对消费者的购买行为进行合理的定价和制定销售策略的领域. 以往很多问题的研究都是假设已知消费者具有某种行为, 决策者在此基础上进行优化; 而在实际中, 消费者的行为方式往往在一开始是未知的, 决策者需要通过一定时间的销售才可以得知. 在这样的问题下, 研究的重点就变成如何设计一类有效的算法, 可以一边学习消费者的行为, 一边进行决策, 最终达到销售目标的最大化. 在这个领域里近些年有很多研究, 一些相关内容可参见文献 [62–65]. 网络收益管理问题从航空和酒店业的应用中产生. 该问题与 (3.1) 有相同的形式, 并且假设 $(r_j, \boldsymbol{a}_j)$ 服从一个具有有限取值的离散分布 $\mathcal{P}$. 大部分文献也同样假设了分布 $\mathcal{P}$ 的信息. 早期的工作 (参见文献 [66–68]) 为问题的某些变体提供动态规划的视角, 并且提出算法实现 $O(\sqrt{n})$ 的遗憾. Reiman 和 Wang[69] 及 Jasin 和 Kumar[70] 改进了这些结果, 并分别得出 $o(\sqrt{n})$ 和 $O(1)$ 的遗憾界限. 本质上, 上面文

献中的算法利用对分布 $\mathcal{P}$ 的知识, 在每个时间节点上形成确定性线性规划问题 (deterministic linear programming, DLP). 过去的决策被动态地纳入 DLP (特别地, DLP 的右侧被当前剩余资源决定), 且未来的决策基于 DLP 的解. 在这个背景设置中, $\mathcal{P}$ 的信息和动态控制机制是实现 $O(1)$ 的关键之处. 在随机顺序模型的算法中, DLP 实际上与缩放的 LP 扮演着相同的角色. 近期 Bumpensanti 和 Wang[71] 的工作进一步改进了算法, 并证明了无需频繁解 DLP 就可以实现有界遗憾. 尽管上面的工作都假设知道了 $\mathcal{P}$ 的信息, 但 Jasin[72] 研究了 $\mathcal{P}$ 的参数未知的问题. 他提出了一种算法, 用过去的观测结果构造 LP 来代替 DLP, 并证明了该算法有一个 $O(\log^2 n)$ 上限.

再比如下文的秘书问题和资源分配问题, 其中多个设置也具有线性规划结构, 适用于随机输入模型.

值得一提的是, 近期 Li 和 Ye[73] 研究了一个随机输入模型的一般形式. 文献 [73] 确定了对偶问题最优解的收敛性, 并因此通过将 (3.1) 与随机规划问题相关联, 证明了在研究在线线性规划问题的相关文献中的对偶算法的正确性. 接着, 该文献为有约束的在线学习问题建立了遗憾分析框架, 同时得到了一般形式下 OLP 问题中遗憾的上下界. 基于这些结果, 该文献设计了一个基于历史决策的算法, 使得可以实现 $O(\log n \log\log n)$ 的遗憾, 并且证明了对偶 OLP 算法实现的遗憾不会好于 $O(\log n)$.

3.2 秘书问题 (secretary problem)

这个问题由 Merrill M. Flood 在 1949 年提出, 通常被认为是在线优化领域最经典的问题之一. 其问题描述如下: 一个公司要从 N 个秘书的应聘者中录用其中一个, 应聘者按照随机的顺序来参加应聘 (每一个顺序的可能性都是相同的). 对每一个应聘者, 公司都需要在面试之后立即决定是拒绝还是录用, 一旦决定录用某个应聘者, 立即停止之后的面试, 而一旦决定拒绝某一个应聘者, 则后面不可以再录用这个面试者. 这些秘书的能力有一个严格的排序, 而这个公司的目标是以最大可能性录用所有应聘者中能力最强的那位. 如果可以等到所有面试者都面试完再做决定, 则这个问题就变成简单地选取最大值的问题. 但这个问题的特点是, 在做每一个决策时, 决策者只有部分信息 (只有历史到决策这个时刻的信息), 而未来的信息还不确定, 因此决策者需要权衡现在已知的信息 (现有的应聘者情况) 和未来的信息, 综合考虑做决策, 也即需要 "在线" 做决策.

针对秘书问题, 人们已经找到最优的策略 (参见文献 [74, 75]). 在最优的策略中, 人们首先将所有 N 个应聘者划分为两个部分, 探索 (exploration) 部分和利用 (exploitation) 部分. 其中探索部分占所有应聘者的比例为 1/e (这个比例是当 N 足够大时的渐近比例). 在最优策略中, 决策者在探索部分拒绝所有的应聘者, 在之后的利用部分一旦出现比探索部分都要优秀的应聘者则立刻录用 (如果面试到最后一名应聘者则一定录用). 人们已经证明, 这样的策略可以以 1/e 的概率录取到最优的面试者, 并且这个策略也被证明是对此问题最优的策略.

秘书问题有很多不同方式的延伸, 包括决策从选取一名应聘者延伸到选取多名应聘者[76], 以及决策目标为选取最优延伸到能够选择到前几名的概率[77], 等等. 多秘书问题可以看作一类只有单个约束条件的线性规划问题. 该问题最初被 Kleinberg[50] 和 Babaioff 等[51] 用随机订单模型进行研究. 近期, Arlotto 和 Gurvich[78] 考虑了随机输入模型下的问题, 并采用遗憾作为表现评估手段. 他们提出了一个预算比例算法, 其想法与网络收益管理问题中的动态控制机制和算法设计十分相似. 他们的另一个贡献是它明确描述了自适应/动态控制的优点: 它表明非自适应决策的遗憾不会好于 $O(\sqrt{n})$. 一个后续工作 (参见文献 [79]) 研究了一个单约束条件的背包问题并发展了相应的自适应算法.

与之相关的资源分配问题可以被视为多秘书问题的多约束推广. 一些最新的工作 (参见文献 [80–

82]) 研究了以竞争比率作为表现评估的问题并提出了可达到常数竞争比率的算法. Jiang 等 [83] 提出了一个自适应阈值策略并得到 $O(\sqrt{n})$ 的遗憾. 此外, Asadpour 等 [84] 关注一类由长链设计衍生出的资源分配问题, 并提出了一个带有有限遗憾的简单算法.

3.3 多臂老虎机问题 (multi-armed bandit problem)

在秘书问题得到较为完美的解决以后, 人们继续探索更加复杂的在线优化场景. 其中一个重要的问题是多臂老虎机问题 (也称多臂赌博机问题). 多臂老虎机问题最初起源于赌场, 问题的背景也比较简单: 赌场里有若干个老虎机, 每一个老虎机可能有不同的赔率 (每摇一次, 不同老虎机所带来的收入的分布不一样). 决策者希望找到一个策略, 目标是在连续摇动 T 次老虎机之后, 获得尽可能多的回报. 在这个问题中, 由于不同老虎机有不同的回报的概率分布, 因此在决策过程中, 决策者需要用到观测到的历史回报来指导后面的决策. 因此, 这里也涉及 "探索" 和 "利用" 的权衡. 一方面, 决策者希望尽可能地去摇历史上平均回报较高的老虎机 ("利用"); 但另一方面, 对一些还没有尝试过的或者尝试较少但回报一般的老虎机, 决策者希望能够进一步探查 (虽然目前回报一般, 但有可能是因为随机原因, 需要进一步探查找到更精准的回报的估计, 也即需要进一步 "探索"). 这些信息对于之后的决策将有所帮助. 因此, 这个决策问题的核心在于如何设计这样的权衡使得长期期望的回报最大.

具体而言, 考虑一个相对简单的情形. 假设有 N 个决策选项 (老虎机的摇臂). 每次选择第 i 个摇臂时, 老虎机会产生期望为 μ_i 的 Bernoulli 分布作为回报. 在基础问题中, 假定每个阶段的回报是独立的, 而最终的目标是最大化前 T 个时期的期望总回报 $\mathrm{E}[\sum_{t=1}^T \mu_{i(t)}]$. 如果决策者事先知道最优的老虎机 ($\mu_i$ 权重最大的), 则显然 T 个时期总回报的最大值为 $T\cdot\max_i \mu_i$. 因此也定义

$$R(T)=T\cdot\max_i \mu_i-\mathrm{E}\left[\sum_{t=1}^T \mu_{i(t)}\right]$$

为其期望遗憾, 即由于事先信息不完全导致的损失. 决策者的目标也可以等价地理解成最小化其期望遗憾.

针对多臂老虎机问题, 人们经过了很长时间的研究, 也提出了多种有效的解决方法, 其中最为经典的为信心上界算法 (upper confidence bound method, UCB 算法) 和 Thompson 抽样算法 (Thompson sampling method). 在信心上界算法中, 决策者考虑每一个摇臂的历史平均收益和其不确定性, 以此作为决策的参考. 例如, 在一种经典的 UCB 算法中 (一般称为 UCB1 算法, 参见文献 [85]), 在第 t 时刻, 决策者对每个摇臂 i 计算以下指标:

$$x_i=\bar{r}_i+\sqrt{\frac{2\log t}{k_i}},$$

其中 $\bar{r}_i$ 为第 i 个摇臂历史上的平均回报, k_i 为其历史上被选择的次数 (假设每个摇臂都从 1 开始计次). 决策者选取此指标最大的摇臂作为此时刻的决策. 文献 [85] 证明了当给定每一个臂的平均回报时 (即这些参数 μ_i 作为固定参数时), UCB1 算法在 T 个时期的遗憾 (称为问题相关的遗憾) 为 $O(\log T)$. 如果希望考虑一个不依赖于每一个臂的平均收益这些参数的遗憾, 则文献 [85] 证明了 UCB1 算法的遗憾 (人们称为问题独立的遗憾) 为 $O(\sqrt{NT\log N})$, 其中 N 为摇臂的个数. 文献 [86] 证明了问题相关的遗憾 $O(\log T)$ 已经是此问题相关情形最优的渐近遗憾, 而对于问题独立的情形, 最优的渐近遗憾为 $O(\sqrt{NT})$. 对于这个 $O(\sqrt{NT})$ 的遗憾, 文献 [87] 提出了一个基于 UCB1 算法的修正算法, 这个算法对每一次计算的指标进行了一定的调整, 最终证明也可以达到 $O(\sqrt{NT})$ 的遗憾. 除此以外, 人们还提出了多种基于 UCB 算法的变种算法, 关于这些变种的算法, 可参见文献 [85,86,88].

对多臂老虎机问题, 另外的一个经典的算法是 Thompson 抽样算法. Thompson 抽样算法在 1933 年由 Thompson [89] 提出. 在这个算法中, 假设在 t 时刻, 第 i 个摇臂已经被选取 S_i 次并成功 F_i 次, 则首先对每个摇臂 i 产生服从以下分布的随机变量:

$$x_i \sim \mathrm{Beta}(S_i+1, F_i+1),$$

其中 $\mathrm{Beta}(x,y)$ 代表参数为 x 和 y 的 Beta 分布, 然后决策者选择所有摇臂中 x_i 最大的摇臂作为这个时刻的决策, 即选取 $j = \arg\max x_i$. 这个算法在实际中通常有很好的表现, 但在很长一段时间内, 没有人给出理论的保证. 近些年, 文献 [90] 证明了这个算法的问题相关 (认为每一个摇臂的期望回报为一个常数) 的遗憾为 $O(\log T)$, 也与文献 [86] 中给出的下界一致. 这个算法的问题独立的遗憾为 $O(\sqrt{NT\log N})$, 与文献 [86] 中给出的下界只相差 $O(\sqrt{\log N})$.

在以上的基础上, 人们发展了很多多臂老虎机问题的变种. 其中比较重要的一个是所谓的 "基于情景的多臂老虎机问题 (contextual multi-armed bandit problems)". 在这个问题里, 每一个时间的回报也会受到一些外部因素的影响 (例如, 在搜索引擎场景中, 每一个展示点击的概率与客户的背景可能相关; 在运营和收益管理中, 每一天的销量与那一天的天气相关), 因此, 在学习和决策时也要考虑到每个时间段额外的信息. 除此以外, 人们还会考虑到每个摇臂有不同的成本并且整体有成本约束的情形 (参见文献 [91, 92]), 考虑到分布可以由一个敌对方选取的情形 (参见文献 [93]). 另外还有考虑连续时间 (表示决策不是离散时间的而是在连续时间上的) 或者连续空间上 (表示决策空间的选择可能是非有限的或者非可数的) 的多臂老虎机问题等. 总的来说, 人们对这个领域仍然在积极研究之中, 对新问题和新算法的探索一直在持续发展.

除去以上 3 个类型的在线优化问题, 还有很多类的在线优化问题在过去的若干年里得到了人们的重视, 关于在线优化更深入的一些总结, 可进一步参见文献 [94, 95] 中的一些介绍和讨论.

在实际中, 这些在线优化的算法在很多领域有很重要的应用, 尤其是在管理科学方面近期也发展了很多的应用方向. 特别地, 在线优化算法在多个领域产生了很多应用的场景及研究的成果, 如前文提到的网络收益管理问题, 再比如如下的库存问题和匹配问题:

(1) 库存问题. 库存问题是运营管理中的经典问题之一. 以往的研究通常是基于已知需求的分布研究库存的策略. 在实际问题中, 需求的分布信息往往在开始是未知的, 是需要通过不断的决策来学习的, 而库存的决策可能会导致学习的信息的不同 (有些损失的销量当库存决策很低时是观察不到的). 因此在这样的情形下就产生了在线学习和优化的模型, 研究的重点为设计一系列算法, 一边学习需求的分布, 一边进行决策. 关于这类问题, 在这个领域里近年有不少研究, 一些相关内容可参见文献 [96, 97]. 关于库存问题的进一步论述可以参考后文相关章节.

(2) 匹配问题. 很多管理中的优化问题最终都可以转化成某一类的匹配问题. 例如, 最经典的任务匹配问题, 共享经济里的供给与需求的匹配, 搜索引擎中的广告商与关键词的匹配. 在很多实际问题中, 匹配两方的信息和匹配价值也是需要不断在线学习的. 因此也产生了一系列针对这一类问题的研究. 关于这个方面的研究, 一些相关内容可参见文献 [98–100].

从以上的讨论中可以看出, 在在线优化领域中, 大家已经获得了一些结果. 与此同时, 在这个领域里, 也有很多重要的问题还需要解决. 特别地, 一些重要的问题包括:

(1) 决策的影响要通过一段时间才能体现—有时候, 一个决策的反馈不是完全实时的, 并且一个时间段的反馈可能是由多个时间段的决策所决定的. 这样的场景在一些新兴的管理问题中, 如新零售场景中, 极为常见, 例如, 某个商家进行一次促销行为之后要经过一段时间才能完整地看到促销带来的效果, 但决策者仍然希望通过在线学习的方法得到长期最优的策略. 这样的问题与以往的在线优化的模

型有一定差异, 需要一些新的方法进行解决. 其中一些初步的尝试可以参见文献 [101,102], 但还有很多的问题需要研究.

(2) 数据中出现干扰或环境发生变化—即使在在线优化的问题中, 往往人们在模型上还是会做一些假设, 例如, 数据的到来是随机的 (顺序是随机的), 或是某些方面上服从一定的规律. 在很多实际环境中, 在线优化的环境会受到一些外界环境的干扰, 如一些异常事件的发生. 这些事件一方面会干扰学习的过程, 另一方面会使得原策略可能表现不好. 因此, 一个研究问题是希望设计的算法可以做到较强的鲁棒性 (robustness), 即当外界环境可能遇到一定干扰 (但是有限的干扰) 时, 此算法还能保证有较好的表现. 这方面已有少量研究 (如文献 [103,104]), 但有更多的问题等待人们去进行探索.

(3) 高维、非线性环境下的优化—之前人们绝大多数对在线学习的研究都集中在一个线性的环境下, 即最终的回报是每一次回报的线性函数 (例如, 每一次的回报代表了某一天的收入). 但在很多场景中最终的目标函数是一个非线性的函数 (例如, 在零售中, 一个客户的回报是给予一个客户的推荐次数的凹函数, 因为会产生递减的边际效应), 同时决策也可能是很高维的决策 (例如, 每一个用户都要做一个高维的推荐、定价和营销决策). 这里高维的决策会带来一定的 "学习" 的困难, 因为决策的空间将变得很大; 同时非线性也带来很大问题, 因为学习时要更加考虑到长久的影响 (而不能简单地进行分解). 同样地, 这一块在学术界已经有少量研究 (如文献 [105]), 但仍然有大量的问题等待着被探索.

以上的讨论仅仅覆盖了在线优化的一些基础部分, 但可以看出, 这个领域在过去的这些年来有着快速的发展, 在学术界也吸引了很多研究者的目光. 随着应用场景的不断产生, 未来还会有更多有关的问题等待着研究者去解决.

4 非线性优化概述

非线性优化研究具有下列形式的极值问题:

$$
\begin{aligned}
\min\ & f_0(x) \\
\text{s.t.}\ & f_i(x) \leqslant 0, \quad i=1,\ldots,m, \\
& h_j(x) = 0, \quad j=1,\ldots,p,
\end{aligned}
$$

其中目标函数和约束都可以是非线性的函数, 并且经常有可微性假设. 非线性规划在工程、管理、经济、科研和军事等方面也同时得到广泛的应用. 1951 年, Kuhn 和 Tucker [106] 讨论了上述问题的最优性条件 (现在称为 Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件). 该项成果被认为是非线性规划正式诞生的一个重要标志. 在这之后, 人们发展了梯度法和 Newton 法的多个变种、信赖域法、交替方向乘子法、序列二次规划方法和高阶算法等求解算法, 并研究了流形上的优化、多项式优化和张量优化等多种带特殊结构的非线性优化问题. 本节将对这些算法进行逐一介绍.

4.1 无约束优化问题的算法

4.1.1 一阶算法

一阶算法即用目标函数的一阶导数 (梯度) 进行迭代的算法, 是一类最简单而容易实现的优化方法. 在所有一阶算法中, 梯度法是最易于实现并且最流行的算法. 其历史最早可以追溯到 Cauchy 在 1847 年提出的最速下降法. 当目标函数为强凸时, Akaike [107] 证明了最速下降法产生的函数值序列

是 Q- 线性收敛的. 当目标函数为凸时, Nesterov [108] 对梯度法进行了加速, 得到了最优的一阶算法. Barzilai 和 Borwein [109] 在 1988 年提出了一种两点步长梯度法, 即 BB (Barzilai-Borwein) 法, 其步长根据前后两个迭代点及其梯度的信息计算, 并且在最小二乘意义下满足拟 Newton 方程. BB 法的计算速度远快于最速下降法, 但对应收敛性的结果比较少. 共轭梯度法是介于梯度法与 Newton 法之间的一类算法, 选取负梯度方向为初始方向, 之后每次迭代以负梯度方向和前一个方向的线性组合为迭代方向. 因为其所需存储少, 计算速度快, 自提出之后就成为求解大规模优化问题的有效方法之一. 共轭梯度类方法有 4 个主流的变种: HS (Hestenes-Stiefel) 方法、FR (Fletcher-Reeves) 方法、PRP (Polak-Ribière-Polyak) 方法和 DY (Dai-Yuan) 方法. 其中 DY 方法由 Dai 和 Yuan [110] 在 1999 年提出, 它只需要 Wolfe 搜索, 即可保证每步产生下降方向, 并且全局收敛.

4.1.2 二阶算法

Newton 法 (又被称为 Newton-Raphson 方法) 是最为熟知的二阶算法, 分别由 Newton 和 Raphson 在 17 世纪近似求解方程的根时所独立提出, 因此其历史比最速下降法还要更为悠久. Newton 法的局部收敛速度是由 Kantorovich [111] 于 1948 年给出的, 其具有比一阶算法更快的局部收敛速度, 但是每步迭代需要计算 Hessian 矩阵的逆, 代价较大, 而且有时目标函数的 Hessian 矩阵无法保持正定, 从而使得 Newton 法失效. 为了克服这两个问题, Davidon 于 1959 年提出了拟 Newton 法, 并稍后因为 Fletcher 和 Powell 的工作使得这个算法开始流行起来. 其基本思想是, 不用二阶偏导数而构造出可以近似 Hessian 矩阵 (或 Hessian 矩阵的逆) 的正定对称阵. 不同的构造方法就产生了不同的拟 Newton 法, 其中被认为最有效的拟 Newton 法是由 Broyden、Fletcher、Goldfarb 和 Shanno 在 1970 年分别独立提出的 BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) 方法 [112–115]. 在 BFGS 中, 需要用到一个 N 阶矩阵, 当 N 很大时, 存储这个矩阵将消耗大量计算机资源. 为了解决这个问题, 减少 BFGS 迭代过程中所需的内存开销, Liu 和 Nocedal [116] 提出了 L-BFGS (limited-memory BFGS) 方法.

另一方面, Newton 法并不具有全局收敛的性质, Nesterov 和 Polyak [117] 提出了 3 次正则化 Newton 法, 并证明了它的全局收敛性质. Cartis 等 [118, 119] 提出了自适应的 3 次正则化 Newton 法, 并研究了对应子问题的有效求解, 使得该方法成为求解无约束优化问题的主流方法之一. 当目标函数为凸时, Nesterov [120] 又进一步对该算法进行了加速. 一个很自然的问题是加速后的 3 次正则化 Newton 法是否是一个最优的二阶算法. Monteiro 和 Svaiter [121] 给出了否定的答案. 他们提出了一个加速混合邻近外梯度方法 (accelerated hybrid proximal extra-gradient method), 并证明了其对应的某个二阶变种具有更快的收敛速度. 最近, Arjevani 等 [122] 通过构造一系列 "困难" 函数建立了二阶算法的下界, 并且此下界与文献 [112] 中算法的收敛速度一致, 从而证明了 Monteiro 和 Svaiter 的算法是最优的二阶算法.

信赖域方法也是求解非线性优化问题的一类重要方法. 与其他算法所沿用的先确定搜索方向然后选择适当的步长不同, 信赖域方法是先确定信赖域半径的大小, 然后在以当前迭代点为中心的信赖域中寻找最好的试探步. Powell [123] (也可参见文献 [124]) 于 1970 年对算法的收敛性作了一些先驱性的工作. Yuan [125] 研究了非光滑优化的信赖域方法. 在信赖域方法中, 信赖域子问题的有效求解至关重要. 一些与子问题结构相关的良好性质已被发现 (参见文献 [126–128]), 并被用于子问题的快速求解算法.

4.1.3 高阶算法

高阶优化算法是利用目标函数的高阶导数信息进行优化迭代的算法. 与经典的一阶、二阶算法相比, 研究发现高阶算法具有迭代复杂度更低的特点, 从而吸引了越来越多学者的目光来研究迭代复杂

度到底与可用的导数阶数有着怎样的依赖关系. 当目标函数为凸时, Baes[129] 和 Nesterov[130] 将加速三次正则化 Newton 方法推广为一般的高阶形式, 被称之为加速张量方法. 但是该算法的收敛速度高于已有的算法的下界[122, 131]. 在最近的 3 个独立工作中, Gasnikov 等[132]、Jiang 等[133] 和 Bubeck 等[134] 均在 Monteiro 和 Svaiter[121] 的算法框架下提出了类似的高阶算法, 并证明了其迭代复杂度与下界一致, 因此是最优的高阶算法.

另一方面, 当目标函数为非凸时, 人们发现类似的现象, 即在算法中引入高阶导数信息仍然可以有效降低其迭代复杂度. Birgin 等[135] 提出了基于 p 阶导数信息的 ARp (adaptive regularized p-th order) 算法来寻找一阶稳定点. Cartis 等[136] 对 ARp 算法进行了修改, 使其能收敛到一个同时近似满足一阶和二阶最优性条件的稳定解. 对于非凸优化问题来说, 高阶算法的另一个优点是可以被用来找到一个 "质量" 更好的解. 具体来说, 非凸问题的稳定点里面除了局部最优点之外, 还包括鞍点. 怎样 "逃离" 非凸问题的鞍点是机器学习, 特别是深度学习中一个最为热门的课题. 但是人们发现, 对很多具体问题, 鞍点数量会随着问题规模的增大呈现指数级增长. Anandkumar 和 Ge[137] 及 Cartis 等[138] 研究了非凸优化问题的高阶最优性条件. 满足这些条件的点被称为高阶稳定点, 能够天然地排斥一些低阶的鞍点. Anandkumar 和 Ge[137] 提出了一种基于 Newton 3 次正则化方法和目标函数 3 次导数信息的算法, 且该算法可以保证收敛到问题的 3 阶稳定点. Cartis 等[138] 提出了任意阶数稳定点对应的临界指标, 并基于信赖域算法提出了一个能寻找 p 阶近似稳定点的算法.

4.2　带约束的优化问题

4.2.1　带一般非线性约束的优化问题

序列二次规划 (sequential quadratic programming) 方法是目前认为求解非凸约束最优化问题最有效的方法之一, 它最早由 Wilson[139] 在 1963 年提出, 然后由 Han[140] 和 Powell[141, 142] 在 20 世纪 70 年代做出了重要的发展, 所以该方法也曾被称为 Han-Powell-Wilson 方法. 其基本思路是用 Newton 法去求解一阶 KKT 条件所对应的非线性方程组的解. 在每次迭代时, 它需要求解一个带线性约束的二次优化问题. 而拟 Newton 法中近似 Hessian 矩阵的技术 (如 BFGS 方法) 也可以用来构造每步迭代中的二次子问题. 但是此方法可能会导致严重的病态情形的缺点也在 Powell[143] 的数值实验中有所暴露. 序列二次规划方法是以罚函数作为效益函数, Fletcher 和 Leyffer[144] 首创的滤子方法能很好地选择初始罚参数从而实现算法的全局收敛. Gould 和 Toint[145] 在 2010 年对等式约束的最优化问题提出了不使用罚函数或滤子技术的信赖域序列二次规划方法, 并建立了其全局收敛性理论. 在此基础上, Liu 和 Yuan[146] 进一步提出了结合线搜索的序列二次规划方法并建立其全局和局部收敛性理论.

4.2.2　线性约束的优化问题

下面考虑约束中仅存在线性约束的优化问题:

$$\begin{aligned} &\min\ f(x) \\ &\text{s.t.}\ \ Ax = b, \end{aligned}$$

其对应的增广 Lagrange 函数为

$$\mathcal{L}_\rho(x,\lambda) = f(x) + \lambda^{\mathrm{T}}(Ax-b) + \left(\frac{\rho}{2}\right)\|Ax-b\|^2.$$

能处理一般非线性约束的乘子法在 20 世纪 60 年代末分别由 Hestenes [147] 和 Powell [148] 提出, 当应用于带线性约束的问题时, 其具体迭代格式如下:

$$x^{k+1} = \operatorname{argmin}_x \mathcal{L}_\rho(x, \lambda^k),$$
$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \rho(Ax^{k+1} - b)^{1)}.$$

上述算法可能的难点在于更新 x^{k+1} 的子问题比较难求解. 若求解的问题具有如下分块结构:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) + g(y) \\ \text{s.t.} \ \ & Ax + By = c, \end{aligned}$$

其对应的增广 Lagrange 函数变为

$$\mathcal{L}_\rho(x, y, \lambda) = f(x) + g(y) + \lambda^{\mathrm{T}}(Ax + By - c) + \left(\frac{\rho}{2}\right)\|Ax + By - c\|^2.$$

由于其具有分块结构, 因此可以修改乘子法的迭代格式得到如下形式:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= \operatorname{argmin}_x \mathcal{L}_\rho(x, y^k, \lambda^k), \\ y^{k+1} &= \operatorname{argmin}_y \mathcal{L}_\rho(x^{k+1}, y, \lambda^k), \\ \lambda^{k+1} &= \lambda^k + \rho(Ax^{k+1} + By^{k+1} - c). \end{aligned}$$

这就是著名的交替方向乘子法 (ADMM). 其主要思想在于将更新原始变量的子问题求解分解成两个相对容易的问题. 交替方向乘子法最早由 Glowinski 和 Marroco [149] 及 Gabay 和 Mercier [150] 提出. 虽然其收敛性可以直接由 Douglas-Rachford 算子分裂法的收敛性得到 [151, 152], 但是其收敛速度在最近几年才被建立 [153, 154]. 值得注意的是, Chen 等 [155] 通过巧妙构造反例说明了当交替方向乘子法应用到三分块问题时有可能会发散. 近年来, 众多学者们提出并发展了交替方向乘子法的多个变种, 如随机交替方向乘子法、并行交替方向乘子法和在线交替方向乘子法等. Hong 等 [156] 及 Li 和 Pong [157] 也提出用交替方向乘子法去求解一些非凸的问题并证明了其收敛性.

4.2.3 带流形约束的优化问题

流形优化是指带流形约束的非线性优化问题:

$$\begin{aligned} \min \ \ & f(x) \\ \text{s.t.} \ \ & x \in \mathcal{M}, \end{aligned}$$

其中 $\mathcal{M}$ 是某种 Riemann 流形. 正交矩阵组成的 Stiefel 流形或 Grassmann 流形是一种常见的矩阵流形. 近年来人们发现计算和应用数学、机器学习、数据科学和材料科学等领域的许多重要问题如 Bose-Einstein 凝聚问题、低温电子显微镜、相位恢复、深度学习、特征值的计算和电子结构计算等问题都可以描述为一个流形约束的优化问题, 因而受到广泛的关注.

从求解的角度来说, 经典的非线性优化算法都可以求解流形的优化问题, 并应用在维数更高的 Euclid 空间中进行更新迭代. 但是这种做法并未利用流形的内在结构, 效率不高. 而专门针对流形的

1) 比较实用的增广 Lagrange 方法的罚因子 ρ 在每一步也要动态更新, 例如, $\rho^{k+1} = \max\{t\rho^k, \|\lambda^{k+1}\|^{1+\tau}\}$ 或者 $\rho^{k+1} = \min\{t\rho^k, \rho_{\max}\}$, 其中 $\tau > 0$, $t > 1$ 为参数, $\rho_{\max}$ 为给定的上界.

优化算法保证每一步的迭代点都是在维数较低的流形上, 因而在实际中往往更有效. Absil 等 [158] 提出了向量移动算子等概念并把收缩算子的概念应用到算法设计中来, 研究并分析了流形上的线搜索方法、Newton 法和信赖域算法等方法. 近年来, 学者们进一步探索了一些更高效的流形优化算法. 文献 [159] 利用 Cayley 变换提出了保正交约束的算法格式, 得到一种可行的算法. 但是对一般流形来说, 投影算子的存在性和唯一性不能得到保证. 文献 [160] 证明了当流形满足某种性质时, 投影算子是局部存在的, 并指出这样的局部投影算子也是一种收缩算子. 基于此, 文献 [161] 提出了一种流形上的自适应梯度法. 当目标函数非光滑时, 文献 [162] 提出了流形上的邻近梯度法. 文献 [163] 给出了流形上的加速梯度法并从理论和数值上展示了其有效性. Zhang 等 [164] 也研究了用 ADMM 算法去求解带流形约束的优化问题. 在二阶算法方面, Riemann 信赖域算法是一个常用的方法. 最近, 文献 [161] 提出了流形上的自适应正则化 Newton 算法, 文献 [165,166] 将 3 次正则化方法推广到了流形优化中, 文献 [167] 对正交约束问题设计了一种结构拟 Newton 算法.

4.3　特殊形式的非线性优化问题

4.3.1　多项式优化

多项式优化是指目标函数与约束皆为多项式的优化问题, 一个多元的高次多项式可表示为

$$\sum_{\alpha} f_{\alpha} \boldsymbol{x}^{\alpha},$$

其中 $\boldsymbol{x}^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. 在理论上与代数几何、交换代数和矩阵理论等纯数学领域一脉相连, 其应用包括了航天器脉冲交汇最优燃料问题、传感器定位、模拟电路设计、稳定性分析与控制、电力系统中的最优潮流和水网络中的阀门设置等问题.

平方和 (sum of squares, SOS) 多项式指的是可以写为多个多项式平方之和的多项式, 是多项式优化理论与算法的基础. SOS 多项式与非负多项式息息相关, 对它们之间关系的探索最早可追溯到 1888 年. Hilbert 研究了 n 维实空间 $2d$ 次非负多项式与 d 次 SOS 多项式之间的关系, 并证明了有且只有在 $(n=1)$, $(d=1)$, $(n=3,\, d=2)$ 这 3 种情形下两者是等价的. 那么进一步的问题就是非负多项式能否写成若干有理多项式 (即多项式的比) 的平方和, 这就是著名的 Hilbert 23 个问题中的第 17 个问题. 关于该问题的历史进展详见 Reznick 2000 年的综述 [168].

在多项式优化的求解方面, 2001 年, Lasserre [169] 提出了现在被称为 Lasserre 层级 (Lasserre's hierarchies) SOS 松弛方法. 具体来说, 该方法通过求解一系列半定规划问题来找到多项式优化问题的最优解. 而其中每个半定优化问题都是原优化问题的一个下界, 随着半定规划的规模越来越大, 该下界收敛到多项式优化的最优值. Nie 等 [170] 在 2006 年构造了新的 SOS 松弛逼近方法, 并在原多项式问题最优值可以取到的假设下证明了新方法下界的收敛性. 特别地, 如果进一步假设梯度理想是根理想, Nie 等证明了该算法的有限步终止性. 此成果被认为是该领域中的突破性代表工作.

另一方面, 寻求多项式优化问题的近似算法也是一个研究热点, 目前对一些具有特殊约束的高次多项式能在理论上证明一些近似比. 2010 年, Luo 和 Zhang [171] 考虑了多个椭球约束的 4 次多项式优化问题, 将其松弛成二次半定规划问题并通过线性化方法建立了有效算法. 2010 年, He 等 [172] 对带多个二次约束的任意次齐次多项式优化建立了基于张量松弛方法的近似算法. 2011 年 So [173] 采取计算几何与张量松弛相结合的方法, 对同一问题提出了新的改进的近似算法. He 等 [174] 于 2014 年基于概率不等式提出了一个易于实现的近似算法.

4.3.2 张量优化

张量是指高维数据的一种排列方式, 也是向量和矩阵的推广. 在数学上一个 m 阶 $n_1\times n_2\times\cdots\times n_m$ 维张量可表示为 $\mathcal{H}=(h_{i_1i_2\ldots i_m}), \forall i_j\in\{1,2,\ldots,n_j\}, \forall j\in\{1,2,\ldots,m\}$. 其在微分几何、广义相对论、弹性力学和固体力学等领域有重要应用. 从数据科学的角度来看, 张量是一种具有特殊结构的大数据, 因此受到了越来越多的关注. 张量优化是指以张量分析为基本研究工具的优化问题, 包含了张量分解、张量最佳低秩逼近、张量低秩恢复、张量回归问题和张量特征值优化等.

张量分解最早由 Hitchcock [175] 提出, 该分解现在被称为 CANDECOMP/PARAFAC (CP) 分解. 20 世纪 60 年代, Tucker [176] 提出了另一种分解的概念, 现在称为 "Tucker 分解". Kolda 和 Bader [177] 详细介绍了张量分解的发展历史、理论与方法. 基于张量 CP 分解与 Tucker 分解, 我们可以定义两种不同的张量秩, 它们被分别称作 CP 秩和 Tucker 秩. 张量最佳低秩逼近能够使问题的维数有效地降低, 已经被广泛地应用于求解很多实际的大规模问题. 基于 CP 秩的最佳秩 -r 逼近是最流行的模型之一, 特别地, 当 $r=1$ 时, 该模型归结为最佳秩 -1 逼近, 是最简单但非常重要的一类最佳逼近问题. 高阶幂方法 [131] 是求解这类问题的主要方法之一, 具有良好的数值效果. 基于 Tucker 分解的最佳秩 -$(r_1,r_2,\ldots,r_m)$ 逼近是另一个流行的模型, 高阶幂方法 [178] 也是求解这类模型的常用方法之一. 另外, 矩阵低秩 (稀疏) 恢复的问题也被自然地推广到了张量情形 (参见文献 [179]), 并被称为张量低秩恢复问题. Hermite 矩阵也找到了张量形式的推广 (参见文献 [180]), 其对应的秩和秩 -1 逼近也有学者进行了研究 (参见文献 [181]).

在统计中, 当学习的样本是张量数据、以张量为待估回归系数、响应变量和预测变量都是张量时, Zhou 等 [182] 提出了张量回归模型. 该模型为经典的线性回归和矩阵回归等模型提供了统一的框架, 且具有更为广泛的实际应用背景. 张量特征值的概念由 Qi [183] 和 Lim [184] 各自独立提出. 在过去的十多年里, 张量特征值的理论、算法和应用得到了快速发展, 详情可参见文献 [185, 186].

5 机器学习中的优化算法

机器学习是一门高速发展的学科, 它的兴起与数学优化密不可分. 从最早 Rumelhart 等 [187] 用反向传播优化神经网络, 到支持向量机的序列最小化法 [188, 189], 再到当前一阶算法在人工智能软件中不可替代的位置 (参见文献 [190–192]), 一部机器学习的发展史也是一部机器学习与数学优化的交互史. 随着大数据时代的到来, 优化算法更是成为决定机器学习模型能否在生产实践中落地的一个关键因素. 本节旨在介绍机器学习中优化算法的新进展, 包括凸优化和非凸优化中的一些重要结果, 强调算法的复杂性分析.

5.1 梯度法与次梯度法

首先, 以机器学习中的监督学习 (supervised learning) 为例. 从最优化角度来看, 可以将监督学习描述成正则风险最小化问题. 该问题具体形式如下:

$$\min_x f(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l(\xi_i,x)+\omega(x). \tag{5.1}$$

在上式中, $\{\xi_i\}$ 为训练数据, x 为待优化的模型参数, 风险 (损失) 函数 $l(\xi,x)$ 用来衡量模型的好坏. 例如, 在线性回归模型中, $l((a,b),x)=\frac{1}{2}\|b-a^{\mathrm{T}}x\|^2$. 在支持向量机模型中, $l((a,b),x)=\max\{1-b\langle a,x\rangle,0\}$.

$\omega(x)$ 为关于模型复杂度的惩罚函数 (正则项). 例如, 在岭回归模型中, 采用 $\omega(x)=\frac{\lambda}{2}\|w\|_2^2$; 在 Lasso 模型中, 采用 $\omega(x)=\lambda\|w\|_1$. 当 $\omega(x)\equiv 0$ 时, 问题 (5.1) 一般被称为经验风险最小化问题.

当模型目标函数 $f(x)$ 光滑时, 机器学习中最常用的优化方法是梯度下降 (gradient descent) 法, 梯度下降的一种最基本迭代形式为

$$x^{k+1}=x^k-\frac{1}{L}\nabla f(x^k),$$

其中 L 为 $f(x)$ 的光滑系数. 首先介绍梯度下降法的一些理论结果. 对于一般的光滑函数优化问题, 梯度法并不能直接保证迭代点序列的收敛. 当 $f(x)$ 是光滑凸函数时, 我们可以用函数值误差来刻画求解的精度. 令 f^* 为最优值, 可以证明为了达到 $f(x^K)-f^*\leqslant\varepsilon$ 的误差, 梯度下降法所需要的迭代步数为 $K=O(L/\varepsilon)$. 当 $f(x)$ 具备强凸性时, 令 μ 为 $f(x)$ 的强凸系数, 梯度法的迭代复杂度可以改进至 $O((L/\mu)\log(1/\varepsilon))$. 若 $f(x)$ 不是凸函数, 一般情形下无法保证收敛到最优函数值, 只能保证一些必要最优性条件 (如 $\nabla f(x)=0$), 因此需要采用其他的标准来刻画非凸优化中的复杂度. 一个很自然的想法是用迭代点梯度模平方 $\|\nabla f(x^k)\|^2$ 来度量收敛到一阶稳定点的误差. 可以证明, 为了得到一个 ε-稳定点 (即满足 $\min_k\|\nabla f(x^k)\|^2\leqslant\varepsilon$), 梯度下降法的迭代复杂度为 $O(L/\varepsilon)$.

当问题 (5.1) 具有光滑复合结构时, 其损失函数 $g(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n l(\xi_i,x)$ 为一光滑函数而罚函数 $\omega(x)$ 为一结构简单的非光滑函数, 可采用更加一般的邻近梯度法去求解 $x^{k+1}=\mathrm{prox}_{\gamma\omega}(x^k-\gamma\nabla g(x^k))$, 其中, 邻近映射定义为

$$\mathrm{prox}_{\gamma\omega}(x)=\mathrm{argmin}_y\left\{\frac{1}{2\gamma}\|y-x\|^2+\omega(y)\right\}.$$

邻近梯度法的思想是先按照梯度步更新至过渡点 $x^k-\gamma\nabla g(x^k)$, 再从该点计算邻近映射得到 x^{k+1}. 在很多机器学习问题中, 尽管 $\omega(x)$ 非光滑, 但与之相关的邻近映射可以很快地算出. 例如, 在稀疏学习中常常采用 $\omega(x)=\lambda\|x\|_1$, 其邻近映射可以由软阈值 (soft thresholding) 函数给出. 值得一提的是, 邻近梯度法有很强的表达能力, 例如, 令 $\omega(x)$ 为集合 $\mathcal{C}$ 的指示函数: $\omega(x)=\delta_{\mathcal{C}}(x)$ 2). 邻近梯度法的迭代可以表述为 $x^{k+1}=\mathrm{argmin}_{y\in\mathcal{C}}\|y-(x^k-\gamma\nabla g(x^k))\|$, 该方法也被称为投影梯度法. 理论分析表明 (参见文献 [193]), 邻近梯度法的复杂度与梯度下降法同阶.

5.1.1　次梯度法

在机器学习的一些其他重要模型当中, 损失函数并不连续可导, 这一类模型包括常见的分位数回归和支持向量机. 次梯度法 [194, 195] 是解决这类优化问题的一种常见方法. 从复杂性角度看, 由于并不假设函数的光滑性, 次梯度法的收敛速率一般比梯度法要慢. 对于一般 Lipschitz 凸函数, 次梯度法的复杂度为 $O(M^2/\varepsilon^2)$ (参见文献 [193]), 其中 M 为目标函数的 Lipschitz 系数. 当目标函数为 μ- 强凸函数时 ($\mu>0$), 文献 [196] 通过加权平均的技术可以将复杂度改进至 $O(M^2/(\mu\varepsilon))$.

尽管次梯度法主要应用在凸问题中, 近年的研究表明, 次梯度法在非凸问题上也有理论保证. 最近的一些工作 [197–199] 证明了次梯度法在较为广泛的非凸模型 (包括神经网络) 能渐近收敛到稳定点. 在大规模非光滑非凸优化中, 文献 [200] 在邻近点算法里嵌套 (随机) 邻近次梯度法去近似求解子问题, 提出了邻近 - 指导次梯度法并分析了该算法的收敛复杂度. 之后文献 [201] 进一步简化了分析, 证明了直接使用 (随机) 次梯度法也能在该问题上得到同样的复杂度. 值得注意的是, 在分析复杂度时,

2) 指示函数定义为 $\delta_C(x)=\begin{cases}0, & 若\ x\in C,\\ +\infty, & 其他.\end{cases}$

邻近次梯度法和邻近梯度的收敛准则不同. 由于函数并不光滑, 次梯度法并不能保证迭代点是近似稳定点, 仅能保证迭代点收敛到近似稳定点邻域内的速率.

5.1.2 Nesterov 加速算法

我们很自然会问, 梯度法是否是最优的一阶算法? 如果不是, 那是否存在更好的一阶算法, 以及最优的迭代复杂度是多少? 在凸优化中, Nesterov [108, 202] 开创性地提出了加速梯度法, 并证明了其在光滑凸问题中的迭代复杂度是 $O(\sqrt{L}/\varepsilon)$, 而在强凸光滑问题中的复杂度为 $O(\sqrt{L/\mu}\log(1/\varepsilon))$. 在这两类问题中, Nesterov 加速算法都达到了专著 [203] 指出的一阶算法在黑盒模型下的复杂度下界, 因此也被认为是凸优化中的一类最优算法. 进入 21 世纪后, Nesterov 加速算法的发展有许多重大突破. 文献 [204] 在一类有结构特征的非光滑问题上提出了基于加速算法的光滑逼近算法, 得到了比次梯度法更优的收敛速度. 进一步地, 文献 [205, 206] 将加速算法拓展到形如 $f(x) = g(x) + \omega(x)$ 的复合函数优化问题上, 其中 $g(x)$ 为光滑凸函数, $\omega(x)$ 为形式简单的惩罚函数, 被用来增强问题解的某些特性. 例如, 在机器学习和信号处理中, 很重要的稀疏学习和压缩感知会采用基于 1- 范数的罚函数.

尽管 Nesterov 加速算法获得了巨大的成功, 但在很长一段时间内, 其算法机理并未被理解清楚. 因此, 近年来的不少工作试图对加速算法给予更直观的解释并提出改进. 这些工作包括基于半正定规划的加速算法 [207]、基于几何方法的加速算法 [208]、基于二次逼近的加速算法 [209]、基于离散和连续动态系统的加速算法 [210, 211] 及与常微分方程建立联系的新型加速算法 [212].

在非凸优化中, 文献 [213] 将 Nesterov 加速算法拓展到非凸形式的随机和复合问题上, 紧接着, 文献 [214] 将其推广到两项都非凸的复合函数优化问题中. 在非凸问题上直接使用加速算法, 得到的复杂度的主项与一般梯度法的复杂度同阶, 因此改进的效果并不明显. 如果要进一步提升算法的速率, 可能需要挖掘问题更多的结构信息. 关于这一点, 在后文邻近点算法会有更多探讨.

5.2 条件梯度法

条件梯度法, 又称 Frank-Wolfe 算法, 在 20 世纪 50 年代由 Frank 和 Wolfe [215] 提出并用于求解二次规划问题, 之后被推广到更一般的带约束非线性优化问题 $\min_{x\in\mathcal{C}} f(x)$. 这里假设 $f(x)$ 为一光滑凸函数, 而可行域 $\mathcal{C}$ 为一有界凸集. 条件梯度法的迭代形式如下:

$$y^k = \mathrm{argmin}_{x\in\mathcal{C}}\langle\nabla f(x^k), x\rangle, \tag{5.2}$$

$$x^{k+1} = (1-\gamma_k)x^k + \gamma_k y^k. \tag{5.3}$$

与投影梯度法不同, 条件梯度法的关键步骤 (5.2) 是通过求解一个线性优化问题去寻找下降方向 y^k. 虽然条件梯度法的迭代复杂度 $O(L/\varepsilon)$ 并不是最优的, 但它也有不少独特优点. 特别地, 条件梯度法适用于一些线性优化简单但投影计算复杂的问题. 例如, 在一类关于矩阵变量 X 的优化问题中, 约束集为关于核范数的球约束 $\mathcal{C} = \{X : \|X\|_* \leqslant k\}$. 投影到集合 $\mathcal{C}$ 需要做完整的奇异值分解, 而在该集合上求解线性问题只需算出最大奇异值和对应的左右奇异向量, 从而将计算量大大减少. 因此, 条件梯度法相比投影算法来说运行时间可以大大降低. 此外, 条件梯度法也能保证解的稀疏性, 特别是在可行域是点集 A 的凸包时 ($C = \mathrm{conv}(A)$) 的一类约束优化中. 在这类问题中, 线性子问题 (5.2) 的解可以在凸包的顶点处 (即 A 中) 取到, 而迭代解 x^k 可以看成是初始点 x^0 与 A 中选定元素的凸组合. 例如, 当可行域为 ℓ_1 范数约束时, $\mathcal{C} = \{\|x\|_1 \leqslant \tau\}$, 可将 A 作为 Euclid 空间标准正交基组成的集合. 因此, x^{k+1} 相较 x^k 最多只增加一个非零元. 取 x^0 为零向量, 经过 $O(1/\varepsilon)$ 次迭代之后, 条件梯度法的函数

误差为 $O(\varepsilon)$ 而解的稀疏度控制在 $O(1/\varepsilon)$ 的数量级. 关于条件梯度法更多的理论性质和应用场景, 参见文献 [216].

由于应用潜力巨大, 条件梯度法成为机器学习优化中的一个重要课题. 文献 [217] 提出了条件梯度滑动法, 利用条件梯度法去求解加速算法的子问题, 可以在保证迭代复杂度为 $O(1/\varepsilon)$ 的同时将梯度计算量降至 $O(1/\sqrt{\varepsilon})$. 但一般来说, 条件梯度法的收敛速度很难进一步提升, 只有在一些更强的假设下, 才能达到线性速度 (参见文献 [218]). 文献 [219] 提出了坐标 Frank-Wolfe 算法, 用于求解结构支持向量机的对偶问题, 它的算法复杂度与随机次梯度法同阶, 但因步长可以优化, 实际效果要好于后者. 文献 [220] 证明了条件梯度法与次梯度法在一些更一般的强凸复合问题上的等价性. 近年来, 条件梯度法被进一步推广到随机问题和非凸优化问题 (参见文献 [83, 221–223]).

5.3 随机优化法

用确定型 (deterministic) 算法 (如梯度法) 去优化机器学习模型, 每次计算一阶信息需要遍历所有数据. 当面临大数据问题时, 算法的迭代过程会变得非常耗时. 相较而言, 随机 (次) 梯度法每次迭代只用随机选取的数据去估计 (次) 梯度, 因此有很高的运行效率, 是处理大规模优化问题时最常用的方法. 随机优化的思想早在 20 世纪 50 年代 (参见文献 [224]) 已经被提出, 但直到大数据时代, 它才引起机器学习社区的广泛兴趣, 其中最具代表性的是 Nemirovski 等的工作 [225]. 该文献提出了随机镜下降法并研究了期望形式的随机凸函数优化问题:

$$\min_{x\in\mathcal{C}} f(x)=\mathrm{E}_{\xi}F(x,\xi), \tag{5.4}$$

其中 ξ 是随机向量, 而对于给定的 ξ, $F(x,\xi)$ 是关于 x 的凸函数. 该文献是后续很多研究的基础, 得到了优化与机器学习领域的极大关注. 截至 2020 年 1 月 10 日, 该文献在 *SIAM Journal on Optimization* 十年内下载量排行第一. 逐渐地, 随机优化问题成为机器学习与优化交叉领域的一大研究热点. 文献 [226] 将 Nesterov 加速法成功应用在含光滑和非光滑两部分的复合函数优化中, 将随机梯度法的复杂度改进为 $O(L/\varepsilon+(M+\sigma)^2/\varepsilon^2)$, 其中 L 为光滑部分的光滑系数, M 为非光滑部分的 Lipschitz 系数, σ^2 为随机梯度的方差. 在强凸非光滑问题上, 文献 [196] 将随机次梯度法的复杂度改进至 $O((M+\sigma)^2/(\mu\varepsilon))$. 在复合问题上, 文献 [227] 得到了最优复杂度 $O(\sqrt{L/\mu}\log(L/\varepsilon)+(M+\sigma)^2/(\mu\varepsilon))$. 由于迭代时间远小于梯度法, 因此, 随机梯度法可以很快获得近似最优解. 但由以上理论结果也可以看出, 最坏情形下随机算法的收敛速度为次线性. 如果求解的是有限和问题, 则确定型算法在足够长的运行时间之后很可能会比随机算法得到精度更好的解.

近年来, 许多机器学习的研究工作又回到具有有限和形式问题 (5.1) 并研究强凸形式的目标函数. 文献 [228] 在随机梯度法迭代中不断更新梯度的估计, 可以在总体上获得线性收敛速度的同时保证随机梯度的快速迭代. 文献 [229] 提出了随机方差缩减梯度 (stochastic variance reduction gradient, SVRG) 法, 在随机梯度算法中每隔一段时间计算一次完整的梯度 $\bar{G}$, 并用这个梯度来构造方差更小的随机梯度 $G^k=\nabla l_{i_k}(x^{k-1})-\nabla l_{i_k}(\widetilde{x})+\bar{G}$. 如果将随机梯度的计算次数作为比较标准, SVRG 达到了 $O((n+L/\mu)\log(1/\varepsilon))$ 的复杂度, 好于梯度算法的 $O((nL/\mu)\log(1/\varepsilon))$, 其中 n 是训练样本的个数. 进一步地, 通过与加速算法结合, 随机梯度算法复杂度可以减少至 $O((n+\sqrt{nL/\mu})\log(1/\varepsilon))$. 因此, 当 n 相对 L/μ 较小时, 加速算法比非加速算法有一定的优势 (参见文献 [230, 231]). 最近, 文献 [232] 研究了统一的加速随机方差缩减法 (variance-reduced accelerated gradient, VARAG), 在 n 与 L/μ 不同的相对大小时都取得了最优收敛率, 并且只需要更弱的强凸性假设.

在非凸问题上, 文献 [213] 首次分析了随机梯度法的收敛性质, 并证明为了达到某种 ε- 近似稳定点[3)], 该算法的迭代复杂度为 $O(\sigma^2/\varepsilon^2)$. 在非凸有限和问题上, 文献 [233, 234] 分别推导出非凸 SVRG 算法, 获得了比梯度下降法更优的复杂度. 在方差缩减技术的基础上, 后续工作 [235–237] 等进一步降低了随机算法的收敛复杂度.

5.4 坐标下降法

坐标下降法将模型变量根据坐标块划分, 每次只沿着部分坐标的方向更新. 当变量是通过计算坐标梯度步来更新时, 我们也将这种方法称作坐标梯度法. 由于子问题的规模和维度相对较小, 较梯度法而言, 坐标下降法能够更快地迭代, 是另一种求解大规模优化问题的有效方法, 并被广泛运用在统计和机器学习中 (如文献 [238, 239]). 按照坐标遍历的顺序, 可将坐标下降法分为循环坐标法和随机坐标法, 前者是按照给定的顺序循环更新变量, 而后者是按照随机方式选取变量进行更新. 尽管坐标下降法历史悠久, 早期的研究更多分析循环坐标法及其渐近收敛性 (如文献 [240–242]), 直到 21 世纪, 坐标下降法的算法复杂性才开始得到重视. 一个重要的突破是 Nesterov [243] 和 Strohmer 和 Vershynin [244] 发展的随机坐标梯度法. 相较于循环坐标法, 随机坐标梯度法的复杂性更容易分析, 技术也更容易拓展. 在此之后, Richtárik 和 Takáč [245, 246] 的一系列工作将随机坐标下降法拓展到复合优化问题和并行计算中. 文献 [247, 248] 将坐标梯度用在风险最小化的对偶形式上, 取得了好于随机梯度法的表现. 近年来, 循环坐标下降法的分析也有不少进展. 文献 [249] 证明了循环坐标下降法的复杂度并提出了加速循环坐标法. 尽管在该理论下循环坐标法复杂度不如随机坐标法, 但实验显示两种方法实际性能很接近. 近期的一项工作 [250] 构造出了二次函数例子, 证实了在最坏情形下, 循环坐标法要比随机坐标法慢 $O(d^2)$ 倍, 其中 d 为坐标个数.

值得一提的是, Nesterov [243] 在其工作中也推导了加速版本的随机坐标法. 尽管该方法迭代复杂度比一般坐标梯度法有所改进, 但并不被认为在实际应用中有很大优势, 主要原因是该加速法每次迭代需要更新所有变量, 计算量过大. 之后的工作 [251] 观察到可以通过变量替换避免一次更新所有坐标, 从而将加速坐标梯度法运行时间大大缩减, 使之在实际中有效. 文献 [252] 研究了加速并行坐标梯度法在复合问题上的效率. 文献 [253] 将加速坐标梯度法拓展到强凸的复合问题上. 之后的一系列工作 [254–256] 改进了采样方式, 进一步减小了加速坐标梯度法对于 Lipschitz 系数的依赖.

近年来, 非凸机器学习成为坐标下降法的一个主要应用场景. 文献 [257–259] 等一系列工作将坐标下降法运用在稀疏学习、矩阵和张量分解等一系列重要的机器学习问题上. 文献 [260–262] 分别研究了非凸随机问题、带线性约束的非凸问题和非凸非光滑问题中坐标下降法收敛至近似稳定点的迭代复杂度. 需要注意的是, 一般的收敛性分析至多只能保证迭代子序列的收敛. 如果要得到全序列的收敛性, 需要借助一些额外条件, 如 Kurdyka-Łojasiewicz 性质 (参见文献 [258, 263]).

5.5 邻近点算法

邻近点算法 (proximal point method) 是另一种求解大规模机器学习优化问题的重要方法. 与邻近梯度法相比, 邻近点法最大的不同是它并不直接利用目标函数 $f(x)$ 的梯度信息, 而是通过增加二次项, 将原问题转化为一系列子问题去求解. 给定点 x^k, 邻近点法定义 x^{k+1} 为以下邻近子问题的解:

$$\min_x \ f(x) + \frac{1}{2\nu}\|x - x^k\|_2^2, \tag{5.5}$$

3) 满足 $\mathrm{E}\|\nabla f(\bar{x})\|^2 \leqslant \varepsilon$, 其中 $\bar{x}$ 为根据某种概率分布随机选取的历史迭代点.

其中 $\nu > 0$ 为某选定的参数. 根据之前定义的邻近映射, 可将邻近点法的迭代式写为 $x^{k+1} = \mathrm{prox}_{\nu f}(x^k)$. 相比直接优化 $f(x)$, 子问题 (5.5) 增加的二次项使得其目标函数的凸性更强, 条件数更小, 从而更有利于迭代算法去求解. 在凸优化问题中, 文献 [230,264] 分别提出了催化剂法和加速近似邻近点法去求解问题 (5.1). 这类方法可以利用常见的方差缩减梯度法和坐标梯度法等一阶算法当成黑盒去求解邻近子问题, 并能达到最优的迭代复杂度. 其关键技术是在邻近点法的基础上采用 Nesterov 加速技术并调整合适的子问题求解精度, 从而在理论上提升算法的收敛速度.

另一方面, 邻近点法也为非凸优化提供了解决思路. 文献 [265] 拓展了催化剂算法的框架, 将邻近点算法运用在非凸问题, 并能自动适应问题的非凸性. 之后的一些重要工作着重解决了一类病态的弱凸问题. 为简单起见, 我们分析 $f(x)$ 是光滑函数的情形. 如果存在 $\mu > 0$ 使得

$$f(x) \geqslant f(y) + \langle \nabla f(y), x - y\rangle - \frac{\mu}{2}\|x - y\|^2,$$

则称 $f(x)$ 是 μ- 弱凸函数, 而 μ 为其弱凸系数. 由上述定义不难看出, 如果 $f(x)$ 是 L- 光滑函数, 则它必然有弱凸系数 L. 一个更有趣的场景是 μ 远小于光滑系数: $\mu \ll L$, 此时称函数 $f(x)$ 是病态的. 因为病态非凸函数形式上已经非常接近凸函数, 一种合理的直觉是此时通过 Nesterov 加速技术可以进一步加快算法收敛. 例如, 文献 [266] 将邻近点算法与加速随机梯度法结合求解有限和问题, 如果将随机梯度计算次数作为标准, 该方法取得了 $O(\mu(n + \sqrt{nL/\mu})/\varepsilon^2)$ 的复杂度, 在病态问题上远好于随机方差缩减算法的复杂度 $O((n^{2/3}L)/\varepsilon^2)$. 在带线性约束的非凸问题上, 文献 [267] 提出了基于二次罚函数的广义非精确邻近点法, 用加速复合算法去求解带罚函数的邻近点子问题. 文献 [262] 将加速坐标梯度法与邻近点算法结合去求解非凸光滑和复合问题, 在病态的非凸问题上得到了比坐标下降法更好的收敛速度. 由以上研究可以看出, 将邻近点算法与加速算法结合可以大大加快一些非凸问题的求解.

5.6　内点法和 Newton 法

二阶算法由于需要求解线性系统, 常常被认为不适于大数据问题. 尽管当前机器学习中主要的优化工具是基于一阶算法, 然而在一些有结构的问题当中, Newton 法和内点法等二阶算法也有巨大应用潜力. 文献 [268] 分析了 Newton 法在复合问题上的收敛性, 并验证了 Newton 法在一些机器学习问题中比一阶算法更有优势. 文献 [269] 将支持向量机转成对偶形式并用内点法去求解. 在内点法或 Newton 法中, 构造正则方程或计算 Hessian 矩阵复杂度为 $O(nd^2)$, 而计算方程组的复杂度为 $O(d^3)$. 当训练数据量远大于特征维度时 ($n \gg d$), 算法的复杂度为 $O(nd^2)$, 因此, 计算瓶颈在于构造线性系统而并不是求解该系统. 之后的不少研究工作试图进一步减少二阶算法的时间. 一种主要的思路是利用随机方法去估计二阶信息, 在不损失过多精度的前提下降低运行时间. 例如, 在 Newton 法中可以通过随机投影或随机采样 (参见文献 [270,271]) 的方式估算 Hessian 矩阵.

5.7　一些非凸优化问题

5.7.1　低秩矩阵优化

在一类矩阵优化问题中, 希望从一些有噪声或不完全的观测中恢复低秩矩阵. 问题描述如下:

$$\begin{aligned} &\min_{M\in\mathbb{R}^{n\times m}} \ f(M) \\ &\text{s.t. } \operatorname{rank}(M) \leqslant r, \end{aligned} \tag{5.6}$$

其中 r 为远小于 m 和 n 的整数, $f(M)$ 为在观测数据上的损失函数. 低秩优化的应用包括矩阵补全、相位恢复、盲反卷积和鲁棒主成分分析等. 由于秩约束在优化上较难处理, 需要对约束进一步处理. 第一种方法是凸松弛技术, 将秩约束松弛成核范数的约束或惩罚项, 在一定的假设下, 凸松弛的问题有很好的统计性质, 如鲁棒性, 接近最优样本复杂度, 而且可以利用较为成熟的凸优化算法去逼近最优解 (参见文献 [272, 273]). 求解核范数的问题常常需要投影梯度法或者邻近梯度法 (参见文献 [274, 275]), 迭代时需要完整的 SVD (singular value decomposition) 分解, 因此在问题规模大时收敛非常缓慢. 另一种方法是前文提到的条件梯度法[276], 通过求解线性子程序来避免完整 SVD 分解. 然而, 尽管凸优化方法有很好的理论性质, 但凸松弛技术有一定的不足之处, 一个最大的难点是松弛问题中通常需要维护完整的高维矩阵, 因此, 算法的计算和存储空间开销非常大. 解决这个难点的一个有趣的思路是采用随机草图 (sketch) 技术做解的低秩近似, 通过牺牲一定精度来节省计算资源 (参见文献 [277]).

另一种低秩问题的方法是直接进行非凸优化. 这样做的一大好处是计算效率的提升. 例如, 可将秩约束替换为对矩阵 M 的因子分解: $M=XY^{\mathrm{T}}$, $X\in\mathbb{R}^{n\times r}$, $Y\in\mathbb{R}^{m\times r}$, 进而把原问题转变为对因子变量的优化问题. 由于 X 和 Y 相对规模较小, 计算和内存的开销比凸松弛模型会显著下降. 另一方面, 尽管非凸优化仍然是 NP 难, 但现实中的数据一般都有些统计和结构信息可以利用, 使得问题往往更容易求解. 一种分析思路是证明问题的局部收敛性. 文献 [278–281] 证明了在一定的假设下, 模型的全局最优解附近存在一个足够大的吸引域, 只要初始点选取到该区域, 迭代过程可以稳定收敛到该最优解. 另一种研究思路是基于损失函数的全局性质分析, 虽然空间被鞍点划分为许多局部区域, 但在一些假设下 (如足够多的数据), 可以证明局部最优往往就是全局最优 (参见文献 [282–284]). 关于低秩问题的非凸优化算法, 可参见近期的综述文献 [285].

5.7.2 跳出鞍点

由于很多重要的非凸问题已被证明不存在虚假的局部最优解, 只要能够在优化过程中逃离鞍点, 就能保证收敛至全局最优解. 因此, 研究优化算法能否以及如何有效逃离鞍点成为当前一个热点问题. Lee 等[286] 证明了在一些宽泛的条件下, 对梯度法、坐标梯度法、邻近点法和镜下降法等一阶算法来说, 几乎所有的初始点都能保证解跳出严格鞍点. 之后的工作 [287] 在非凸二次问题上证明了重球法和加速算法能以比梯度法更快的速度逃离鞍点. 此外, 一些工作分析了一阶算法跳出鞍点的复杂度. 文献 [288] 指出, 在最坏情形下, 梯度算法需要指数时间才能逃离鞍点. 文献 [289, 290] 为了探索负曲率搜索方向, 在梯度算法中加入了随机噪声, 从而更有效地逃离了鞍点. 与此同时, 一些工作证明通过利用二阶信息可以比一阶算法更有效地收敛到一阶稳定点, 甚至可以逼近二阶稳定点. 例如, 文献 [291] 用一阶算法近似求解三次正则化法[117] 的子问题, 避免了构造 Hessian 矩阵和矩阵求逆. 文献 [292] 在梯度下降中检查负曲率信息, 在函数接近凸函数时利用邻近点算法和加速算法加快收敛.

5.7.3 深度学习中的优化

深度学习是当前机器学习最重要的研究热点. 深度神经网络一般被认为是层次较深、结构复杂的人工神经网络, Hinton[293] 用 "深度" 这一称谓来区别于传统的 "浅层" 模型, 而后者常指感知机和支持向量机等传统模型. 在工业和开源软件中, 人们通常用随机梯度法来求解神经网络模型, 因为随机梯度法每次迭代的运行速度快, 有极高的效率. 相较之下, 尽管复杂的算法 (如方差缩减梯度法或者二阶算法) 理论性质更优, 但其实际效果有待更深入的研究. 接下来将着重关注深度学习中优化算法的进展.

一般的随机梯度法仅利用当前梯度信息下降, 因而很容易陷入局部最优解. 改进随机算法的第一种思路是引入动量. 与梯度法不同的是, 动量法迭代利用了历史所有梯度信息, 能较为鲁棒地抵抗噪声和局部陷阱. 加拿大 Hinton 团队的工作 [294] 分析比较了传统随机梯度法、动量法和 Nesterov 加速算法, 并将加速法看成是一种加入了校正因子的动量法. 该项工作在一些深度自编码器和递归神经网络的例子中证实了动量的有效性及 Nesterov 算法的巨大优势.

神经网络训练的另一个突破是自适应算法的应用. 自适应梯度法 (adaptive gradient, AdaGrad) 由文献 [295] 提出, 主要处理一些稀疏数据和不平衡的数据集. AdaGrad 的思想是利用历史梯度的二阶矩均值, 给不同参数提供不同的步长 (学习率), 从而更有效地利用优化过程的局部特征. AdaGrad 的不足之处是历史的梯度权重相同, 而对于非凸模型, 很可能更邻近的迭代点信息更多, 需要更多权重. 之后的一些工作采用加权平均的自适应步长, 并用于求解深度学习模型 (参见文献 [296–299]). 尽管在实际中广受欢迎, 但自适应法并未得到学界一致肯定. 文献 [300] 在一些图像问题中观测到自适应法的泛化能力显著弱于随机梯度法, 从而认为自适应法的价值有限. 另一方面, 也有工作 (如文献 [301,302]) 指出自适应算法在一些模型中 (如强化学习、生成对抗网络) 比随机梯度效果好. 深度学习结构非常复杂, 算法的性能不仅受到参数调整的影响, 也与具体的问题相关. 如何公平地评估深度学习算法性能仍是一个有待研究的问题 (参见文献 [303,304]).

尽管随机梯度法是神经网络优化的最主要选择, 但也有不少工作试图采用其他算法去训练神经网络. 文献 [305] 采用邻近坐标梯度法分层训练神经网络, 该算法比随机梯度能收敛更快且易于并行, 但代价是需要用更多的内存维护中间变量. 文献 [306] 将神经网络目标函数部分线性化并利用 Frank-Wolfe 法去求解子问题, 由于 Frank-Wolfe 算法步长可以直接优化, 因此, 该方法比随机梯度调参更加方便, 在训练时间更短的情形下取得了与随机梯度接近的测试效果.

深度学习的优化是一个比较庞大的研究领域, 除了以上提及的算法应用, 也有不少理论研究新进展, 例如, 神经网络的全局蓝图分析 [307] 和过参数化神经网络 [308,309] 等. 限于篇幅, 本节无法涉及深度学习理论的各个方面. 关于深度学习中优化的更多进展, 可以参见近期的综述文献 [310].

5.8　小结

本节介绍了一些在机器学习中的主要优化算法和重要研究问题. 随着大数据和人工智能时代的到来, 数学优化在机器学习中的应用越发广泛而深入, 而机器学习也为数学优化带来了更大的挑战. 纵观全节, 我们认为近年来机器学习中的数学优化发展有几个特点. 首先, 尽管很多问题的最坏情形算法复杂度早已给出, 但现实中的问题往往并不是最坏情形, 通过利用更多的数据信息和模型结构, 高效的算法不断被提出, 一定程度上在不断打破之前的认知. 而随着机器学习与优化的不断交互, 越来越多的传统优化算法重新焕发生命, 在新的场景下有了新的意义. 其次, 机器学习研究重点由线性模型演变为复合结构模型, 而优化问题也由凸优化变为更为复杂的非凸优化. 图灵奖得主 Yann LeCun 十多年前曾做过报告 “Who is afraid of non-convex loss functions?”, 认为凸模型虽然很好优化, 但非凸模型在实际中更为有用. 因此, 他强烈呼吁当时的学界不要惧怕 NP 难问题, 要去迎接非凸模型的挑战. 如今, 如何更好地优化非凸模型已成为一个最重要的研究热点, 如深度神经网络的优化问题.

6　组合问题中的优化算法

在传统的组合问题研究中, 人们一般通过观察问题的特点, 设计出针对性的组合算法. 在理论计算机及组合数学领域, 针对这些问题已经有大量表现优良的各种算法. 随着线性规划等标准优化模型

求解算法的成熟及算法包的开发, 诸多研究者开始尝试利用优化模型和算法解决组合问题, 并提出了一些系统性的解决方案. 本篇综述旨在通过一些经典的简单例子, 针对领域内的主要方法做一个简略的介绍. 由于篇幅有限并且组合问题的模型类型极为丰富, 因此对各种组合问题及其变种, 以及对应的最新成果和各种复杂算法不做展开.

6.1 基于线性规划的组合问题优化算法

大量的组合问题都可以表示成 (混合) 整数线性规划问题, 并可以采用分支定界 - 割平面等方法进行求解, 但是这些方法普遍难以进行理论分析. 本节主要介绍如何将整数线性规划问题中的整数约束松弛成线性约束, 并从松弛问题 (线性规划) 的解出发构建原问题的解. 通过分析松弛问题及其对偶问题的结构, 利用对偶拟合等技术框架设计算法并进行近似率的理论分析. 本节的主要内容参见文献 [311] 及相关学术论文.

6.1.1 基于线性松弛问题解结构的算法

在经典的最大二分匹配问题、运输问题和最大流问题中, 整数规划的线性松弛问题本身一定存在满足整数约束的最优解, 因此, 这个松弛问题的最优解也是原问题的最优解. 特别地, 通过单纯形法求解线性松弛问题一定可以得到这样的最优解. 以最大整数流问题为例, 给定无圈的单向网络 $G=(V,E)$, 其中 V 为网络的顶点集合, E 为有向边的集合. 有向边 $e=(i\to j)$ 的起点定义为 $o(e)=i$, 终点定义为 $d(e)=j$. 定义 x_e 为有向边 e 上的流量, 流量必须为非负整数且不可超过最大流量 c_e. 我们将不可行的边 $(i\to j)\notin E$ (包括虚拟边 $(i\to i)$) 上的最大流量设成 $c_{ij}=0$. 那么从起点 O 到终点 D 的最大整数流量可以表达为整数线性规划问题:

$$
\begin{aligned}
\max\ & \sum_{j\in V} x_{Oj} \\
\text{s.t.}\ & \sum_{j\in V} x_{vj} = \sum_{i\in V} x_{iv}, && \text{对所有的 } v\in V/\{O,D\}, \\
& 0\leqslant x_{ij}\leqslant c_{ij}, && \text{对所有的 } i,j\in V, \\
& x_{ij}\in\mathbb{Z}, && \text{对所有的 } i,j\in V.
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

其线性松弛问题为

$$
\begin{aligned}
\max\ & \sum_{j\in V} x_{Oj} \\
\text{s.t.}\ & \sum_{j\in V} x_{vj} - \sum_{i\in V} x_{iv} = 0, && \text{对所有的 } v\in V/\{O,D\}, \\
& 0\leqslant x_{ij}\leqslant c_{ij}, && \text{对所有的 } i,j\in V.
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

这个线性规划问题的每个自变量 x_{ij} 除了自身的上下界约束之外, 最多只出现在 i 和 j 对应的两个约束中, 其系数分别为 1 和 -1. 进一步地, 可以证明约束中的系数矩阵是一个全幺模矩阵 (totally unimodular matrix), 即矩阵的任意方阵子矩阵的行列式为 1、-1 或者 0. 由线性规划的基础可行解定义可知下面的定理:

定理 6.1 标准线性规划问题

$$\max\{c^{\mathrm{T}}x \mid Ax\leqslant b, x\geqslant 0\}$$

中的矩阵 A 如果是全幺模矩阵, 且约束变量 b 是整数变量, 那么其所有基础可行解都是整数解. 因此, 单纯形法所求得的最优解 (除非无解或无界) 一定也是整数解.

判定全幺模矩阵的方法可参见文献 [312]. 具体地, 对最大整数流问题可利用以下判定方法:

定理 6.2 (Ghouila-Houri)　如果一个 $n\times m$ 的矩阵 $A=(A_{ij})$ 中的全部元素 A_{ij} 都是 0、1 或 -1, 并且存在一个行 (列) 集合的分割 $R=R_1\cup R_2$ 使得对任何一行 j, 有

$$\sum_{i\in R_1} a_{ij}-\sum_{i\in R_2} a_{ij}\in\{-1,0,+1\},$$

那么这个矩阵一定是全幺模矩阵.

针对另一些问题, 虽然其数学规划问题的系数矩阵不是全幺模矩阵, 但是其线性松弛问题的解存在特殊的结构. 一般在这类问题中, 自变量除了自身上下界约束最多出现在两个约束条件中, 或每个约束条件最多出现两个自变量. 举例而言, 在边覆盖问题中, 需要选取最小费用的顶点集合, 以保证图的每个边上至少有一个顶点被覆盖. 设 c_i 为顶点 i 上的费用, 决策变量 $x_i=1$ (0) 代表选取 (不选取) 顶点 i. 其整数规划问题的线性松弛问题为

$$\begin{aligned}\min\ & \sum_{i\in V} c_ix_i\\ \text{s.t.}\ & x_i+x_j\geqslant 1,\quad \text{对所有的 } (i,j)\in E,\\ & 0\leqslant x_i\leqslant 1,\quad \text{对所有的 } i\in V.\end{aligned}\tag{6.3}$$

对于上述线性规划问题的任意一个基础可行解, 考虑进入基的边约束集合 E_S 和顶点约束集合 V_S ($x_i=0$ 和 $x_i=1$ 不可能同时出现). 构建这些边 E_S 构成的图 G', 每条边都对应约束 $x_i+x_j=1$. 考虑图 G' 的连通分支, 每个连通分支中, 如果存在某个顶点对应的约束进入基, 那么由于 G' 边上的约束 $x_i+x_j=1$, 此连通分支上所有的顶点 i 都有 $x_i=0$ 或 $x_i=1$. 如果每个连通分支中不存在某个顶点对应的约束进入基, 那么由基的特性, 决定 m 个变量需要 m 个约束, 即这个图有 m 条边. 一个边数等于顶点数的连通图被称为 “伪树”, 其必定是某个树加上一条边, 并且有唯一的一个圈. 由于基中的约束必须线性无关, 所以圈的长度必定是奇数. 对奇数长度的圈, 所有的 $x_i=1/2$ 才能保证边约束 $x_i+x_j=1$ 的成立. 因此, 这个连通分支上所有的 x_i 都等于 1/2.

定理 6.3　线性规划问题 (6.3) 的任何基础可行解中 x_i 一定取值 0、1 或者 1/2.

类似地, 考虑无关平行机排序的最小最大处理时间问题 (makespan). 有 N 个机器 M 个任务, 任务 i 在机器 j 上的工作时间 p_{ij} 各不相同. 需要确定工作的安排以保证每个任务均被安排到某台机器上完成; 以及一个最小工作时长 T, 使得每台机器均可以在时间 T 内完成工作. 这个问题的整数规划形式中, 每个变量出现在最多两个约束中, 因此考虑主基础可行解的基变量集合. 主基础可行解中基变量集合所对应的图存在类似的伪森林结构 (每个连通分支都是树或者伪树). Lenstra 等 [313] 利用这个伪树结构, 从基础可行解出发, 构建出简单的调整算法将连续解转变为整数解, 保证在每台机器上比连续解多工作一个工序的时间.

定理 6.4　如果工作 i 在机器 j 上的工作时长 p_{ij} 存在统一上界 t, 并且线性规划问题

$$\min\left\{T\,\middle|\,\text{对所有的机器 } j \text{ 有 } \sum_{i=1}^{M} p_{ij}x_{ij}\leqslant T,\ \text{对所有的工作 } i \text{ 有 } \sum_{j=1}^{N} x_{ij}=1, x\geqslant 0\right\}$$

的最优值为 T^*, 那么存在一个工作安排使得所有机器均在 T^*+t 时间内完成全部工作.

具体算法及分析细节可参见文献 [311, 313].

6.1.2 基于线性松弛解的随机算法

由线性松弛解生成整数解的最常见思路是, 将线性松弛问题的连续解的取整余数看作随机概率从而执行随机策略. 特别地, 覆盖 (满足) 及指派类型的问题天然比较适用此类算法.

对于覆盖 (满足) 类别的约束, 我们以经典的最大可满足性 (maximum satisfiability) 问题为例. 此问题需要寻找 Bool 变量 $b_1,\ldots,b_n$ 的最优设置, 使得子句集合 $\mathbb{C}$ 中被满足的子句权重最大. 每个子句 $c=(\bigvee_{i\in S_c^+} b_i)\vee(\bigvee_{i\in S_c^-}\overline{b_i})$ 被满足当且仅当对某个 $i\in S_c^+$, 有 $b_i=1$; 或对某个 $i\in S_c^-$, 有 $b_i=0$. 其线性松弛问题为

$$
\begin{aligned}
\max\ & \sum_{c\in\mathbb{C}} w_c y_c \\
\text{s.t.}\ & \sum_{i\in S_c^+} x_i+\sum_{i\in S_c^-}(1-x_i)\geqslant y_c, && \text{对所有的 } c\in\mathbb{C}, \\
& 0\leqslant x_i,\quad y_c\leqslant 1, && \text{对所有的 } i\in\mathbb{N},\quad c\in\mathbb{C}.
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

给定此问题的任意解 (x,y), 取 b_i 为均值 x_i 的独立 Bernoulli 分布. 此时子句 $c\in\mathbb{C}$ 被满足的概率为

$$
1-\prod_{i\in S_c^+}(1-x_i)\times\prod_{i\in S_c^-}x_i\geqslant 1-\mathrm{e}^{-\sum_{i\in S_c^+}x_i-\sum_{i\in S_c^-}(1-x_i)}\geqslant 1-\mathrm{e}^{-y_c}\geqslant(1-\mathrm{e}^{-1})y_c.
$$

因此, 基于线性规划的独立随机算法可取得 $1-\mathrm{e}^{-1}$ 的逼近率. 文献 [314, 315] 将此方法与经典算法结合, 将最大可满足性问题的逼近率提升至 3/4.

在牵涉指派变量的问题 (如平行机排程问题) 中, 其指派约束条件 $\sum_j x_{ij}=1$, $x\geqslant 0$ 天然对应随机指派策略, 即将工作 i 以概率 x_{ij} 安排到机器 j 上. 如果各个工作之间采取独立随机策略, 那么机器 j 上随机完成时间期望值为 $\sum_i p_{ij}x_{ij}$, 协方差为

$$
\sqrt{\sum_i p_{ij}^2 x_{ij}(1-x_{ij})}\leqslant\sqrt{\sum_i p_{ij}^2 x_{ij}}.
$$

一个常见的思路是将工作时长的约束转换为线性或二次锥约束, 利用概率不等式保证约束 (如机器的最大工作时长) 被大概率满足. 常用概率不等式包括 Markov 不等式 (一般用来控制软约束的松弛倍数), Chebyshev 不等式 (一般用来转换为二次锥问题) 和 Hoeffding 不等式 (一般用来松弛成线性问题并保证大概率满足约束). 此外, 对于目标函数或单个关键约束, He 等 [316] 证明了随机变量在均值一侧的概率至少是

$$
\mathrm{P}(\xi\geqslant\mathrm{E}[\xi])\geqslant 1-\frac{1}{2\sqrt{3}+3}\frac{1}{\kappa_\xi+3},
$$

其中 κ_ξ 是随机变量 ξ 的峰度 (kurtosis), κ_ξ 对大部分分布是一个较小常数.

对于一些应用场景, 独立随机的算法设计无法很好地满足问题需求. 例如, 在组合指派问题中, 一组物品 J (假设每个物品只有一个) 需要被分配给一组参与者 N. 参与者 i 的满意程度 $V_i(S_i)$ 取决于其所得组合 S_i, 其只有得到足够多的产品时才会满意. 用 $x_{ji}=1$ (或 $x_{ji}=0$) 代表将物品 j 指派 (或

不指派) 给参与者 i, 在价值函数满足超模性质时, 问题可以建模并松弛成以下线性规划问题:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i\in N, S\subseteq 2^J} V_i(S)y_i(S) \\
\text{s.t.} \quad & x_{ji} \geqslant y_i(S), \quad \text{对所有的 } i\in N, \quad j\in S\subseteq 2^J, \\
& \sum_{i\in N} x_{ji} = 1, \quad \text{对所有的 } j\in J, \\
& x_{ji}\geqslant 0, \quad \text{对所有的 } i\in N, \quad j\in J.
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

在这类问题中需要强化一组随机事件同时发生的概率, 因此需要采用非独立随机算法. Kleinberg 和 Tardos [317] 利用线性规划最优解值的大小关系设计出随机算法, 算法中不同物品被随机安排到同一个参与者手中的概率高度强相关. Ge 等 [318] 通过将指派约束理解成单纯形中的一个点, 并且通过单纯形随机切割建立了几何随机算法. 此算法也可以理解成独立指数分布的投影变换, 因此对很多较为复杂的随机结构可以给出简单的理论分析. 几何随机算法和 Kleinberg 等的相关随机算法在绝大多数问题上逼近率一致.

此外, Ageev 和 Sviridenko [319] 设计了 Pipage Rounding 算法. 此算法针对一般性整数问题 $\max\{L(x)\mid x\in X\}$, 其中可行域 X 是整数集合, $L(x)$ 是定义在整数集合上的简单函数 (如线性函数). 然后, 算法在松弛可行域 X' 内寻找原目标函数 $L(x)$ 的松弛最优解 x^L, 然后从 x^L 出发逐步生成函数值更好并且整数分量个数严格多的连续可行解, 并保证某个 L 的凸 (或沿 d_x 方向凸) 的近似函数 F 的值的提升. 具体来说, 需要对任何非整数解 x 找到一个方向 d_x, 使得向 $x+td_x$ 正向及负向调整时均可找到一个比 x 整数分量严格多的 (松弛) 可行点. $F(x+td_x)$ 对 t 的凸性保证了这两个点中至少有一个点比 x 更好 (整数分量更多并且 F 的值不差). 算法只在 x^{ALG} 为整数解时停止, 并且 $F(x^{\mathrm{ALG}})\geqslant F(x^L)$. 由于 F 是 L 的近似函数, 我们保证了 x^{ALG} 是 L 函数的一个高质量的近似解. Pipage Rounding 算法在一般指派问题 [320]、带费用限制的最大覆盖 [321] 等诸多问题中取得了非常好的效果. 特别地, 在次模优化领域, 由于多重线性扩张函数是天然的逼近函数 F, 这个算法已经成为领域内的主流算法之一 (参见文献 [322,323]).

6.1.3　对偶填充算法

另一类算法是利用线性松弛问题及其对偶问题的结构, 从松弛问题的一组主问题初始整数 (不) 可行 - 对偶 (可行) 不可行解出发, 逐步构建一组主问题整数可行 - 对偶可行的解. 由弱对偶定理, 对偶可行解对应对偶目标值是原问题最优值的界, 因此只需要对比最终主问题整数可行解和对偶可行解之间的比例即可得到算法的近似比. 针对集合覆盖问题, Goemans 和 Williamson [324] 给出了基于对偶填充法的算法和基于互补松弛条件的分析思路. 集合覆盖问题的目标是寻找一组费用最小的集合覆盖所有的元素. 定义集合 S 的费用为 C_S, 决策变量 $x_S=1$ (或 $x_S=0$) 代表选取 (或不选取) 集合 S. 其整数规划可松弛为线性规划:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{S\subseteq\mathbb{S}} C_S x_S \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{S:i\in S} x_S \geqslant 1, \quad \text{对所有的元素 } i, \\
& x_S\geqslant 0, \qquad \text{对所有的 } S\subseteq\mathbb{S}.
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

其对偶问题为

$$\begin{aligned}
\max\ & \sum_{i\in N} y_i \\
\text{s.t.}\ & \sum_{i:i\in S} y_i \leqslant C_S, \quad \text{对所有的 } S\subseteq \mathbb{S}, \\
& y_i \geqslant 0, \qquad\qquad \text{对所有的元素 } i.
\end{aligned} \tag{6.7}$$

算法将集合 S 看作容量为 C_S 的池子, y 作为开关持续打开的时间, 并且如果打开元素 i 的开关, 则以匀速向所有包含 i 的池子 S 注水 (即 y_i 以同样的匀速增长). 从 $x=0$ 和 $y=0$ 开始, 首先打开所有的开关, 这时所有 y_i 都匀速增长. 当某个池子 S 的容量被注满后, 关闭所有 $i\in S$ 的开关, 并设 $x_S=1$. 当所有的开关都被关闭后, 算法停止. 算法保证了对偶解 y 的可行性. 进一步地, 线性规划的强对偶松弛条件中的主松弛条件被满足, 即 $x_S\neq 0$ 当且仅当 $\sum_{i:i\in S} y_i = C_S$. 注意到每个开关 i 必定是因为某个池子被注满而关闭, 所以, $\sum_{S:i\in S} x_S \geqslant 1$, 即这个元素 i 被某个被选取的集合覆盖. 进一步地, 对偶松弛条件不被满足, 但是有 $y_e\neq 0$, 则 $\sum_{S:i\in S} x_S \leqslant f_i \leqslant f$, 这里 f_i 是元素 i 的频度 (出现的集合次数), 而 $f=\max_i f_i$ 被定义为集合簇的频度. 根据如下定理, 此算法的近似比不超过 f:

定理 6.5 如果标准线性规划问题

$$\text{OPT} = \min\{c^{\mathrm{T}}x \mid Ax\geqslant b, x\geqslant 0\}$$

及其对偶问题

$$\text{OPT} = \max\{b^{\mathrm{T}}y \mid A^{\mathrm{T}}y\leqslant c, y\geqslant 0\}$$

存在一组可行解 (x,y) 同时满足如下条件:

(1) 主互补松弛条件. $x_j>0$ 当且仅当

$$c_j \leqslant \alpha\sum_{i=1}^{m} A_{ij}y_i;$$

(2) 对偶互补松弛条件. $y_i>0$ 当且仅当

$$\beta b_i \geqslant \sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j,$$

则 $\alpha\beta b^{\mathrm{T}}y \geqslant c^{\mathrm{T}}x$, 并且

$$c^{\mathrm{T}}x \leqslant \alpha\beta\text{OPT}, \quad b^{\mathrm{T}}y \geqslant \frac{1}{\alpha\beta}\text{OPT}.$$

对偶填充算法的近似比还可以利用所谓的参量揭示线性规划 (factor-revealing LP) 进行分析, 例如, Jain 等 [325, 326] 用此给出了选址问题的对偶填充算法的近似比上界. 此方法将问题的一些参量及算法中间生成变量设为待定参数, 将算法的规则和参数的关系转化为这些待定参数线性约束, 而近似比则被某个线性或分数线性目标函数所揭示. 因此, 最大近似比问题被转化为一个线性规划问题, 可以直接通过数值求解此线性规划问题得到问题近似比的上界. 参量揭示线性规划对于对偶填充算法和大量的类似算法都是非常行之有效的理论分析工具, 在多个领域内被广泛应用.

6.2 基于半正定松弛和锥松弛的组合优化算法

随着半正定规划等锥优化方法的发展, 大家开始尝试用这些非线性优化模型去松弛组合问题的整数模型. Goemans 和 Williamson [327] 首先利用半正定规划松弛大幅改进了尘封近半个世纪的最大割问题近似比. 类似方法被 Feige 和 Goemans [328] 等用来改进了最大满足问题 (Max-SAT) 和最大有向割问题的近似比.

假设无向图 $G=(V,E)$ 中的每条边 $(i,j)\in E$ 有非负权重 W_{ij}, 最大割问题目标是将图的顶点集合 V 分为两部分并最大化被分割的边的总权重. Goemans 和 Williamson [327] 采用 $x_i=1$ 或 $x_i=-1$, 表达顶点 i 被分割到的部分, 并建模成二次模型:

$$\begin{aligned} W_2 = \max & \sum_{(i,j)\in E} w_{ij}\frac{1-x_ix_j}{2} \\ \text{s.t. } & x_i^2=1, \text{ 对所有的 } i. \end{aligned} \tag{6.8}$$

然后他们将整数约束松弛成半正定规划问题:

$$\begin{aligned} W_2^{SD} = \max & \sum_{(i,j)\in E} w_{ij}\frac{1-X_{ij}}{2} \\ \text{s.t. } & X_{ii}=1, \quad \text{对所有的 } i, \\ & X \succeq 0. \end{aligned} \tag{6.9}$$

(6.9) 是凸的半正定规划问题, 可以求解出其最优解 X^*. 将半正定矩阵 X 看成随机变量的协方差矩阵, 生成整体随机变量 $\xi\sim N(0,X)$, 然后令 $x_i=\text{sign}(\xi_i)$. Goemans 和 Williamson [327] 证明了下面的定理:

定理 6.6 存在常数 α, 对于任意的边 $(i,j)\in E$, 此算法生成的解满足

$$\mathrm{E}\left(\frac{1-x_ix_j}{2}\right)=\frac{1}{\pi}\arccos(X_{ij})\geqslant\alpha\frac{1-X_{ij}}{2},$$

这里的常数取值大约为 $\alpha\simeq 0.878577$.

此近似比在 UGC (unique game conjecture) 猜想为真时是紧的. 此算法和结论存在一个直观的理解. 由于矩阵 X 是半正定矩阵, 因此存在实矩阵 U 使得 $X=U^{\mathrm{T}}U$. 定义矩阵 U 的第 i 列为 u_i, 由于 $u_i^{\mathrm{T}}u_i=X_{ii}=1$, 因此所有的 u_i 都是单位向量. 将 u_i 看成单位球上的向量, ξ_i 可以看成某 (球面上均匀分布) 随机方向 v 和 u_i 的内积, 而 x_i 是代表以方向 v 切割后被切割到的集合. 两个夹角为 $\theta_{ij}=\arccos(u_i\cdot u_j)=\arccos(X_{ij})$ 的向量被切割的概率为 $\frac{1}{\pi}\arccos(X_{ij})$.

最大割的一个推广为最大 K 割, 即如何将图切割成 K 份以最大化切割边的总权重. 对于最大 K 割问题, 可以采用 $K-1$ 维空间中以原点为中心的 K 个顶点的单纯形的顶点作为分割集合的表征, 得到松弛问题:

$$\begin{aligned} W_K^{SD} = \max & \sum_{(i,j)\in E} w_{ij}\frac{K-1}{K}(1-X_{ij}) \\ \text{s.t. } & X_{ii}=1, \quad \text{对所有的 } i, \\ & X_{ij}\geqslant -\frac{1}{k-1}, \quad \text{对所有的 } i \text{ 和 } j, \\ & X\succeq 0. \end{aligned} \tag{6.10}$$

也可以采用复数形式进行建模, 例如, $K=3$ 时顶点 j 被切割至集合 k 当且仅当 $z_i=\mathrm{e}^{\frac{k}{3}2\pi i}$. 两个顶点 i 和 j 如果被切割至同一集合, 则 $z_i\cdot z_j=1$; 否则 $\mathrm{Re}z_i=-\frac{1}{2}$. 因此, 问题可以建模成:

$$\begin{aligned} W_3=\max\ &\sum_{(i,j)\in E} W_{ij}\frac{2}{3}(1-\mathrm{Re}z_i\overline{z_j}) \\ \text{s.t.}\ \ & z_i\in\{1,\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi i},\mathrm{e}^{\frac{4}{3}\pi i}\},\quad \text{对所有的 } i. \end{aligned}\tag{6.11}$$

然后松弛成半正定规划问题:

$$\begin{aligned} W_3^{SD}=\max\ &\sum_{(i,j)\in E} w_{ij}\frac{2}{3}(1-\mathrm{Re}Z_{ij}) \\ \text{s.t.}\ \ & Z_{ii}=1,\quad \text{对所有的 } i, \\ & \mathrm{Re}Z_{ij}\geqslant -\frac{1}{2},\quad \text{对所有的 } i \text{ 和 } j, \\ & Z\succeq 0,\quad \text{即 } Z \text{ 是 Hermite 矩阵}. \end{aligned}\tag{6.12}$$

根据半正定矩阵 $\mathrm{Re}Z$ 可生成实数随机变量 $\xi\sim N(0,Z)$, 然后做随机切割 (投影至二维平面再均匀切割) [329], 即可得到 0.836 的近似比:

$$\mathrm{E}(1-z_i\overline{z_j})\geqslant 0.836008(1-Z_{ij}).$$

进一步地, 在最大等分割 (max-bisection) 和最大平衡割 (max-balanced-cut) 问题中, 对切割集合的大小存在一定平衡约束. 对这类问题, Frieze 和 Jerrum [330] 在约束中加上 $(e^{\mathrm{T}}x)^2\leqslant c$ 以控制切割集合大小, 对应在松弛问题中采用 $e^{\mathrm{T}}Xe\leqslant c^2$ 即可. 算法中首先从半正定矩阵解 X^* 生成一个权重较好的割, 然后通过随机调整 (或贪婪调整) 策略平衡切割集合的大小. 之后, Ye [331] 给出了分析平衡对近似比影响的关键步骤并将近似比改进到 0.699, Raghavendra 和 Tan [332] 利用添加线性割约束的技巧 (Lasserre lift-and-project system) 将近似比改进到 0.85, Austrin 等 [333] 进一步地将近似比改进到 0.8776. 此近似比在 UGC 猜想为真时是紧的.

近年来, 随着全正定和协正定优化方法的兴起, 研究者们开始尝试采用将整数模型转化 (松弛) 成此类模型求解, 并设计相应算法. 例如, Natarajan 等 [334] 将一类随机组合问题转化为全正定优化问题, Kong 等 [335] 利用协正定优化模型处理随机预约问题, 均取得了良好的效果.

6.3 次模优化及拟阵优化

在传统营销中, 不同的营销渠道会触达不同的顾客群体. 考虑营销渠道集合 S 所触达的顾客群体总人数, 记为函数 $F(S)$. 一个直观的观察是随着已投放广告数目的增长, 新的广告所能够触达的新顾客的人数越来越少. 在实践中, 大量的离散函数具有类似的差分单调减性质, 这类函数被称为次模函数. 类似于连续优化领域的凸函数, 分离性定理和对偶理论对离散定义域 (格点集合) 中的次模函数成立 (参见文献 [336]), 其 Lovász 扩张等价于凸扩张, 因此可以利用凸优化方法帮助求解此类目标函数的最小化问题. 此外, 其差分单调减性质又类似于凹函数的特性, 因此对于最大化问题往往可以利用此性质构造出高质量的近似最优算法. 在动态决策领域特别是库存管理领域, 往往可以递归证明价值函数满足类似于次模的离散凸性质, 并且以此为依据可以构造出高效的动态决策算法. Vondrák [337] 提供了利用离散凸性构建组合算法的综述, Topkis [338] 给出了大量的应用问题及次模优化理论在实践中的应用, Murota [336] 介绍了大量的离散凸函数性质及相应的理论基础. 接下来简短地介绍次模函数的基本性质及相关优化算法:

6.3.1 次模函数定义及基础性质

格点集 (约束集合): 对空间内的任意两个点 x 和 y, 定义 "或" 和 "与" 运算, 分别代表在空间每个维度取最大 (最小) 值:

$$(x \vee y)_i = \max\{x_i, y_i\}, \quad (x \wedge y)_i = \min\{x_i, y_i\}.$$

格点集定义为一个集合 X, 使得集合 X 内的 "或" 和 "与" 运算结果还在集合 X 内, 一般情形下只考虑格点集合内的离散凸优化问题. 整数点集合, 或者任意全序集合 (如一维集合) 显然都是格点集合. 关于格点集合有几个重要的事实: 一是格点集合的交或者 Cartesian 积还是格点集合, 二是任意紧的格点集合 X 都存在一个最大点 $\overline{x}$ 和一个最小点 $\underline{x}$, 三是集合 $\{(x,y) : ax - by \geqslant c\}$ 在 a 和 b 同号时是格点集合.

目标函数 (次模函数): 在格点集定义域 X 内, 次模函数定义为对任意 $x, y \in X$, 有

$$f(x) + f(y) \geqslant f(x \vee y) + f(x \wedge y).$$

也可以采用等价条件, 如果 $u, v \geqslant 0$, 并且 u 与 v 相互垂直, 那么

$$f(x+u) - f(x) \geqslant f(x+u+v) - f(x+v).$$

对二次函数而言, 次模性等价于 Hessian 矩阵 A 的非对角元素全部非正.

Lovász 扩张: 次模函数 $f(x) : \{0,1\}^N \to \mathbb{R}$ 的 Lovász 扩张将 $f^L(x) = \mathrm{E}_\xi f(\{i : x_i \geqslant \xi\})$ 函数从离散定义域 $\{0,1\}^N$ 拓展到连续定义域 $[0,1]^N$, 其中 ξ 为 $[0,1]$ 之间的均匀分布. 在离散定义域 $\{0,1\}^N$ 上, $f^L \equiv f$. 由于 Lovász 扩张的定义方式 (期望值), 其最小值和最大值一定可以在可行域 $[0,1]^N$ 的边界上取到. 一般最小化时采用 Lovász 扩张的这个性质, 即

$$\min\{f(x) \mid x \in \{0,1\}^N\} = \min\{f^L(x) \mid x \in [0,1]^N\}.$$

此外, 对任意的给定 $x \in [0,1]^N$, 其 Lovász 扩张只需要计算原函数在最多 $N+1$ 个集合上的取值 (按 x_i 的大小进行排序) 即可.

多重线性扩张: 次模函数 $f(x) : \{0,1\}^N \to \mathbb{R}$ 的多重线性扩张为

$$f^M(x) = \sum_{S \subseteq N} f(S) \prod_{i \in S} x_i \prod_{i \notin S} (1 - x_i),$$

此处每个 N 的子集合 S 对应整数特征变量 $\mathbb{1}_S$, 因此, 可以将函数 f 等价转换为集合函数 f. 这个函数在每个维度是线性的 (如果固定其他维度的变量). 由于多重线性扩张的定义方式 (期望值), 其最小值和最大值一定可以在可行域 $[0,1]^N$ 的边界上取到, 一般最大化时采用多重线性扩张的这个性质, 即

$$\max\{f^M(x) \mid x \in [0,1]^N\} = \max\{f(x) \mid x \in \{0,1\}^N\}.$$

对于次模函数, 有以下重要结论:

(1) (Lovász 扩张的凸性) 次模函数 $f(x) : \{0,1\}^N \to \mathbb{R}$ 的 Lovász 扩张是凸扩张 (在离散定义域 $\{0,1\}^N$ 上不超过 f 的最大凸函数).

(2) (分离性定理) 如果函数 f 和 g 是格点集合 $X = \{0,1\}^N$ 上的次模函数, 并且对任意 $x \in X$, 有 $f(x) \geqslant -g(x)$, 则存在仿射线性函数 $L(x)$ 使得对任意 $x \in X$, 有 $f(x) \geqslant L(x) \geqslant -g(x)$.

(3) (解的单调性) 如果函数 $f(x,t): S \to \mathbb{R}$ 是定义在格点集合 $S \subseteq X \times T$ 上的次模函数, 并且 X 和 T 都是格点集, 那么对于任意的给定 t, 最优解集合 $X^*(t) = \mathrm{argmin}\{f(x,t) : (x,t) \in S\}$ 是格点集合, 并且是关于 t 单调增的, 而且 $F(t) = \min\{f(x,t) : (x,t) \in S\}$ 是格点集合 $\{x : \exists (x,t) \in S\}$ 上的次模函数.

6.3.2 次模集合函数极小化和极大化

次模集合函数极小化: 对于次模集合函数 $f(x): \{0,1\}^N \to \mathbb{R}$, 由于其 Lovász 扩张 f^L 是 $[0,1]^N$ 上的凸函数, 因此可以求出其在 $[0,1]^N$ 上的最小值. 由 Lovász 扩张性质

$$\min\{f(x) \mid x \in \{0,1\}^N\} = \min\{f^L(x) \mid x \in [0,1]^N\},$$

此最小值就是原函数 f 在 $\{0,1\}^N$ 上的最小值. 值得注意的是, 函数 f^L 不可微, 但是由其定义在每个点都可以迅速给出具体的函数值及次梯度, 因此可以用经典的投影梯度法快速求解 f^L 的近似极小值. 求解精确的极小值及最优解则相对比较困难, Schrijver [339] 给出的精确算法需要 $O(n^5)$ 步迭代、$O(n^7)$ 次函数估值和 $O(n^8)$ 次四则运算 [340], 之后的 Iwata-Fleischeer-Fugishige 算法 [341] 改进到 $O(n^7 \ln n)$ 次函数估值及四则运算. Hochbaum [342] 进一步地确定如果可行域是 $\{0,1\}^N$ 的子格点集合, 则次模函数最小化问题存在强多项式时间算法.

次模集合函数极大化: 一个典型的问题是最大 K 覆盖 (max-K-cover) 问题, 给定全集 S 和一组集合 $\{S_1, \dots, S_N\}$, 寻找其中的 K 个使得所覆盖的元素个数最多. 采用 $x_i = 1$ 或 $x_i = 0$ 表达集合 S_i 被选取或不被选取, 则目标函数 $F: \{0,1\}^N \to \mathbb{R}$ 为集合族 A 所覆盖的元素个数 $F(A) = |\bigcup_{i \in A} S_i|$. 注意到 F 是秩函数 (归零化的单调次模函数). 对于秩函数最大化问题 $\max\{f(A) \mid |A| \leqslant K, A \subseteq N\}$, 逐步贪婪法 (逐步添加贡献最大的元素) 的近似比 (参见文献 [343]) 是 $1 - (1 - \frac{1}{K})^K \geqslant 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$. 除非 $P = NP$, 这个近似比 $1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$ 是紧的 (参见文献 [344]). 如果函数 F 是非负次模函数 (但是非单调), Buchbinder 等 [345] 设计的前向 - 后向双贪婪搜索算法可达到 $\frac{1}{2}$ 的近似比, 并且这个近似比是紧的 (参见文献 [346]). 更一般的问题是拟阵 (matroid) 约束下的次模最大化问题 $\max\{f(S) : S \in \mathbf{I}\}$. 拟阵 $\mathbf{I}$ 定义为全集合 N 的子集构成的集合族 (独立集), 需要满足如下条件: (1) 空集为独立集; (2) 独立集的子集为独立集; (3) 扩张性质 (独立集 A 比独立集 B 元素多, 则存在 A 中的一个元素, 将其添加至 B 得到更大的独立集). 当函数 f 是秩函数时, Vondrák [337] 首先用连续贪婪算法 (本质上是梯度法) 得到 f 的多重线性扩张函数 f^M 的一个 $1 - \frac{1}{\mathrm{e}} - \epsilon$ 近似最优解, 然后对 f^M 进行 Pipage Rounding 改进解的整数性从而得到同样的近似比. 很多组合问题都可以被转化为拟阵约束下的次模最大化问题. 例如, (次模) 资源配置最大化问题, 有 m 个玩家 (集合 P) 和 I 种资源 (假设每种一个, 资源集合记为 L). 玩家 i 得到资源集合 S_i 的收益函数 $W_i(S_i)$ 是秩函数. 目标是寻找社会收益 $\sum_{i=1}^m W_i(S_i)$ 最大化的资源分配方案. 其转化的主要技巧是对每个资源 j 做 m 个备份 (i,j), 将每种资源配置方案 $\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ 映射到集合 $M(S) = \bigcup_{i=1}^m \{(i,j) \mid j \in S_i\}$. 拟阵 $\mathbf{M}$ 的基础集为 $\mathbf{X} = P \times L$, 独立集为 $\mathbf{I} = \{S \subseteq \mathbf{X} \mid |S \cap \{P \times \{j\}\}| \leqslant 1, j \in L\}$. 类似地, 一般指派问题也可以用类似方法转化为拟阵约束下的秩函数最大化问题. 因此, 次模资源配置最大化问题和一般指派问题均存在 $1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$ 的近似比. 如果函数 F 满足 (γ, β)- 费用分配机制, 则资源配置最大化存在 $\frac{1-1/\mathrm{e}}{\beta\gamma}$ 近似比 (参见文献 [347]).

拓展: 虽然次模函数本身可以定义在一般的格点集合上, 但是在组合优化领域一般只适用于集合相关的组合问题 (定义域包含于 $\{0,1\}^N$). 在更广的整数格点集中需要更强的离散凸性, 如 $L^\natural$- 凸性. 集合 D 被称为 $L^\natural$- 凸当且仅当集合 $L(D) = \{(x,t) \mid x - te \in D, t \in \mathbb{Z}_+\}$ 是格点集合, 这里 e 是全 1 向

量. 定义在 $L^\natural$- 凸集合 D 上的函数 f 被称为 $L^\natural$- 凸函数当且仅当 $g(x,t)=f(x-te)$ 是 $L(D)$ 上的次模函数. 特别地, 当 $D=\mathbb{Z}^N$ 条件等价于

$$f(x)+f(y)\geqslant f\left(\left\lfloor\frac{x+y}{2}\right\rfloor\right)+f\left(\left\lceil\frac{x+y}{2}\right\rceil\right).$$

$L^\natural$- 凸函数 f 在 $L^\natural$- 凸集合 D 中的局部最小值一定是整体最小值. Lovász 扩张 f^L 等价于函数的凸扩张, 因此在整数 $L^\natural$- 凸集合 D 中的最小值一定等于在 D 的凸包中 Lovász 扩张 f^L 的最小值. 在动态规划模型

$$V_t(x,y)=\min\{F(x,y)+\alpha V_{t+1}(y)\mid(x,y)\in X\}$$

中, 如果函数 $F(x,y)$ 是 $L^\natural$- 凸函数, X 是 $L^\natural$- 凸集合, 则可以递归证明 $V_t(x)$ 是 $L^\natural$- 凸函数. 此性质在动态库存管理等多个应用领域起到了至关重要的作用.

此外, 一个需要特别提及的研究方向是 Onn [348] 关于组合凸规划的系列工作, 其一般形式考虑图的边集合 E 上的 d 维权重函数 W、边集合的子集族 S 和凸函数 $C:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$, 并考虑问题 $\max\{\sum_{e\in F}C(W(e))\mid F\subseteq S\}$. 他们证明了权重维度 d 较小的情形下, 拟阵约束下的组合凸规划问题均是强多项式时间可解的, 具体来说, 很多分割问题 (如向量分割问题)、聚类问题还有凸的二次指派问题等都是多项式时间可解的.

7 整数优化问题与算法

整数优化 (混合整数规划) 模型泛指优化问题中决策变量 (部分决策变量) 只能取整数值的优化问题. 整数型决策变量的引入大大提升了数学模型的建模能力, 它在经济、管理、交通和工程中有众多应用 (参见文献 [349–352]). 例如, 在决策问题中, 0-1 型整数变量可以描述是否采取某种决策, 一般的整数变量可以描述带有不可分割属性的决策变量. 在提升建模能力的同时, 整数变量的引入对优化问题的求解带来了新的挑战. 与连续凸优化问题不同, 即使结构非常简单的线性整数规划问题也可能是 NP 难的, 在理论上不存在对一般整数优化问题都有效的多项式时间求解算法. 因此, 求解整数优化问题的算法设计和求解效率与每种问题的特殊结构密切相关.

7.1 求解整数优化问题的一般算法

求解整数优化问题精确解的一般性算法框架主要包括穷举算法 (包括分支 - 定界算法和隐式穷举)、基于刻画可行区域凸包的算法 (包括各种割平面算法和凸化可行集算法) 和分解算法 (列生成、Lagrange 分解和 Benders 分解等). 除了上述基于数学规划的算法外, 还有一大类算法基于交换代数中的 Gröbner 基多项式来构造整数优化问题的求解算法 (如文献 [353]). 本小节只针对数学规划的方法做简要回顾.

穷举算法可以确保找到整数优化问题的全局最优点解. 由于穷举法的计算效率非常低, 在现实应用中更为切实可行的算法是被称作 “分支 - 定界” 的隐式穷举算法 (branch and bound algorithm). 分支 - 定界算法是求解任何整数优化问题精确解的一般算法框架 (参见文献 [351]). 它的主要思想是把优化问题的可行区域逐步分解为小的子集 (分支), 然后分别求解这些子集上经过松弛的子问题, 求解松弛问题提供了每个分支的上界或者下界. 算法通过比较不同分支的上界或者下界的大小来控制是否进一步对子集进行分割, 从而避免了穷举所有可行解, 以达到加速求解的效果. 用一个线性整数优化问题 $\min_x\{c^{\mathrm{T}}x\mid Ax\leqslant b,x\in\mathbb{Z}^n\}$ 来简要说明求解过程, 其中 $\mathbb{Z}^n$ 表示整数集合. 在此问题中, 忽略整数约束

后构成松弛问题 $\min_x\{c^{\mathrm{T}}x \mid Ax \leqslant b\}$. 任何情形下, 求解松弛问题总是构成了原问题的一个下界. 假设求解松弛问题后得到的实数解为 $x^0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$; 可以选择其中一个非整数变量 x_i^0 进行分支: 将原来的可行解区域分解为 $x_i \leqslant \lfloor x_i^0 \rfloor$ 和 $x_i \geqslant \lfloor x_i^0 \rfloor+1$, 其中 $\lfloor y \rfloor$ 表示小于等于 y 的最大整数. 算法分别对每个子问题再进行松弛问题的求解, 例如, 分支 $x_i \leqslant \lfloor x_i^0 \rfloor$ 对应的子问题为 $\{cx \mid Ax \leqslant b, x_i \leqslant \lfloor x_i^0 \rfloor\}$. 在对不同子问题的松弛问题的求解过程中, 如果恰好得到一个整数解 $\hat{x}$, 则这个可行解构成了原问题目标函数的上界 $c^{\mathrm{T}}\hat{x}$. 在其他分支松弛问题的求解过程中, 如果某个分支的松弛问题返回的最优解为 $\bar{x}$, 且目标函数满足 $c^{\mathrm{T}}\bar{x} > c^{\mathrm{T}}\hat{x}$, 那么这个分支就被停止了. 则这个过程也被成为 "剪枝". 通过剪枝过程可以有效地减少搜索的复杂度. 分支 - 定界算法只是一个框架性的算法, 其求解效率还取决于几个因素: (i) 每个子问题松弛问题产生下界 (上界) 的质量, 即逼近子问题真实解的质量. 松弛问题提供的下界或者上界的质量越高就越有可能尽早剪枝, 删除不必被探索的分支. (ii) 松弛问题求解的速度. 松弛问题的求解效率决定了算法在有限时间内可以探索分支 (节点) 的数量. 在求解松弛问题时, 往往还需要设计有效的 "热启动" 方法: 使用父节点的解的信息来加速子问题松弛问题的求解过程. 上述两点往往是矛盾的, 质量较高的松弛方法通常需要更长的计算时间. (iii) 选择需要分支的变量顺序和探索分支的顺序. 在算法完成剪枝后, 变量的分支顺序和探索分支的顺序对整体算法效率有很大影响. 常用的探索分支策略有深度优先搜索、广度优先搜索和下界优先搜索等方法. 专著 [349–351] 对分支 - 定界算法有比较全面的描述. Achterberg 等 [354] 对比了各种分支算法的特点, 并提出了可靠的分支的新方法. Morrison 等 [355] 较为全面地总结了分支 - 定界算法中分支策略及节点的探索策略和选择策略. Ostrowski 等 [356] 针对具有对称属性的混合整数线性优化问题提出了新的分支 - 定界算法并取得了较好的计算效果. 文献 [357] 介绍了商业级整数规划求解器在设计分支 - 定界算法中使用的各种加速方法.

刻画整数可行解集合形成的凸包是线性整数优化问题的另一大类算法. 其中, 割平面 (cutting plane method) 算法在求解某些线性整数规划问题中最为有效. 割平面算法的主要思想是, 在原问题中, 通过添加线性不等式约束, 使得松弛问题的最优解逼近整数解. 割平面也被称作有效不等式, 其本质是刻画由整数可行点组成的凸包. 例如, 考虑一个 0-1 规划问题的可行区域

$$\{x \in \{0,1\}^5 \mid 2x_1-5x_2+x_3-3x_4+x_5 \leqslant -3\}.$$

当 $x_2=0$ 和 $x_4=0$ 时, 这个不等式左边变为 $2x_1+x_3+x_5$. 由于右端为 -3, 显然, 在这种情形下不存在可行解, 因此可以加入不等式 $x_2+x_4 \geqslant 1$ 作为割平面 (有效不等式) 来保证 x_2 和 x_4 不同时取 0. 研究如何自动产生割平面的方法是整数规划研究的一个重要分支. 其中产生割平面最常用的方法是 Chvátal-Gomory (CG) 方法 (参见文献 [350]). 考虑一个整数集合 $\{x \in \mathbb{Z}_+^n \mid \sum_{i=1}^n a_ix_i=b\}$, 其中 $a_i \in \mathbb{R}$ 和 $b \in \mathbb{R}$ 都是实数. 使用 CG 方法可以得到有效不等式 $\sum_{i=1}^n \lfloor a_i \rfloor x_i \leqslant \lfloor b_i \rfloor$, 这个割平面被称作 Gomory 割平面. 结合原有约束 $\sum_{i=1}^n a_ix_i=b$, 可以得到不等式

$$\sum_{i=1}^n (a_i-\lfloor a_i \rfloor)x_i \geqslant b_i-\lfloor b_i \rfloor,$$

这个不等式也被称为 Gomory 分数割平面. 基于上述产生割平面的方法, Gomory 指出, 在松弛问题中不断加入 CG 割平面, 最终算法会收敛到整数解 (参见文献 [351]). 对于混合整数优化问题, 使用 CG 方法不一定能得到有效不等式. 因此需要考虑另一类被称作混合割平面 (mixed-integer rounding cut) 的方法. 使用二维空间作为例子, 考虑集合 $A=\{(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z} \mid y+x \geqslant b\}$ 和集合 $B=\{(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z} \mid y-x \leqslant b\}$. 如果 $f=b-\lfloor b \rfloor>0$, 则不等式 $x \geqslant f(\lceil b \rceil - y)$ 是集合 A 的有效不等式, 不等式

$y \leqslant \lfloor b \rfloor + \frac{x}{1-f}$ 是集合 B 的有效不等式. 上述构造混合割平面的方法可以推广到更一般的 n 维空间中 (参见文献 [351]). 现代割平面算法基于多面体和强有效不等式理论, Jünger 等 [358] 总结了可以使用割平面算法高效求解的混合整数规划模型. 割平面算法中加入其他的技巧可以大大提升该方法的效率 (如文献 [359]). 在现代求解整数优化方法中, 割平面一般结合到分支定界中使用, 被称作分支 - 割平面算法. 该算法最成功的应用之一是能有效求解旅行商问题 (traveling salesman problem). Grötschel 和 Holland [360] 总结了分支 - 割平面算法在求解旅行商问题中的各种应用. 在分支 - 割平面算法中, 比较常用的割平面还包括提升割平面 (lifting cut) 和析取割平面 (disjunctive cutting plane). 提升割平面构造的主要思想是, 在更高维度的空间来表示整数解集的凸包, 然后采用投影和线性化的方式构造割平面 (参见文献 [361]). 构造提升割平面的方法与在 0-1 优化问题中的多面体的锥表示有密切的关系 (参见文献 [362]). Gu 等 [363] 研究了构造序列提升割平面的方法. Chen 和 Dai [364] 研究了使用序列提升割平面在给定最小覆盖结构下的计算复杂度问题, 证明了该问题仍然是 NP 难的. Ceria 等 [365] 讨论了提升割平面在一般整数优化问题中的应用. 在实际使用该算法时, 子问题中加入了多个割平面不等式后问题的规模会变大, 有研究提出可以结合内点算法加快求解速度 (如文献 [366]). 在使用割平面时, 通常会产生多个备选的割平面, 如何选择合适的割平面与求解效率有密切关系. Dey 和 Molinaro [367] 比较了各种割平面算法针对不同问题的表现, 并讨论了选择割平面的方法和一些理论结果.

总体来看, 目前对线性 (混合线性) 整数优化的研究和应用已趋于成熟. 在理论方面, 利用现代格点 (lattice) 理论、群论和交换代数等工具已发展出比较深刻的结论. 其中比较有代表性的工作是 Lenstra [368] 提出的方法, 证明了维数固定的线性整数规划问题是多项式时间可求解的. 随着计算机性能的飞速提升, 整合了多种整数规划算法的通用求解器的求解性能有了飞速发展. 其中最著名的代表有 GUROBI、CPLEX 和 FICO XPRESS 等商用求解器. 以往在实际应用中无法在有效时间内求解的模型, 现在可以在合理时间内求解 (参见文献 [369] 对各种优化求解器的性能的对比). 与此同时, 不断涌现的新模型和实际应用的需求给求解大规模整数优化问题提出了新的挑战, 如超大规模的整数规划问题 (包括航空调度、电力调度) 和在线求解的需求 (参数在线变化, 在较短时间内求解; 模型中包含随机参数; 模型中包含众多非线性函数等). 这些需求和挑战为整数优化研究提供了新的领域和方向.

7.2 非线性整数优化

非线性整数优化问题是指目标函数或者约束包含非线性函数的整数优化问题. 非线性整数优化问题的研究主要由各种实际应用驱动, 在化工合成、分子结构设计、机械制造、工业生产计划、经济规模问题和生产制造等领域的诸多应用都可以用非线性整数优化形式建模和求解 (如文献 [352, 370]). 对这些问题的研究催生了基于 Lagrange 对偶理论的次梯度搜索算法、外逼近算法、广义 Bender 分解、非线性割平面算法和各种凸化算法的发展 (参见文献 [370–372]). 然而, 非线性整数优化理论的系统性和完整性及实际算法的有效性都与线性整数优化问题还有很大差距. 非线性整数优化问题的研究更依赖于问题本身的特殊结构, 针对不同的问题, 其求解算法也不同. 尽管分支 - 定界的算法框架仍然适用于非线性整数优化问题, 针对不同的问题构造松弛问题的算法也不同. 例如, 非凸整数优化问题的连续松弛问题仍然是一个连续非凸问题, 其本身就是一个难以求解的问题. 文献 [373] 对非线性整数优化问题做了系统回顾. 在理论层面, Hemmecke 等的综述文献 [374] 对非线性整数优化的基础理论做了系统梳理, 特别是对固定维数整数规划的计算复杂度做了系统分类. 文献 [375] 提出使用不动点映射迭代的方法求解整数优化问题, 开辟了研究的新思路. 文献 [352, 370] 系统介绍了求解非线性整数规划的各种算法和技巧. 20 世纪 90 年代, 锥优化理论和内点算法的发展给非线性规划的求解带来新的思路和

方法. 本小节主要回顾几类可以用凸锥优化技术构造求解的特殊的非线性优化问题.

决策变量是 0-1 型整数变量的二次优化问题是具有最简单结构的非线性整数优化问题, 它在许多领域有广泛应用 (参见文献 [352, 370]). 无约束的 0-1 二次优化问题可以表示为

$$(01\text{QP})\quad \min_{y}\{y^{\mathrm{T}}Qy \mid y\in\{0,1\}^n\},$$

其中 Q 是一个对称矩阵. 在许多应用中, 决策变量取值为 $\{-1,1\}$, 可以通过变换 $y_i=\frac{1}{2}(x_i+1)$, $x_i\in\{-1,1\}$, 将上述 0-1 二次型优化问题等价变换为

$$(\text{BQP})\quad \min_{x}\{x^{\mathrm{T}}Qx+c^{\mathrm{T}}x \mid x\in\{-1,1\}^n\},$$

其中 $c\in\mathbb{R}^n$. 尽管一般的 0-1 型二次优化问题是 NP 难的, 当矩阵 Q 具有特殊形式时, 该问题存在多项式时间复杂度的求解算法. 例如, 当 Q 的非主对角元都是非正实数, 或者当 Q 的秩是定值, 或者矩阵 Q 是三对角矩阵时, 对应的 0-1 无约束二次优化问题都可以被有效求解. Li 等 [376] 总结了可以多项式时间求解的 (BQP) 问题. 通常整数优化问题的最优性条件是难以刻画的, 但是针对问题 (BQP), Beck 和 Teboulle [377] 提出了刻画其最优解的充分必要条件. 对于一般的 0-1 二次优化问题, 学者们提出了求解精确解的多种方法, 包括基于代数的方法、线性化方法、割平面算法和分支定界算法等. 文献 [370, 378] 对这些方法做了详细总结. 在分支 - 定界算法框架中, 需要构造松弛问题以求解下界. 针对问题 (BQP), 半正定规划 (和二阶锥) 松弛为该问题提供了比连续松弛 (连续松弛是把 $x_i\in\{-1,1\}$ 放松为 $x_i\in[-1,1]$) 更紧的松弛方法 (参见文献 [362, 379, 380]). 问题 (BQP) 的半定规划松弛可以通过多种方式得到. 考虑齐次形式的 (BQP) 问题 (不失一般性, 可以忽略线性项), 将 $x_i\in\{-1,1\}$ 等价替换为 $x_i^2=1$, 问题 (BQP) 可以看成是一个带有二次型约束的二次优化问题. 该问题的凸化逼近 (也被称作 Shor 松弛), 可以由 Lagrange 对偶理论得到:

$$\max_{y\in\mathbb{R}^n}\{e^{\mathrm{T}}y \mid Q-\operatorname{diag}(y)\succeq 0, y\in\mathbb{R}^n\},$$

其中 $\operatorname{diag}(y)$ 表示对角元素为向量 y 的对角矩阵, e 表示全 1 向量. 上述半定规划形式的对偶问题是

$$\min_{X\in\mathbb{S}}\{X\bullet Q \mid X_{ii}=1, i=1,\dots,n; X\succeq 0\}.$$

如果令 $X=xx^{\mathrm{T}}$, 则其中 $x\in\{0,1\}^n$ 等价于 $X\succeq 0$, $X_{ii}=1$ 且 X 的秩为 1. 可以看出上述半定规划松弛是放松了秩为 1 的要求. 在组合优化部分已经提及 Goemans 和 Williamson [327] 使用上述半定规划松弛给出最大割问题 0.8756 的近似界. 因为最大割问题中, 边的权重都是非负数, 所以, 最大割问题比上述 (BQP) 问题更特殊. 对于一般性的 (BQP) 问题, Nesterov [381] 给出了 $\frac{2}{\pi}\approx 0.637$ 的近似界. 在实际应用半定规划方法中, 文献 [379] 研究了松弛问题和原问题对偶间隙的估计问题. Sun 等 [380] 提出通过胞元枚举 (cell enumeration) 的算法可以减小半定规划产生的对偶间隙, 从而提升由半定规划得到可行解的质量. 由于求解半定规划的代价较大, Kim 和 Kojima [382] 研究了使用二阶锥优化放松 (BQP) 问题的模型. 在求解精确解的算法设计上, Helmberg 和 Rendl [383] 以及 Rendl 等 [384] 使用 Bundle 方法求解半定规划松弛问题, 并结合分支 - 定界算法实现了求解大规模 (BQP) 问题的高速算法. 基于该算法的开源求解器 Big-Mac 是目前求解该类问题最有效的求解器.

值得一提的是 0-1 二次型优化问题可通过引入辅助变量将原问题等价变换为线性混合整数优化问题. 考虑上述 0-1 二次优化问题 (01QP), 引入辅助决策变量 $y_{ij}=y_iy_j$ $(i\neq j)$ 和 $y_{ii}=y_i^2=y_i$. 该问

题可以等价变换为

$$\begin{aligned}&\min_{y_{ij}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}Q_{ij}y_{ij}\\&\text{s.t. } y_{ij}\leqslant y_i,\quad y_{ij}\leqslant y_j,\quad y_i+y_j-1\leqslant y_{ij},\quad \forall\, i\neq j,\\&\quad\ 0\leqslant y_{ij}\leqslant 1,\quad y_i\in\{0,1\},\quad i=1,\dots,n.\end{aligned}$$

这种变换虽然去掉了非线性, 但是要引入 $O(n^2)$ 数量的辅助决策变量和 $O(n^2)$ 数量的约束. 因此在实际应用中, 该方法计算效率并不高. 文献 [385] 提出了一种全新型的线性化方法. 该方法只需要引入 $O(n)$ 数量的辅助决策变量和 $O(n)$ 数量的线性约束, 该方法被证明在求解 0-1 二次优化问题时有较好的鲁棒性.

针对 0-1 二次整数优化问题另一个有意义的研究是将此问题与协正优化建立了联系. Burer [386] 提出该问题可以等价地转换为一个基于协正锥的优化问题, 开拓了研究整数优化的新方向. 记协正锥为 $\mathcal{C}_n:=\{Q\in\mathbb{S}\mid x^{\mathrm{T}}Qx\geqslant 0,\forall\, x\in\mathbb{R}^n_+\}$. 考虑如下 0-1 整数优化问题:

$$\min_{x}\{x^{\mathrm{T}}Qx+2q^{\mathrm{T}}x\mid Ax=b,x\geqslant 0,x\in\{0,1\}^n\},$$

其中, $A=(a_1,a_2,\dots,a_m)$, $b=(b_1,\dots,b_m)$. Burer [386] 指出该问题的最优解等价于如下协正锥优化问题:

$$\min_{X}\left\{Q\bullet X+2q^{\mathrm{T}}x\,\middle|\,Ax=b,a_j^{\mathrm{T}}Xa_j=b_j,x_j=X_{jj},j=1,\dots,n,\begin{bmatrix}1 & x^{\mathrm{T}}\\ x & X\end{bmatrix}\in\mathcal{C}_n^*\right\},$$

其中, $\mathcal{C}_n^*$ 是协正锥 $\mathcal{C}_n$ 的对偶锥. 尽管协正锥优化是一个凸优化问题, 协正锥的表达形式没有改变求解原问题的难度, 但是新的表达形式为探索新的逼近方法提供了思路. 协正锥优化问题的难度主要来自于对协正锥的刻画. 一般情形 (矩阵维度大于 5) 下验证一个矩阵是否属于协正锥或者它的对偶锥是否属于全正锥是 NP- 完全的问题. 为了刻画协正锥, 文献 [387,388] 利用非负多项式的平方和松弛来构造协正锥的半定规划的层次逼近. 有关协正锥逼近的进一步工作还包括文献 [389]. 尽管有很多整数规划问题可以等价表示为协正锥优化问题, 但是对协正锥的优化的算法研究还处在发展阶段, Bomze [388] 总结了协正锥优化的进展.

带有半连续变量和基数约束的二次型优化问题是另一类在实践中有重要应用的模型. 半连续变量是指变量是否取非零值取决于一个 "阈值", 即决策变量 $x\in\mathbb{R}$ 满足 $x_i=0$ 或者 $l_i\leqslant x_i\leqslant u_i$, $0<l_i<u_i$. 基数约束是指决策向量 x 的非零元素的个数受到限制, 这类约束也被称作稀疏约束. 此类优化问题可以表述为

$$\min_{x}\{f(x)\mid x_i\in\{0\}\cup[l_i,u_i],i=1,\dots,n,\|x\|_0\leqslant K,x\in\mathcal{X}\},$$

其中 $x=(x_1,\dots,x_n)^{\mathrm{T}}$, $f(x)$ 是一个凸函数, $\|x\|_0$ 表示 x 的非零分量的个数, K 是小于 n 的整数, 表示自由变量的上限, $\mathcal{X}$ 表示 x 的可行域. 该模型描述了现实中带有 "启动费用" 的决策问题, 例如, 在投资组合管理中, 购买一定数量的风险资产需要固定交易费用 (参见文献 [390]). 在电力行业, 当发电机组启动时, 需要额外的能量和费用 (该问题称为单位费用 (unit commitment) 问题, 参见文献 [391]). 为求解全局最优解, 可以在该问题中引入 0-1 型整数变量 $z_i\in\{0,1\}$, $i=1,\dots,n$, 并将原有约束替换为 $-z_il_i\leqslant x_i\leqslant z_iu_i$, $\sum_{i=1}^{n}z_i\leqslant K$, 原问题等价地变为一个混合整数优化问题. 即使 $f(x)$ 是线性函数或者

凸二次函数, 此类问题也是 NP 难的优化问题. 采用连续松弛和分支 - 定界算法求解该混合整数优化问题的效率比较低 (参见文献 [390,392]). Frangioni 等[391] 提出使用透视松弛 (perspective relaxation) 的方法大幅提高松弛问题的逼近效果并在电力系统优化中得到成功应用. 文献 [393,394] 将该方法应用于不同问题, 数值实验表明加入透视松弛可以显著提升混合整数优化模型的求解效率. 当目标函数 $f(x)$ 为二次凸函数时, Bienstock[392] 提出了基于各种割平面算法的求解框架. 针对投资组合优化应用, 文献 [390] 利用凸二次函数的几何性质构造了有效的半定规划和二阶锥近似方法, 并将该方法结合到分支 - 定界算法中. 数值实验表明该方法在投资组合优化模型中求解效率优于商用整数优化求解器. 近期 Kim 等[395] 研究了带有基数约束的大规模线性优化问题, 并采用割平面算法求解给出了较为有效的算法. 带有半连续变量和基数约束的优化问题在工业生产中有较为广泛的应用 (如文献 [352]). 目前理论研究的求解方法主要针对形式比较简单的问题, 设计算法求解带有大量非线性约束和非连续变量的模型是此类模型应用需要解决的问题.

7.3 机器学习与整数优化

随着机器学习算法的广泛应用, 运筹与优化领域开始尝试借助机器学习算法提升整数优化模型求解效率 (参见文献 [396]). 机器学习对求解整数优化 (混合整数优化和组合优化) 的帮助主要分为两个方面: 一方面, 可以帮助启发式算法根据数据选择求解策略, 例如, 在分支 - 定界算法中可以帮助求解器选择最优分支变量; 另一方面, 使用强化学习策略等方法可以提升多阶段问题 (网络相关问题和背包问题等) 算法的有效性. 在求解整数优化问题的众多算法中, 分支 - 定界算法扮演了基础性算法框架的角色. 几乎所有的整数优化求解器都是基于此框架, 并加入割平面和分解算法等其他方法提升性能. 在前文中已经提及影响分支 - 定界算法效率的几个因素, 包括分支变量的顺序选择、松弛问题的选择 (cheap or tight bound) 和探索分支的顺序选择等. 这些选择有很强数据依赖的特性. 在现实应用中, 如果采用人工调整参数的方式其效率会非常低下. 近几年, 随着机器学习算法的不断成熟, 有学者将机器学习用于分支 - 定界算法中的各种策略的选择问题. Khalil 等[397] 利用决策树设计了一个使用机器学习算法学习分支的策略, 其表现超过商用求解器中的表现. Alvarez 等[398] 提出了基于机器学习的强分支逼近. 现代分支 - 割平面算法在迭代过程中要产生大量不同种类的割平面. 在算法中加入太多割平面虽然会提升寻找整数点的效率, 但同时也会降低单次求解的速度. 机器学习算法可以有效解决割平面的选择问题. Tang 等[399] 设计了一个深度强化学习框架, 用于智能地选择切割平面. 除了分支和割平面选择, 机器学习算法还可以对模型的近似结构进行选择. Bonami 等[400] 研究了在混合整数优化算法中有效选择是否将目标函数做线性化处理的问题. 他们将此问题转换为一个分类问题. 经过实际数据训练后, 其表现要优于目前最先进的商用求解器. Kruber 等[401] 使用相同的思想, 研究了各种分解算法的选择问题. 第二类使用机器学习算法的方式是将问题看作一个多阶段的决策问题, 从而采用强化学习来提升求解效率. 适用于这个框架的问题包括背包类型的问题 (knapsack-like) 或者是可以分解为多阶段决策的网络问题. 文献 [402] 受到了学界的广泛关注. 该文献结合强化学习和图嵌入方法来学习贪婪式启发式算法的构造, 以解决图上的多个优化问题. Li 等[403] 训练了一个图卷积网络以估计图的顶点出现在最优解中的可能性. 以上这些研究对模型拓扑结构稳定, 并且存有多次优化历史数据的模型表现出了较好的效果. 使用支持向量机 (supporting vector machine, SVM)、深度网络 (deep network) 或者强化学习 (reinforcement learning) 等方法对优化模型的历史求解数据加以学习, 从而训练出针对整数优化算法参数和策略的智能选择器. 面对新的问题, 智能选择器可以自动根据训练好的参数智能选择分支方式、松弛方式或者分解方式. 除了上述使用机器学习算法训练启发式算法策

略的研究外, 还有学者直接将在机器学习中常用的交替方向乘子法用于求解整数优化问题的局部解. 这些算法在一些有特殊结构的整数优化问题中表现出了较好的特性 (参见文献 [404, 405]). 将机器学习整合到整数优化算法中的研究还处在探索阶段, 目前文献报告的各种方法还有很大的探索空间. 另一方面, 由于机器学习算法大多是由数据驱动的, 研究这些数据驱动方式提升整数优化算法背后的理论也是值得关注的问题.

8 机制设计

机制设计是经济与管理研究中的一个重要研究领域. 其研究目的是设计出某个规则或系统, 使得分散的个体决策人的自由决策符合机制设计者的预期. 最早期的研究来自于经济学中市场机制理论, 在交换市场 (物 - 钱交换的 Fisher 市场, 以及物物交换的 Arrow-Debreu 市场) 中存在隐形的手 (市场价格调节机制) 引导市场中的个体交易者交易, 最终达成整体最优资源配置. 机制设计者希望在一般场景中达成类似效果, 通过政策/机制引导个体做出决策, 自动 (近似) 最大化系统的整体资源配置效率或系统利润, 甚至在决定最优配置核心参数是个体决策人不被分享的私密信息时依然如此. 机制需要满足的最重要的基本性质是激励相容 (incentive compatibility), 即个体会按照自身真实的偏好竞价, 不会为了获取更大利益故意扭曲需要揭示的相关信息. 根据买家可获得的信息完备度, 或决策的时间点 (ex-post or ex-ante), 激励相容分为占优激励相容 (dominant-strategy incentive-compatible, DSIC) 和 Bayes 激励相容 (Bayesian incentive-compatible, BIC) 两大类. 占优激励相容指的是报出自己的真实价值函数是占优策略, 即无论其他买家如何报价, 每个人都会报出自己的真实价值, 例如, 第二高价拍卖就是这样一个机制. Bayes 激励相容中一般买家不知道其他买家的价值函数, 但知道他们的一个先验分布并可以根据当前报价和先验分布对其他买家的价值函数进行 Bayes 推断. 如果任意一个买家在知道其他买家当前报价时愿意按自己的真实价值函数进行报价, 则机制被称为 Bayes 激励相容.

在很多研究中, 合理机制的设计以及给定机制的分析都依赖于将问题转化为优化模型. 一个通用技巧是采用参量揭示数学规划, 例如, 在拍卖中将价值函数 v 和竞价 b 作为下标, 将决策函数 $x(b,v)$ (价值为 v 时叫价 b 的概率) 作为参量. 针对这些无穷维线性规划问题, 强对偶条件往往依然成立. 任意可行解代表一个可行机制, 而任意对偶可行解均可给出策略的上界, 并由此分析机制的 (近似) 整体有效性.

8.1 拍卖中的机制设计

拍卖机制是机制设计研究最为丰富的子领域. 拍卖方的目标一般是最大化整体资源配置效率 (类似于政府机构) 或最大化拍卖方收益 (商业机构). 从最大化资源配置的角度, 单物品拍卖中第二高价拍卖是占优激励相容机制. 对一般的多物品组合拍卖, 最著名的经典理论是所谓的 Vickrey-Clarke-Groves (VCG) 拍卖机制 [406–408]. 此机制将个体决策者的外部性 (个体参与博弈对系统造成的影响) 作为奖惩函数, 以改变个体的行为, 从而有效地保证了个体利益与整体利益的一致性并确保了激励相容性. 虽然此机制是占优激励相容的, 但是机制的实施过于复杂, 计算困难. 特别是 VCG 机制不满足费用平衡性 (balanced budget), 在很多时候甚至需要拍卖方进行大幅补贴才可以实行, 因此在现实中存在一定的实现困难. Pekeč 和 Rothkopf [409] 对组合拍卖问题中需要考虑的各种问题提供了完整的综述.

从最大化拍卖人收益的角度, Myerson 在获诺贝尔经济学奖的最优拍卖机制设计理论 [410] 中, 提出了著名的揭示原则 (the revealing principle), 对任意拍卖机制都存在一个可行直接机制, 两者中拍卖

人与任意一个买家的期望收益都是一样的, 因此只需要分析较为简单的可行直接拍卖机制. 对于可行拍卖机制, 拍卖人决定的物品分配机制和买家的胜率是所有买家竞价向量 $b=(b_1,\ldots,b_n)$ 的可行空间上的概率函数 P, 而买家期望付款额和拍卖人期望收益是竞价向量 b 和赢家 i 的函数. 将价值 v 和竞价 b 看作指标, $P_i(v,b)$ 看作参量, 拍卖人和每个买家的期望收益都是参量 P 的线性函数, 因此可以用参量揭示线性规划, 将问题转化为一个无穷维线性规划问题. Myerson 由此构建了从买家叫价到真实价值的映射, 建立了单产品占优激励相容的最优拍卖机制. 如果买家分布是独立同正则 (单调损失率) 分布, 此机制等价于带保留价的第二高价竞拍. Vohra [411] 首先通过构建从买家叫价到真实价值的映射, 建立了单产品 Bayes 激励相容拍卖机制. 而多产品的激励相容机制非常复杂, 文献 [412] 对此项研究进行了较为完善的综述. Cai 等 [413–415] 利用优化模型及对偶理论给出了最优机制的数学刻画.

由于最优机制理论上很难计算与实现, 在大多数情形下只能寻找简单可行的机制. 文献 [416] 开始尝试寻找最优性与可行性直接的平衡, 并估算出可行策略与最优策略直接的收益损失. 此领域的综述可参见文献 [417]. 此外, 针对实践中的信息不完备性和不确定性, 研究中开始考虑鲁棒机制设计, 并逐渐成为领域中的一个研究热点. 例如, Carroll [418] 研究了相关性的鲁棒性, 此结果随后被 Gravin 和 Lu [419] 改进. Chen 等 [420] 证明了存在一个与分布无关的拍卖机制竞争比是 2.42, 达到此前的理论上界, 完全解决了这个十多年的研究课题. 文献 [421, 422] 研究了单物品拍卖的分布无关鲁棒问题. 相关综述可参见文献 [423].

8.2 交通及其他管理问题中的机制设计

在交通网络中, 交通参与者自由决策会造成系统通行效率的下降. Papadimitriou [424] 提出了用自由代价刻画均衡状态下系统效率的损失, Roughgarden [425] 之后建立了交通网络自由代价的上界 $\frac{4}{3}$. Papadimitriou 和 Valiant [426] 证明可以通过一个价格策略机制使得交通参与者自发选择系统最优策略. 更一般地, Sandholm [427] 指出所有的人口博弈都可以通过一个价格策略机制转化为一个所有参与者自发优化整体目标的势博弈 (potential game).

在其他管理领域, 文献 [428, 429] 研究了匹配问题中的机制设计, 文献 [430, 431] 研究了合同问题中的机制设计. 针对联合库存管理问题, He 等 [432] 发现虽然均分采购设置费用的机制理论上的效率上界 (自由代价和稳定代价) 很差 (分别是 $\sqrt{n}$ 和 $\sqrt{\ln n}$), 但理论反例中的参与者费用参数差距过大, 在实践中不可能发生. 大量的仿真研究和部分理论成果显示, 在较为实际的参数设置条件下, 机制的社会效益与整体最优相差无几 (误差经常不超过 1%).

9 优化方法在库存管理中的应用

库存管理是供应链解决方案中最重要的模块之一, 它在促进企业降本增效和供需匹配中发挥着关键作用. 自 20 世纪初至今, 优化方法在库存管理中得到了广泛的应用. 库存管理的优化模型可以追溯到 Harris [433] 在 1913 年提出的经济订货批量 (economic order quantity, EOQ) 模型, 并自 1950 年前后开始快速发展. 库存管理的基本问题是如何针对企业特定的业务场景, 决策每个商品是否需要补货、补货量多少, 来尽可能防止超储和缺货. 学界一般将该问题建模为最小化 (期望) 订货、存储和缺货等成本, 同时需满足相应业务约束的优化问题, 并通过分析和求解优化问题得出相应的库存管理策略. 本文将主要讨论需求不确定环境下的库存管理问题.

随机库存管理的最基本模型被称为报童模型, 由 Arrow 等 [434] 在 1951 年提出. 具体来说, 报童

模型考虑的是一个报童每天早晨要批发多少报纸来卖的问题. 如果他没有批发足够多的报纸, 一部分顾客就买不到报纸, 报童就会失去这部分销售所能带来的利润; 反之, 如果他批发了过多的报纸, 则一部分报纸将无法销售出去, 他只能自己为这部分报纸买单. 对于该问题, 可以建立如下的数学优化模型:

$$\min_{q\geqslant 0} cq + \mathrm{E}[h(q-D)^+ + p(D-q)^+],$$

其中 q 是进的报纸数量; D 是当天报纸的需求量, 是一个随机变量; c 是单位订货成本; h 是报纸的单位超储成本 (损失的进货成本); p 是单位缺货成本 (损失的利润); $x^+ = \max\{x, 0\}$. 在上述优化模型中, cq 是订货成本, 而如果订货量 q 超过需求量 D, 则超出的每单位商品产生 h 的超储成本; 反之如果需求量 D 超过订货量 q, 则每单位缺货产生 p 的缺货成本. 众所周知, 对于该问题, 如果随机需求的分布函数已知, 将其记为 $F(\cdot)$, 那么问题的最优解 Q^* 满足 $F(Q^*) = \frac{p-c}{h+p}$, 即最优订货量刚好使得需求满足率等于 $\frac{p-c}{p+h}$.

随机库存管理研究领域基本上以报童模型为基础, 针对实际中库存管理可能面临的各种业务场景, 发展出了各类优化模型. 接下来, 本节围绕下面几个方面介绍随机库存管理的一些研究工作:

(1) Markov 决策过程在库存管理中的应用. 这一类问题是随机库存管理领域最早研究的问题, 其核心科学问题是刻画和证明库存系统最优策略的结构性质.

(2) 库存系统的近似策略设计与优化.

(3) 鲁棒优化在库存管理中的应用.

(4) 在线学习与优化方法在库存管理中的应用.

9.1　MDP 在库存管理中的应用

在报童模型中, 一个隐含的假设是当天的报纸只在当天销售, 因此考虑的是单期的库存模型. 但是对于大部分商品而言, 其库存具有可存储性, 即当期没有销售出去的商品可以在下一期继续销售. 所以, 库存管理问题往往是动态的多周期决策问题, 要将一段时间的库存决策联合起来优化. 因此, MDP 一直是研究库存管理问题的重要方法. 要解决的核心科学问题是证明某种函数结构性质在 MDP 的迭代优化过程中可以被保留, 从而得出最优值函数 (optimal value function) 的某种结构性质, 进而刻画出最优订货策略的结构性质 (structural properties). 基于最优策略的结构性质, 库存策略的优化就转变为策略参数的优化, 这可以大大提高库存策略优化的效率.

Scarf 及其合作者在 1960 年发表的两篇论文是将 MDP 应用到库存管理问题中的开创性工作 (参见文献 [435, 436]). 它们在随机库存管理研究领域具有重要意义. Scarf [435] 研究的是有固定订货成本 (fixed order cost) 的多周期随机库存管理问题. 与报童问题相比, 该模型假设当期的库存在未来同样可售, 并且订货会产生一个与订货数量无关的固定成本, 如行政管理成本和运输过程中的处理费用等. 问题的具体描述是这样的: 考虑长度为 T 的库存计划周期. 第 t 期期初, 决策者根据当前的可用库存决定订货量 q_t, 假设 q_t 可以即时到货; 然后, 决策者观察到市场需求 (在期初订货之前, 它是随机变量, 记为 D_t), 并用现货库存尽量地满足市场需求; 如果需求不能被完全满足 (需求超过了可用库存), 则未被满足的需求将产生每单位 p 的缺货成本并等待后续的库存来满足 (backorder); 反之, 如果期末有剩余库存, 则它们将产生每单位 h 的持货成本. 决策者的目标是最小化系统 T 期的期望总成本:

$$\min_{q_1,\ldots,q_T\geqslant 0} \mathrm{E}\left[\sum_{t=1}^{T}[K1_{q_t>0} + cq_t + h(x_t+q_t-D_t)^+ + p(D_t-x_t-q_t)^+]\right]$$

$$\text{s.t. } x_{t+1} = x_t + q_t - D_t, \quad t = 1, \dots, T-1,$$

其中, K 为固定订货成本; $1_{q_t>0}$ 是指示函数: $q_t > 0$ 时其值为 1, 否则其值为 0; x_t 表示第 t 期期初的可用库存, 这里初始库存 x_1 是给定的, 对于 $t > 1$, x_t 需要满足优化模型约束中的动态方程; 其他参数和变量的定义与报童问题类似, 但要注意的是在上述优化目标中, x_t 和 D_t 都具有随机性.

接下来, 本文运用 MDP 的框架对上述优化问题进行建模. 定义最优值函数 $F_t(x)$ 为: 给定当前在第 t 期的初始库存为 x 的情形下, 从第 t 期到第 T 期的最小期望总成本, 它满足如下最优方程:

$$\begin{aligned} &F_t(x) = -cx + \min\left\{G_t(x), \min_{y>x}[K + G_t(y)]\right\}, \quad t = 1, \dots, T-1, \\ &F_T(x) = -cx, \end{aligned}$$

其中

$$G_t(y) = cy + \mathrm{E}[h(y-D)^+ + p(D-y)^+ + F_{t+1}(y-D)].$$

在上述模型中, 如果固定订货成本 $K = 0$, 那么对于任意的 $t = 1, \dots, T$, 最优值函数 $F_t(x)$ 是凸函数, 因为边界条件 $F_T(x)$ 是凸函数, 并且凸性在上面最优方程的迭代优化中可以一直被保留. 基于 $F_t(x)$ 的凸性, 可以证明对于任意周期 t, 都存在一个目标水平 S_t, 最优的订货策略就是, 如果期初可用库存低于 S_t, 则订货使得库存水平到达 S_t, 否则不订货. 该策略一般被称为基库存策略 (base-stock policy). 然而, 如果固定订货成本不为 0, 则可以证明最优值函数 $F_t(x)$ 不再是凸函数. 为了分析 $F_t(x)$ 的结构性质, Scarf [435] 定义了一种新的比凸函数更一般的函数概念—K 凸 (K-convex) 函数, 其中 $K > 0$ 是定义函数性质的一个参数. 特别地, 一个凸函数必然是 K 凸函数, 反之不然. 论文证明了 K 凸的性质在上述最优方程的迭代优化中可以被保留, 即对任意周期 t, 最优值函数 $F_t(x)$ 是 K 凸函数. 论文进而刻画出最优订货策略是一类 (s, S) 策略: 对于任意周期 t, 存在一个补货点 s_t 和目标库存水平 S_t, 当该期的初始可用库存低于补货点 s_t 时, 订货将库存水平提升至目标库存水平 S_t, 否则就不订货. (s, S) 策略也是业界应用最广泛的库存策略之一.

Clark 和 Scarf [436] 在 1960 年发表的另外一篇文献研究的是随机需求环境下多级链式库存系统 (multi-echelon serial inventory system) 的最优订货策略. 该文献考虑一个 N 级链式的库存系统: 最上级的仓库从系统外部的供应商补货, 中间的仓库从其上级仓库补货并满足其下级仓库的需求, 最下级的仓库则响应市场的随机需求. 仓库之间的运输需要一定的时间 (提前期), 商品在各个仓库中存储会产生相应的存储成本, 最下级仓库如果不能及时满足顾客的需求将产生相应的缺货成本. 问题的优化目标是确定系统每个仓库每个周期的最优订货量来最小化系统一段时间的期望总成本. 该文运用 MDP 对该问题进行建模, 定义了级库存水平 (echelon inventory position) 的概念, 从而对优化问题进行分解, 把一个高维的优化问题转化为一系列嵌套的一维优化问题来分析, 并最终证明了系统的最优补货策略是级 - 基库存策略 (echelon-base-stock policy). 值得一提的是, 该文献在 2004 年被 *Management Science* 评为创刊 50 周年以来的 10 大经典论文之一.

自 Scarf 的两篇文献之后, 很多学者开始将 MDP 应用到其他一些库存管理问题中. 例如, 文献 [437,438] 研究了双源补货 (dual-sourcing) 的库存问题, 证明了当两个渠道的补货提前期只差 1 周期时, 系统的最优策略是简单的由两个目标库存水平决定的基库存策略. 文献 [439–441] 研究了有固定生命周期的易腐生鲜品 (perishable products) 的库存管理问题. 由于不同订货批次库存的过期日不同, 相应 MDP 模型的状态变量是高维的, 因此, 文献只是部分地刻画了最优库存策略的结构性质. 文献 [442, 443] 考虑有批量订货 (batch ordering) 约束的多级随机库存管理问题, 刻画了系统的最优库存策略. 文

献 [444–448] 研究了库存与定价的联合决策问题. 在这类问题中, 需求不是完全外生给定, 而会受到决策变量价格影响. 基于 K 凹和对称 K 凹的函数结构性质, 这些研究刻画了最优策略的结构性质. 文献 [449] 研究了再制造库存问题的最优库存策略的结构性质. 针对一些相应 MDP 模型状态变量维度较高的库存问题, 文献 [450–453] 利用 $L^{\#}$- 凸和多模函数的概念刻画了最优订货量对不同维度状态变量的单调性和灵敏度. 文献 [454] 考虑其中的两类库存问题, 基于它们最优值函数是 $L^{\#}$- 凸的性质, 利用近似动态规划的方法给出了这两类库存问题的近似策略.

9.2 库存系统的近似策略设计与优化

一般来说, 能够清晰刻画出最优策略结构性质的库存问题都需要相应 MDP 模型的状态空间维度较低或者可以被降维. 而对于那些状态空间维度较高的问题, 清晰刻画其最优策略的结构性质是比较困难的. 一些经典的状态空间是高维 MDP 模型的库存问题包括: 有补货提前期 (positive lead time) 并且缺货丢失 (lost sales) 的库存问题, 其中补货提前期指订货与到货之间的时间间隔, 缺货丢失指当需求超过可用库存时, 超出的需求将丢失; 一般补货提前期下的双源补货库存问题; 一般生命周期下的易腐生鲜品的库存问题; 供应具有随机性 (随机产出、不确定产能约束) 的库存问题等. 由于动态规划的维数灾难 (curse of dimensionality) 问题, 计算这些问题的最优库存策略非常困难. 因此有很多学者致力于为这样一些高维状态空间且无法被降维的库存问题设计易于实施并且有效的近似策略. 这方面的研究成果是十分丰硕的. 接下来, 本文介绍两类近几年学界比较关注的近似策略. 第一类策略是平衡策略 (balancing policy), 第二类策略是常量订货策略 (constant ordering policy).

平衡策略最早由 Levi 等 [455] 在 2006 年提出, 考虑的是一个多周期缺货候补的库存问题. 特别地, 模型中的需求过程可以是一个预测过程 (如时间序列), 不需要假设不同周期的需求是独立同分布的. 平衡策略的设计主要基于一种新的边际成本的核算方法. 在以往的多周期库存管理的文献中, 成本都是以时间周期为单位来核算的: 计算每一周期的成本然后进行加总. 而文献 [455] 提出的边际成本核算方法以决策为核心, 将成本与造成该成本的决策联系起来. 具体而言, 对于任意一个周期, 给定当前的库存状态, 当期订货量对应的边际超储和缺货成本分别是它们在到货周期及之后周期可能产生的总持货成本的期望和到货周期的期望缺货成本. 平衡策略在每一周期都以刚好使得边际超储成本和缺货成本相等的订货量来进行补货, 这也是为什么该策略被称为平衡策略的原因. 这个策略的优势在于, 尽管模型的最优策略很难刻画和计算, 但可以从理论上证明该策略的绩效最差不会超过最优策略的 2 倍, 并且其计算简单. 由于平衡策略具有良好的通用性和绩效保证, 随后, 一些学者将平衡策略的思想应用到了其他一些库存问题中. Levi 等 [456] 将平衡策略应用到有补货提前期的缺货丢失的库存问题中. Levi 等 [457] 引入了一种强制缺货成本 (forced backlogging cost) 的概念, 将修正的平衡策略应用到了有容量约束的库存问题中. Levi 和 Shi [458] 将平衡策略应用到有固定订货成本的库存问题. Tao 和 Zhou [459] 将平衡策略应用到再制造的库存问题中. Levi 等 [460] 将平衡策略应用到多级链式的库存问题. Chao 等 [461] 研究易腐生鲜品的库存管理问题, 提出了两类比例平衡策略 (proportional-balancing policy), 并刻画了策略的最坏绩效保证. Chao 等 [462] 进一步将比例平衡策略应用到有补货提前期和订货容量约束的易腐生鲜品库存问题中.

常量订货策略是另一类近期在随机库存管理研究领域比较受关注的策略. 顾名思义, 常量订货策略指每一周期都订购相同数量的货物. 这一策略形式看起来非常简单, 但有意思的是它却被证明对于一些复杂的库存问题是渐近最优的. Goldberg 等 [463] 首先从理论上证明了常量订货策略对于有补货提前期且缺货丢失的库存问题, 随着补货提前期的增大是渐近最优的. 如前所述, 有补货提前期且缺货丢

失的库存问题是一个典型的最优库存策略, 依赖于高维状态变量且不易于计算的库存问题, 并且补货提前期越长, 问题的状态空间维度越高, 其最优策略越复杂. 但文献 [463] 的结果却表明, 当补货提前期很长时, 采用最简单的常量订货策略就可以达到几乎最优的效果. 更重要的是, Xin 和 Goldberg [464] 进一步证明了随着补货提前期的增加, 常量订货策略的绩效是以指数级的速度收敛到最优策略绩效的, 也就是说补货提前期不需要太长, 常量订货策略的绩效就可以接近最优了, 这大大增加了该策略在实际问题中的适用范围. Xin 和 Goldberg [465] 将类似的想法应用到一般提前期下的双源补货问题中, 考虑了一类 TBS (tailored base-surge) 策略: 对于提前期较长的货源, 采用常量订货策略; 对于提前期较短的货源, 采用基库存策略. 他们证明了该策略的绩效将随着两种货源的补货提前期的差的增加收敛到最优策略的绩效. Bu 等 [466] 将常量订货策略应用到了供应具有随机性的库存问题并证明了策略的渐近最优性.

9.3 鲁棒优化 (robust optimization) 在库存管理中的应用

在上述两类问题中, 未来的需求一般通过外生的随机变量或者随机过程刻画, 库存管理策略是在充分了解未来需求的随机分布下给出的. 然而, 对不确定性进行预测一直是供应链管理中的一个难点. 例如, 对于一个零售商来说, 其很大一部分商品都是所谓的长尾商品 (慢流品), 即那些零零星星在售的商品. 长尾商品的需求预测一直是困扰零售企业的难题. 对于那些预测准确性难以提高的商品, 或者那些很难用已知的随机分布来刻画其需求波动的商品, 一些学者将鲁棒优化的方法应用到其库存管理中. 相较于随机优化模型, 鲁棒优化的优势在于一般只在某个不确定集上考虑最差目标函数的最优解, 这往往可以大大提升模型的计算效率, 同时还能保证决策的稳健性.

Scarf [467] 研究了下面的鲁棒优化模型:

$$\min_{q\geqslant 0}\max_{F\in\Omega(\mu,\sigma)}\{cq+\mathrm{E}_F[h(q-D)^+ + p(D-q)^+]\},$$

其中,

$$\Omega(\mu,\sigma)=\{F:\mathrm{E}_F[D]=\mu,\ \mathrm{E}_F[D^2]=\mu^2+\sigma^2\}.$$

该模型假设已知需求分布的均值和方差, 决策的目标是最小化满足给定均值和方差的最差分布下的期望成本. 对于上面的优化问题, 他证明了给定任意的订货量 q, 最大化期望成本 (最差的) 需求分布刚好是一个两点分布, 进而得出了最优订货量的计算公式.

考虑到上述模型只针对最差分布进行优化, 它的解可能过于保守, Yue 等 [468] 考虑了最小化最大遗憾的决策模型; 刻画了给定任意订货量情形下, 需求分布信息的最大价值, 即给定需求分布一、二阶矩信息下最坏需求分布下的期望成本与已知需求分布的完全信息下的最小期望成本的差; 还给出了最小化最大需求分布信息价值的订货量的计算方法. Zhu 等 [469] 将最大 “遗憾” 定义为给定需求分布矩信息或者取值范围信息时最坏需求分布下的期望成本与已知需求分布完全信息下的最小期望成本的比, 并给出了最小化最大 “遗憾” 的订货量的计算公式. Delage 和 Ye [470] 将上述已知需求分布部分信息的鲁棒优化模型命名为分布鲁棒优化 (distributionally robust optimization) 模型, 并进一步在模型中考虑需求分布矩信息的不确定性. Han 等 [471] 将文献 [467] 的模型推广到了风险规避下的报童模型.

与上述分布鲁棒优化模型不同, 一般鲁棒优化模型考虑如何在模型参数的可能区间 (不确定集) 内保证可行性, 并最小化最差情形下的可能成本. 假设只知道不确定参数 θ 的取值范围, 鲁棒优化模型考虑如下优化问题:

$$\min_{x}\max_{\theta\in\Pi} f(x,\theta).$$

Bertsimas 和 Thiele [472] 建立了一个多周期库存控制问题的鲁棒优化模型, 证明了最优鲁棒策略类似于最优随机策略—基库存策略. 利用分解的技术, Bienstock 和 Özbay [473] 为更一般的不确定集下的优化模型提供了求解算法. Adida 和 Perakis [474] 研究了鲁棒的动态定价和库存控制问题. See 和 Sim [475] 考虑了一类基于因子的需求模型来刻画需求的时变趋势、季节性和周期性等, 并通过求解一个确定优化问题的二阶锥优化形式, 得到了补货策略的参数. Solyalı 等 [476] 为具有固定订货成本的库存问题建立了一种易于实施的新鲁棒公式, 指出在移动时间窗下的启发式方法比早先的鲁棒公式表现效果要好. Mamani 等 [477] 结合中心极限定理提出了一种特殊的不确定集—CLT (center limit theorem) 不确定集, 并将其应用到库存管理问题中, 考虑了静态和移动时间窗的单货源库存问题, 并给出了其闭式订货策略. Sun 和 Van Mieghem [478] 将他们的工作推广到具有非零提前期的双源补货的情形, 给出了具有更广参数范围的不确定集下的闭式鲁棒双货源策略.

9.4 在线优化 (online optimization) 在库存管理中的应用

在实际中, 当一个新品上市时, 由于缺乏历史销量数据, 它的需求分布往往是未知的, 因此需要通过不断地收集观测到的销量数据来不断地学习和更新需求分布. 在缺货顾客丢失的情形下, 一旦发生缺货, 销量与需求量是不等价的, 有一部分需求并没有在销量中体现, 因此, 观测到的销量数据实际上是截断的需求数据 (censored demand data). 一些学者将在线学习和优化的方法应用到了这样一些库存管理问题中. 他们要解决的核心科学问题是如何设计出一边学习需求分布、一边进行库存决策的算法, 使得算法的绩效随着问题规模 (或者决策周期) 的增加是渐近最优的.

Burnetas 和 Smith [479] 研究需求分布未知情形下的易腐产品的定价与补货问题, 零售商需要根据被截断的需求数据进行决策, 提出了一种自适应的联合定价和补货策略, 并证明了其平均利润以概率 1 收敛到已知需求分布情形下的最优值. Huh 和 Rusmevichientong [480] 研究需求分布未知情形下的缺货丢失和即时补货的库存管理问题. 零售商每一周期仅基于历史销售数据 (被截断的需求数据) 做出补货决策. 作者基于在线梯度下降算法提出非参数的自适应库存策略, 并证明了 T 周期平均期望成本与已知需求分布情形下的最低预期成本之间的渐近误差 (当 T 趋于无穷) 至多为 $O(1/T^{0.5})$. Besbes 和 Muharremoglu [481] 阐明了在连续需求情形下需求截断对于学习算法探索 - 发现权衡带来影响, 在离散需求情形下有着根本的不同, 而在后一种情形下, 主动探索扮演着更加重要的角色. Huh 等 [482] 利用统计学中的 Kaplan-Meier 估计量提出了一类新的非参数自适应库存管理策略. Shi 等 [483] 研究了库存容量受限的多产品库存管理问题, 并基于在线梯度下降方法提出了一种非参数学习算法. Zhang 等 [97] 为周期盘货的易腐品库存系统开发了一个非参数学习算法. 如前所述, 对于易腐品库存管理问题, 其最优策略不具有简单的结构, 因此作者致力于设计一个在线学习算法去逼近最优的基库存策略. Zhang 等 [96] 研究了有提前期的缺货丢失库存系统, 并提出了一种新的非参数算法, 称为模拟周期更新策略, 并证明了策略的渐近最优性.

10 优化方法在收益管理中的应用

除库存管理以外, 收益管理是运营管理领域中近些年来发展很快的一个分支. 收益管理主要研究企业销售中的策略, 目的是能够给正确的客户在正确的时间以正确的价格提供正确的商品, 最终达到给消费者提供最好的服务的同时给企业带来最大的收益. 随着信息技术的高速发展和数据的不断积累, 收益管理方向在实际中的价值越来越大, 应用也越来越广. 很多企业都希望利用收益管理的方法为其

增加更多效益. 优化方法在收益管理问题中起到核心的作用. 通常来说, 收益管理问题中会有一个基础模型来刻画消费者的购买行为, 然后决策者建立一个优化模型在考虑消费者行为方式的前提下选择决策来优化某一目标 (通常是企业的收入或者利润). 而在第二个步骤中, 通常会涉及优化的方法. 以下就将针对几个例子来说明优化在这一类问题中的应用.

10.1 动态资源分配和定价问题

收益管理中最经典的问题来源于航空公司的动态定价问题. 某种意义上, 这个问题的研究创造了收益管理这门学科 (参见文献 [484–486]). 在动态定价问题中, 航空公司把自己的机票分为几个不同的价格档次 (fare class). 顾客按照某种随机的方式到来, 航空公司根据剩余时间和剩余座位决定开启/关闭哪些价格档次, 从结果上看就是机票的动态定价. 早期对这个问题解决的方式跟库存管理问题类似—可以看作几个价格档次的库存问题, 最终通过随机优化的方式得到最优策略, 此类策略在很长一段时间内是处理此类问题的经典策略 (参见文献 [487, 488]).

在实际中, 消费者的到来是动态的、实时的, 并且资源也是高维的. 随着信息技术发展, 决策者希望能够更加动态地进行资源分配和定价. 因此, 学术界也产生了大量的基于动态分配问题的模型. 一种比较通用的刻画这类问题的形式如下.

假设一共有 m 种资源 (可以认为是 m 个航段), 每种资源 i 的总量为 C_i. 有 n 种客户, 每一种客户 j 都希望购买某一种资源的组合 A_j (A_j 为一个列向量, 代表第 j 类型客户所希望购买的资源组合), 并且愿意支付 p_j 的价格. 在每一个时刻 t, 客户 j 的到达概率为 q_j (还有 $1-\sum q_j$ 的概率没有客户到来), 决策者要决定在每一个时刻, 根据剩余的资源情形 $\boldsymbol{x}$, 决定如果一个第 j 类型客户到达, 是否接受这个客户 (也即是否能够对这种类型的需求开放对应价格的票). 如果用 $V_t(\boldsymbol{x})$ 表示在 t 时刻资源还剩余 $\boldsymbol{x}$ 的情形下决策者的期望收益, 用 $u_i(t,\boldsymbol{x})\in\{0,1\}$ 表示在 t 时刻资源还剩余 $\boldsymbol{x}$ 的情形下是否接受第 j 类型客户, 那么可以将这个问题写成一个动态规划的形式

$$V_t(\boldsymbol{x})=\max_{\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})\in U(\boldsymbol{x})}\left[\sum_{j=1}^{n}q_j(p_ju_j(t,\boldsymbol{x})+V_{t+1}(\boldsymbol{x}-A_ju_j(t,\boldsymbol{x})))+\left(1-\sum_{j=1}^{n}q_j\right)V_{t+1}(\boldsymbol{x})\right],$$

其中

$$U(\boldsymbol{x})=\{u:\ A_ju_j\leqslant\boldsymbol{x},\forall j\},$$

并且加以对应的边界条件.

这个动态规划问题维度较高, 直接求解通常会比较困难, 因此, 人们设计了大量的针对这一类问题的算法, 包括如下几种类型.

(1) 静态优化问题的近似: 一种解决以上问题的方法是考虑所谓的静态对应 (deterministic counterpart) 问题, 也即用其期望值来近似用户到达的不确定性, 并通过求解静态问题来获得一个对动态问题的策略, 包括给予每种类型需求一定配额, 或用资源的对偶价格来指导分配. 一些经典的用静态优化模型方法求解以上问题的研究参见文献 [66, 67, 489–491].

(2) 用近似动态规划求解. 静态近似的方法虽然简单, 但是解的质量有时候会不尽如人意. 为了更好地对原问题进行分析, 人们提出了用近似动态规划的方法求解. 在近似动态规划的方法中, 人们用一个带特定结构的函数 (如关于剩余资源和时间线性的函数) 来近似价值函数 V, 并用这个近似的价值函数来指导决策. 一些使用近似动态规划方法求解以上问题的研究参见文献 [492–494].

除了以上的基础问题以外, 人们也还考虑了很多此类问题的变化, 包括考虑消费者可以在多个航班之间做出选择 (参见文献 [494–496]), 还包括考虑当消费者需求不确定时的在线学习问题 (参见在线优化一节). 这一类问题的研究仍然在收益管理领域十分活跃.

10.2 在选择模型下定价和选品的优化问题

收益管理问题中建模的基础是对消费者的行为的刻画, 特别地, 当消费者面临多个商品 (且每个商品有不同特性) 时, 刻画其如何做选择是收益管理模型中核心的部分. 在此, 一种常用的方法是所谓的选择模型—选择模型的目的是刻画当消费者面临多种选择的时候最终选择每一个选项的概率. 从最广泛的角度来讲, 选择模型可以用以下的形式来表达:

$$q_i(p,S),$$

其中 p 表示所有商品的价格, S 表示给消费者选择的集合, $q_i(p,S)$ 表示消费者在此价格和商品集下选择商品 $i\in S$ 的概率. 例如, 在最经典的多态逻辑模型 (multi-nomial logit model, 简写为 MNL 模型, 参见文献 [497]) 中, $q_i(p,S)$ 的形式可以表达成

$$q_i(p,S)=\frac{\exp(a_i-b_ip_i)}{1+\sum_{j\in S}\exp\left(a_j-b_jp_j\right)},\quad \forall\, i\in S,$$

这里, 消费者还有

$$q_0(p,S)=\frac{1}{1+\sum_{j\in S}\exp(a_j-b_jp_j)}$$

的概率选择不购买任何商品 (或者看作选择了外界的商品). 在这一类模型下就会产生大量的优化有关的问题, 例如,

(1) 多品联合定价问题. 在多品联合定价问题中, 人们假设 S 为给定的 (也即提供的商品是给定的), 决策变量在于每个商品的价格, 最终的优化问题形式为

$$\max_p\sum_{i\in S}p_iq_i(p,S).$$

这类优化问题往往面临着目标函数关于决策变量是非凸的挑战, 根据不同的具体模型, 人们研究如何设计有效算法来解决这一类问题, 其中具体研究这一类问题的文献包括 [498–500] 等.

(2) 选品问题. 在选品问题中, 人们假设价格 p 为给定的 (也即商品的价格是给定的), 决策变量在于选择哪些商品提供给消费者, 最终的优化问题形式为

$$\max_S\sum_{i\in S}p_iq_i(p,S).$$

这类优化问题的决策空间是离散的, 并且是关于商品数量指数增长的. 因此, 人们研究的重点是对于不同模型, 最优解应具有什么样的结构 (例如, 是否只需要在更小的集合里寻找最优解), 以及有时寻找有近似保证的近似解. 具体研究这一类问题的文献包括 [11, 495, 501] 等.

(3) 联合定价和选品问题. 在这一类问题中, 人们同时决定提供的商品集合 S 及相对应的价格, 最终的优化问题形式为

$$\max_{p,S}\sum_{i\in S}p_iq_i(p,S).$$

研究这一类问题的文献包括 [498, 502] 等.

在以上问题的基础上, 文献中还有很多变化的研究, 包括考虑有约束的优化问题 (如文献 [498, 503]), 对应问题的鲁棒问题 (如文献 [504, 505]), 考虑动态的决策问题 (如文献 [506]), 等. 这些问题的解决也基本上依赖于优化算法的设计和求解.

除了以上描述的两个问题, 还有大量的收益管理问题与在线优化问题密切相关. 关于这一部分的内容在在线优化问题一节中有更详尽的讨论.

11 总结

本文对现代运筹学和优化理论的一些领域的背景知识和前沿理论做了尽可能多的介绍和阐述, 但还是有多个领域此次总结未能涉及, 例如, 优化理论中常见的随机规划, 应用中常见的经济与金融管理领域[507], 以及物流与交通领域, 特别是车辆调度、路线和网络规划等多个经典问题. 希望在未来的工作中可以有更多的概括和论述.

参考文献

1 Lee Y T, Sidford A. Path finding methods for linear programming: Solving linear programs in $\tilde{O}(\sqrt{\text{rank}})$ iterations and faster algorithms for maximum flow. In: Proceedings of the 55th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. Philadelphia: IEEE Computer Society, 2014, 424–433
2 Lee Y T, Sidford A. Efficient inverse maintenance and faster algorithms for linear programming. In: Proceedings of the 56th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. Berkeley: IEEE Computer Society, 2015, 230–249
3 Lamperski J, Freund R M, Todd M J. An oblivious ellipsoid algorithm for solving a system of (in)feasible linear inequalities. ArXiv:1910.03114, 2019
4 Lee I, Curry S, Serban N. Solving large batches of linear programs. INFORMS J Comput, 2019, 31: 302–317
5 Vu K, Poirion P L, Liberti L. Random projections for linear programming. Math Oper Res, 2018, 43: 1051–1071
6 de Farias D P, Van Roy B. On constraint sampling in the linear programming approach to approximate dynamic programming. Math Oper Res, 2004, 29: 462–478
7 Lakshminarayanan C, Bhatnagar S, Szepesvári C. A linearly relaxed approximate linear program for Markov decision processes. IEEE Trans Automat Control, 2018, 63: 1185–1191
8 Wang S, Shroff N. A new alternating direction method for linear programming. In: Advances in Neural Information Processing Systems 30. New York: Curran Associates, 2017, 1480–1488
9 Lin T, Ma S, Ye Y, et al. An ADMM-based interior-point method for large-scale linear programming. ArXiv:1805.12344, 2018
10 Yen I E H, Zhong K, Hsieh C J, et al. Sparse linear programming via primal and dual augmented coordinate descent. In: Advances in Neural Information Processing Systems 28. New York: Curran Associates, 2015, 2368–2376
11 Davis J M, Gallego G, Topaloglu H. Assortment optimization under variants of the nested logit model. Oper Res, 2014, 62: 250–273
12 d'Epenoux F. A probabilistic production and inventory problem. Manage Sci, 1963, 10: 98–108
13 De Ghellinck G. Les problèmes de décisions séquentielles. Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationelle, 1960, 2: 161–179
14 Manne A S. Linear programming and sequential decisions. Manage Sci, 1960, 6: 259–267
15 Kallenberg L C M. Linear Programming and Finite Markovian Control Problems. Mathematical Centre Tracts, vol. 148. Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1983
16 Altman E. Constrained Markov Decision Processes, vol. 7. Boca Raton: CRC Press, 1999
17 Melekopoglou M, Condon A. On the complexity of the policy improvement algorithm for Markov decision processes. ORSA J Comput, 1994, 6: 188–192
18 Leontief W. Input-Output Economics. Oxford: Oxford University Press, 1986

19 Ye Y. A new complexity result on solving the Markov decision problem. Math Oper Res, 2005, 30: 733–749
20 Mizuno S, Todd M J, Ye Y. On adaptive-step primal-dual interior-point algorithms for linear programming. Math Oper Res, 1993, 18: 964–981
21 Ye Y. The simplex and policy-iteration methods are strongly polynomial for the Markov decision problem with a fixed discount rate. Math Oper Res, 2011, 36: 593–603
22 Post I, Ye Y. The simplex method is strongly polynomial for deterministic Markov decision processes. Math Oper Res, 2015, 40: 859–868
23 Shapley L S. Stochastic games. Proc Natl Acad Sci USA, 1953, 39: 1095–1100
24 Tan M. Multi-agent reinforcement learning: Independent vs. cooperative agents. In: International Conference on Machine Learning. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 1993, 330–337
25 Goodfellow I, Pouget-Abadie J, Mirza M, et al. Generative adversarial nets. In: Advances in Neural Information Processing Systems 27. New York: Curran Associates, 2014, 2672–2680
26 Arjovsky M, Chintala S, Bottou L. Wasserstein GAN. ArXiv:1701.07875, 2017
27 Hansen T D, Miltersen P B, Zwick U. Strategy iteration is strongly polynomial for 2-player turn-based stochastic games with a constant discount factor. J ACM, 2013, 60: 1–16
28 Jurdziński M, Savani R. A simple P-matrix linear complementarity problem for discounted games. In: Logic and Theory of Algorithms. Berlin-Heidelberg: Springer, 2008, 283–293
29 Gärtner B, Rüst L. Simple stochastic games and P-matrix generalized linear complementarity problems. In: Fundamentals of Computation Theory. Berlin-Heidelberg: Springer, 2005, 209–220
30 Howard R A. Dynamic Programming and Markov Processes. Cambridge: The MIT Press, 1960
31 Scherrer B. Improved and generalized upper bounds on the complexity of policy iteration. In: Advances in Neural Information Processing Systems 26. New York: Curran Associates, 2013, 386–394
32 Schweitzer P J, Seidmann A. Generalized polynomial approximations in Markovian decision processes. J Math Anal Appl, 1985, 110: 568–582
33 de Farias D P, Van Roy B. The linear programming approach to approximate dynamic programming. Oper Res, 2003, 51: 850–865
34 Hauskrecht M, Kveton B. Linear program approximations for factored continuous-state Markov decision processes. In: Advances in Neural Information Processing Systems 16. New York: Curran Associates, 2003, 895–902
35 Veatch M H. Approximate linear programming for average cost MDPs. Math Oper Res, 2013, 38: 535–544
36 Powell W B. Approximate Dynamic Programming: Solving the Curses of Dimensionality, vol. 703. New York: John Wiley & Sons, 2007
37 Geramifard A, Walsh T J, Tellex S, et al. A tutorial on linear function approximators for dynamic programming and reinforcement learning. Found Trends Mach Learn, 2013, 6: 375–451
38 Petrik M, Zilberstein S. Constraint relaxation in approximate linear programs. In: Proceedings of the 26th Annual International Conference on Machine Learning. New York: Association for Computing Machinery, 2009, 809–816
39 Desai V V, Farias V F, Moallemi C C. Approximate dynamic programming via a smoothed linear program. Oper Res, 2012, 60: 655–674
40 Abbasi-Yadkori Y, Bartlett P, Malek A. Linear programming for large-scale Markov decision problems. In: Proceedings of the 31st International Conference on Machine Learning. Beijing: Proceedings of Machine Learning Research, 2014, 496–504
41 Abbasi-Yadkori Y, Bartlett P, Chen X, et al. Large-scale Markov decision problems with KL control cost and its application to crowdsourcing. In: Proceedings of the 32nd International Conference on Machine Learning. Lille: Proceedings of Machine Learning Research, 2015, 1053–1062
42 Lee I, Epelman M A, Romeijn H E, et al. Simplex algorithm for countable-state discounted Markov decision processes. Oper Res, 2017, 65: 1029–1042
43 Ghate A, Smith R L. A linear programming approach to nonstationary infinite-horizon Markov decision processes. Oper Res, 2013, 61: 413–425
44 Wang M. Randomized linear programming solves the Markov decision problem in nearly linear (sometimes sublinear) time. Math Oper Res, 2020, 45: 517–546
45 Gheshlaghi Azar M, Munos R, Kappen H J. Minimax PAC bounds on the sample complexity of reinforcement learning with a generative model. Mach Learn, 2013, 91: 325–349
46 Sidford A, Wang M, Wu X, et al. Near-optimal time and sample complexities for solving Markov decision processes

with a generative model. In: Advances in Neural Information Processing Systems 31. New York: Curran Associates, 2018, 5186–5196
47 何斯迈, 金羽佳, 王华, 等. 在线学习方法综述: 汤普森抽样和其他方法. 运筹学学报, 2017, 21: 84–102
48 Agrawal S, Wang Z, Ye Y. A dynamic near-optimal algorithm for online linear programming. Oper Res, 2014, 62: 876–890
49 Kesselheim T, Radke K, Tönnis A, et al. Primal beats dual on online packing LPs in the random-order model. SIAM J Comput, 2018, 47: 1939–1964
50 Kleinberg R. A multiple-choice secretary algorithm with applications to online auctions. In: Proceedings of the Sixteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. Vancouver: SIAM, 2005, 630–631
51 Babaioff M, Immorlica N, Kempe D, et al. Online auctions and generalized secretary problems. ACM SIGecom Exchanges, 2008, 7: 7
52 Goel G, Mehta A. Online budgeted matching in random input models with applications to Adwords. In: Proceedings of the Nineteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. Philadelphia: SIAM, 2008, 982–991
53 Devanur N R, Hayes T P. The Adwords problem: Online keyword matching with budgeted bidders under random permutations. In: Proceedings of the 10th ACM Conference on Electronic Commerce. New York: Association for Computing Machinery, 2009, 71–78
54 Feldman J, Mehta A, Mirrokni V, et al. Online stochastic matching: Beating $1-1/e$. In: Proceedings of the 50th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. Atlanta: IEEE Computer Society, 2009, 117–126
55 Bahmani B, Kapralov M. Improved bounds for online stochastic matching. In: Algorithms—ESA 2010. Berlin-Heidelberg: Springer, 2010, 170–181
56 Mahdian M, Yan Q. Online bipartite matching with random arrivals: An approach based on strongly factor-revealing LPs. In: Proceedings of the Forty-Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing. New York: Association for Computing Machinery, 2011, 597–606
57 Karande C, Mehta A, Tripathi P. Online bipartite matching with unknown distributions. In: Proceedings of the Forty-Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing. New York: Association for Computing Machinery, 2011, 587–596
58 Feldman J, Henzinger M, Korula N, et al. Online stochastic packing applied to display ad allocation. In: Algorithms—ESA 2010. Berlin-Heidelberg: Springer, 2010, 182–194
59 Gupta A, Molinaro M. How experts can solve LPs online. In: Algorithms—ESA 2014. Berlin-Heidelberg: Springer, 2014, 517–529
60 Agrawal S, Devanur N R. Fast algorithms for online stochastic convex programming. In: Proceedings of the Twenty-Sixth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. San Diego: SIAM, 2015, 1405–1424
61 Molinaro M, Ravi R. The geometry of online packing linear programs. Math Oper Res, 2013, 39: 46–59
62 Wang Z, Deng S, Ye Y. Close the gaps: A learning-while-doing algorithm for single-product revenue management problems. Oper Res, 2014, 62: 318–331
63 den Boer A V. Dynamic pricing and learning: Historical origins, current research, and new directions. Surv Oper Res Manage Sci, 2015, 20: 1–18
64 Cheung W C, Simchi-Levi D, Wang H. Technical note—dynamic pricing and demand learning with limited price experimentation. Oper Res, 2017, 65: 1722–1731
65 Agrawal S, Avadhanula V, Goyal V, et al. Thompson sampling for the MNL-bandit. ArXiv:1706.00977, 2017
66 Gallego G, van Ryzin G. A multiproduct dynamic pricing problem and its applications to network yield management. Oper Res, 1997, 45: 24–41
67 Talluri K, van Ryzin G. An analysis of bid-price controls for network revenue management. Manage Sci, 1998, 44: 1577–1593
68 Cooper W L. Asymptotic behavior of an allocation policy for revenue management. Oper Res, 2002, 50: 720–727
69 Reiman M I, Wang Q. An asymptotically optimal policy for a quantity-based network revenue management problem. Math Oper Res, 2008, 33: 257–282
70 Jasin S, Kumar S. A re-solving heuristic with bounded revenue loss for network revenue management with customer choice. Math Oper Res, 2012, 37: 313–345
71 Bumpensanti P, Wang H. A re-solving heuristic with uniformly bounded loss for network revenue management. ArXiv:1802.06192, 2018
72 Jasin S. Performance of an LP-based control for revenue management with unknown demand parameters. Oper Res,

2015, 63: 909–915
73 Li X, Ye Y. Online linear programming: Dual convergence, new algorithms, and regret bounds. ArXiv:1909.05499, 2019
74 Bruss F T. Sum the odds to one and stop. Ann Probab, 2000, 28: 1384–1391
75 Ferguson T S. Who solved the secretary problem? Statist Sci, 1989, 4: 282–289
76 Vanderbei R J. The optimal choice of a subset of a population. Math Oper Res, 1980, 5: 481–486
77 Girdhar Y, Dudek G. Optimal online data sampling or how to hire the best secretaries. In: Proceedings of the 2009 Canadian Conference on Computer and Robot Vision. Kelowna: IEEE Computer Society, 2009, 292–298
78 Arlotto A, Gurvich I. Uniformly bounded regret in the multisecretary problem. Stoch Syst, 2019, 9: 231–260
79 Arlotto A, Xie X. Logarithmic regret in the dynamic and stochastic knapsack problem. ArXiv:1809.02016, 2018
80 Stein C, Truong V A, Wang X. Advance service reservations with heterogeneous customers. Manage Sci, 2020, in press
81 Ma W, Simchi-Levi D, Zhao J. A competitive analysis of online knapsack problems with unit density. ArXiv:1907.08735, 2019
82 Devanur N R, Jain K, Sivan B, et al. Near optimal online algorithms and fast approximation algorithms for resource allocation problems. J ACM, 2019, 66: 1–41
83 Jiang B, Lin T, Ma S, et al. Structured nonconvex and nonsmooth optimization: Algorithms and iteration complexity analysis. Comput Optim Appl, 2019, 72: 115–157
84 Asadpour A, Wang X, Zhang J. Online resource allocation with limited flexibility. Manage Sci, 2020, 66: 642–666
85 Auer P, Cesa-Bianchi N, Fischer P. Finite-time analysis of the multiarmed bandit problem. Mach Learn, 2002, 47: 235–256
86 Lai T L, Robbins H. Asymptotically efficient adaptive allocation rules. Adv in Appl Math, 1985, 6: 4–22
87 Audibert J Y, Bubeck S. Minimax policies for adversarial and stochastic bandits. In: Proceedings of the 22nd Annual Conference on Learning Theory. Montreal: Proceedings of Machine Learning Research, 2009, 217–226
88 Agrawal R. Sample mean based index policies by $o(\log n)$ regret for the multi-armed bandit problem. Adv in Appl Probab, 1995, 27: 1054–1078
89 Thompson W R. On the likelihood that one unknown probability exceeds another in view of the evidence of two samples. Biometrika, 1933, 25: 285–294
90 Agrawal S, Goyal N. Analysis of Thompson sampling for the multi-armed bandit problem. In: Proceedings of the 25th Annual Conference on Learning Theory. Edinburgh: Proceedings of Machine Learning Research, 2012, 1–26
91 Badanidiyuru A, Langford J, Slivkins A. Resourceful contextual bandits. In: Proceedings of the 27th Conference on Learning Theory. Barcelona: Proceedings of Machine Learning Research, 2014, 1109–1134
92 Wu H, Srikant R, Liu X, et al. Algorithms with logarithmic or sublinear regret for constrained contextual bandits. In: Advances in Neural Information Processing Systems 28. New York: Curran Associates, 2015, 433–441
93 Auer P, Cesa-Bianchi N, Freund Y, et al. The nonstochastic multiarmed bandit problem. SIAM J Comput, 2002, 32: 48–77
94 Bubeck S. Introduction to online optimization. Http://sbubeck.com/BubeckLectureNotes.pdf, 2011
95 Jaillet P, Wagner M R. Online Optimization. International Series in Operations Research & Management Science. New York: Springer, 2009
96 Zhang H, Chao X, Shi C. Closing the gap: A learning algorithm for lost-sales inventory systems with lead times. Manage Sci, 2020, 66: 1962–1980
97 Zhang H, Chao X, Shi C. Technical note—perishable inventory systems: Convexity results for base-stock policies and learning algorithms under censored demand. Oper Res, 2018, 66: 1276–1286
98 Jaillet P, Lu X. Online stochastic matching: New algorithms with better bounds. Math Oper Res, 2014, 39: 624–646
99 Mehta A. Online matching and ad allocation. Found Trends Theoret Computer Sci, 2012, 8: 265–368
100 Ho C J, Vaughan J W. Online task assignment in crowdsourcing markets. In: Proceedings of the Twenty-Sixth AAAI Conference on Artificial Intelligence. Toronto: AAAI Press, 2012, 45–51
101 den Boer A, Keskin N B. Dynamic pricing with demand learning and reference effects. Available at SSRN 3092745, 2019
102 Cao P, Zhao N, Wu J. Dynamic pricing with Bayesian demand learning and reference price effect. European J Oper Res, 2019, 279: 540–556
103 Chen X, Krishnamurthy A, Wang Y. Robust dynamic assortment optimization in the presence of outlier customers.

ArXiv:1910.04183, 2019
104 Keskin N B, Zeevi A. Chasing demand: Learning and earning in a changing environment. Math Oper Res, 2016, 42: 277–307
105 Chen X A, Wang Z. A dynamic learning algorithm for online matching problems with concave returns. European J Oper Res, 2015, 247: 379–388
106 Kuhn H W, Tucker A W. Nonlinear programming. In: Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Berkeley-Los Angeles: University of California Press, 1951, 481–492
107 Akaike H. On a successive transformation of probability distribution and its application to the analysis of the optimum gradient method. Ann Inst Statist Math, 1959, 11: 1–16
108 Nesterov Y. A method of solving a convex programming problem with convergence rate $o(1/k^2)$. Soviet Math Dokl, 1983, 27: 372–376
109 Barzilai J, Borwein J M. Two-point step size gradient methods. IMA J Numer Anal, 1988, 8: 141–148
110 Dai Y H, Yuan Y. A nonlinear conjugate gradient method with a strong global convergence property. SIAM J Optim, 1999, 10: 177–182
111 Kantorovich L V. Functional analysis and applied mathematics. Uspekhi Mat Nauk, 1948, 3: 89–185
112 Broyden C G. The convergence of a class of double-rank minimization algorithms 1. General considerations. IMA J Appl Math, 1970, 6: 76–90
113 Fletcher R. A new approach to variable metric algorithms. Comput J, 1970, 13: 317–322
114 Goldfarb D. A family of variable-metric methods derived by variational means. Math Comp, 1970, 24: 23–26
115 Shanno D F. Conditioning of quasi-Newton methods for function minimization. Math Comp, 1970, 24: 647–656
116 Liu D C, Nocedal J. On the limited memory BFGS method for large scale optimization. Math Program, 1989, 45: 503–528
117 Nesterov Y, Polyak B T. Cubic regularization of Newton method and its global performance. Math Program, 2006, 108: 177–205
118 Cartis C, Gould N I M, Toint P L. Adaptive cubic regularisation methods for unconstrained optimization. Part I: Motivation, convergence and numerical results. Math Program, 2011, 127: 245–295
119 Cartis C, Gould N I M, Toint P L. Adaptive cubic regularisation methods for unconstrained optimization. Part II: Worst-case function- and derivative-evaluation complexity. Math Program, 2011, 130: 295–319
120 Nesterov Y. Accelerating the cubic regularization of Newton's method on convex problems. Math Program, 2008, 112: 159–181
121 Monteiro R D C, Svaiter B F. An accelerated hybrid proximal extragradient method for convex optimization and its implications to second-order methods. SIAM J Optim, 2013, 23: 1092–1125
122 Arjevani Y, Shamir O, Shiff R. Oracle complexity of second-order methods for smooth convex optimization. Math Program, 2019, 178: 327–360
123 Powell M J D. A new algorithm for unconstrained optimization. In: Nonlinear Programming. New York: Academic Press, 1970, 31–65
124 Rabinowitz P. Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations. Amsterdam: Gordon & Breach Science Publishers, 1970
125 Yuan Y X. Conditions for convergence of trust region algorithms for nonsmooth optimization. Math Program, 1985, 31: 220–228
126 Sorensen D C. Newton's method with a model trust region modification. SIAM J Numer Anal, 1982, 19: 409–426
127 Martínez J M. Local minimizers of quadratic functions on Euclidean balls and spheres. SIAM J Optim, 1994, 4: 159–176
128 Wang Z H, Yuan Y X. A subspace implementation of quasi-Newton trust region methods for unconstrained optimization. Numer Math, 2006, 104: 241–269
129 Baes M. Estimate sequence methods: Extensions and approximations. Technical Report. Zürich: ETH, 2009
130 Nesterov Y. Implementable tensor methods in unconstrained convex optimization. Math Program, 2019, 2: 1–27
131 Hu S, Li G. Convergence rate analysis for the higher order power method in best rank one approximations of tensors. Numer Math, 2018, 140: 993–1031
132 Gasnikov A, Kovalev D, Mohhamed A, et al. The global rate of convergence for optimal tensor methods in smooth convex optimization. ArXiv:1809.00382, 2018
133 Jiang B, Wang H, Zhang S. An optimal high-order tensor method for convex optimization. ArXiv:1812.06557, 2018

134 Bubeck S, Jiang Q, Lee Y T, et al. Near-optimal method for highly smooth convex optimization. In: Proceedings of the Thirty-Second Conference on Learning Theory. Phoenix: Proceedings of Machine Learning Research, 2019, 492–507

135 Birgin E G, Gardenghi J L, Martínez J M, et al. Worst-case evaluation complexity for unconstrained nonlinear optimization using high-order regularized models. Math Program, 2017, 163: 359–368

136 Cartis C, Gould N I M, Toint P L. Improved second-order evaluation complexity for unconstrained nonlinear optimization using high-order regularized models. ArXiv:1708.04044, 2017

137 Anandkumar A, Ge R. Efficient approaches for escaping higher order saddle points in non-convex optimization. In: Proceedings of the 29th Annual Conference on Learning Theory. New York: Proceedings of Machine Learning Research, 2016, 81–102

138 Cartis C, Gould N I M, Toint P L. Second-order optimality and beyond: Characterization and evaluation complexity in convexly constrained nonlinear optimization. Found Comput Math, 2018, 18: 1073–1107

139 Wilson R B. A simplicial algorithm for concave programming. PhD Thesis. Cambridge: Harvard University, 1963

140 Han S P. Superlinearly convergent variable metric algorithms for general nonlinear programming problems. Math Program, 1976, 11: 263–282

141 Powell M J D. A fast algorithm for nonlinearly constrained optimization calculations. In: Numerical Analysis. Berlin-Heidelberg: Springer, 1978, 144–157

142 Powell M J D. Algorithms for nonlinear constraints that use Lagrangian functions. Math Program, 1978, 14: 224–248

143 Powell M J D. The performance of two subroutines for constrained optimization on some difficult test problems. In: Numerical Optimization. Philadelphia: SIAM, 1984, 160–177

144 Fletcher R, Leyffer S. Nonlinear programming without a penalty function. Math Program, 2002, 91: 239–269

145 Gould N I M, Toint P L. Nonlinear programming without a penalty function or a filter. Math Program, 2010, 122: 155–196

146 Liu X, Yuan Y. A sequential quadratic programming method without a penalty function or a filter for nonlinear equality constrained optimization. SIAM J Optim, 2011, 21: 545–571

147 Hestenes M R. Multiplier and gradient methods. J Optim Theory Appl, 1969, 4: 303–320

148 Powell M J D. A method for nonlinear constraints in minimization problems. In: Optimization. London: Academic Press, 1969, 283–298

149 Glowinski R, Marroco A. Sur l'approximation, par éléments finis d'ordre un, et la résolution, par pénalisation-dualité d'une classe de problèmes de Dirichlet non linéaires. ESAIM Math Model Numer Anal Mod Math Anal Numér, 1975, 9: 41–76

150 Gabay D, Mercier B. A dual algorithm for the solution of nonlinear variational problems via finite element approximation. Comput Math Appl, 1976, 2: 17–40

151 Eckstein J, Bertsekas D P. On the Douglas-Rachford splitting method and the proximal point algorithm for maximal monotone operators. Math Program, 1992, 55: 293–318

152 Glowinski R, Le Tallec P. Augmented Lagrangian and Operator-Splitting Methods in Nonlinear Mechanics, vol. 9. Philadelphia: SIAM, 1989

153 He B, Yuan X. On the $O(1/n)$ convergence rate of the Douglas-Rachford alternating direction method. SIAM J Numer Anal, 2012, 50: 700–709

154 Monteiro R D C, Svaiter B F. Iteration-complexity of block-decomposition algorithms and the alternating direction method of multipliers. SIAM J Optim, 2013, 23: 475–507

155 Chen C, He B, Ye Y, et al. The direct extension of ADMM for multi-block convex minimization problems is not necessarily convergent. Math Program, 2016, 155: 57–79

156 Hong M, Luo Z Q, Razaviyayn M. Convergence analysis of alternating direction method of multipliers for a family of nonconvex problems. SIAM J Optim, 2016, 26: 337–364

157 Li G, Pong T K. Global convergence of splitting methods for nonconvex composite optimization. SIAM J Optim, 2015, 25: 2434–2460

158 Absil P A, Mahony R, Sepulchre R. Optimization Algorithms on Matrix Manifolds. Princeton: Princeton University Press, 2009

159 Wen Z, Yin W. A feasible method for optimization with orthogonality constraints. Math Program, 2013, 142: 397–434

160 Absil P A, Malick J. Projection-like retractions on matrix manifolds. SIAM J Optim, 2012, 22: 135–158

161 Hu J, Milzarek A, Wen Z, et al. Adaptive quadratically regularized Newton method for Riemannian optimization.

SIAM J Matrix Anal Appl, 2018, 39: 1181–1207
162 Chen S, Ma S, Man-Cho So A, et al. Proximal gradient method for nonsmooth optimization over the Stiefel manifold. SIAM J Optim, 2020, 30: 210–239
163 Liu Y, Shang F, Cheng J, et al. Accelerated first-order methods for geodesically convex optimization on Riemannian manifolds. In: Advances in Neural Information Processing Systems 30. New York: Curran Associates, 2017, 4868–4877
164 Zhang J, Ma S, Zhang S. Primal-dual optimization algorithms over Riemannian manifolds: An iteration complexity analysis. Math Program, 2019, doi: 10.1007/s10107-019-01418-8
165 Agarwal N, Boumal N, Bullins B, et al. Adaptive regularization with cubics on manifolds. Math Program, 2020, in press
166 Zhang J, Zhang S. A cubic regularized Newton's method over Riemannian manifolds. ArXiv:1805.05565, 2018
167 Hu J, Jiang B, Lin L, et al. Structured quasi-Newton methods for optimization with orthogonality constraints. SIAM J Sci Comput, 2019, 41: A2239–A2269
168 Reznick B. Some concrete aspects of Hilbert's 17th problem. Contemp Math, 2000, 253: 251–272
169 Lasserre J B. Global optimization with polynomials and the problem of moments. SIAM J Optim, 2001, 11: 796–817
170 Nie J, Demmel J, Sturmfels B. Minimizing polynomials via sum of squares over the gradient ideal. Math Program, 2006, 106: 587–606
171 Luo Z Q, Zhang S. A semidefinite relaxation scheme for multivariate quartic polynomial optimization with quadratic constraints. SIAM J Optim, 2010, 20: 1716–1736
172 He S, Li Z, Zhang S. Approximation algorithms for homogeneous polynomial optimization with quadratic constraints. Math Program, 2010, 125: 353–383
173 So A M C. Deterministic approximation algorithms for sphere constrained homogeneous polynomial optimization problems. Math Program, 2011, 129: 357–382
174 He S, Jiang B, Li Z, et al. Probability bounds for polynomial functions in random variables. Math Oper Res, 2014, 39: 889–907
175 Hitchcock F L. The expression of a tensor or a polyadic as a sum of products. J Math Phys, 1927, 6: 164–189
176 Tucker L R. Some mathematical notes on three-mode factor analysis. Psychometrika, 1966, 31: 279–311
177 Kolda T G, Bader B W. Tensor decompositions and applications. SIAM Rev, 2009, 51: 455–500
178 De Lathauwer L, De Moor B, Vandewalle J. On the best rank-1 and rank-$(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ approximation of higher-order tensors. SIAM J Matrix Anal Appl, 2000, 21: 1324–1342
179 Liu J, Musialski P, Wonka P, et al. Tensor completion for estimating missing values in visual data. IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell, 2013, 35: 208–220
180 Jiang B, Li Z, Zhang S. Characterizing real-valued multivariate complex polynomials and their symmetric tensor representations. SIAM J Matrix Anal Appl, 2016, 37: 381–408
181 Fu T, Jiang B, Li Z. On decompositions and approximations of conjugate partial-symmetric complex tensors. ArXiv:1802.09013, 2018
182 Zhou H, Li L, Zhu H. Tensor regression with applications in neuroimaging data analysis. J Amer Statist Assoc, 2013, 108: 540–552
183 Qi L. Eigenvalues of a real supersymmetric tensor. J Symbolic Comput, 2005, 40: 1302–1324
184 Lim L H. Singular values and eigenvalues of tensors: A variational approach. In: Proceedings of the 1st IEEE International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing, 2005. Puerto Vallarta: IEEE, 2005, 129–132
185 Qi L, Luo Z. Tensor Analysis: Spectral Theory and Special Tensors, vol. 151. Philadelphia: SIAM, 2017
186 Qi L, Chen H, Chen Y. Tensor Eigenvalues and Their Applications, vol. 39. Singapore: Springer, 2018
187 Rumelhart D E, Hinton G E, Williams R J. Learning representations by back-propagating errors. Nature, 1986, 323: 533–536
188 Platt J C. Fast training of support vector machines using sequential minimal optimization. In: Advances in Kernel Methods: Support Vector Learning. Cambridge: The MIT Press, 1999, 185–208
189 Chang C C, Lin C J. LIBSVM: A library for support vector machines. ACM Trans Intell Syst Technol, 2011, 2: 1–27
190 Pedregosa F, Varoquaux G, Gramfort A, et al. Scikit-learn: Machine learning in python. J Mach Learn Res, 2011, 12: 2825–2830
191 Paszke A, Gross S, Massa F, et al. Pytorch: An imperative style, high-performance deep learning library. In:

Advances in Neural Information Processing Systems 32. New York: Curran Associates, 2019, 8024–8035
192 Abadi M, Barham P, Chen J, et al. Tensorflow: A system for large-scale machine learning. In: Proceedings of the 12th USENIX Conference on Operating Systems Design and Implementation. Savannah: USENIX Association, 2016, 265–283
193 Bertsekas D P. Convex Optimization Algorithms. Belmont: Athena Scientific, 2015
194 Shalev-Shwartz S, Singer Y, Srebro N, et al. Pegasos: Primal estimated sub-gradient solver for SVM. Math Program, 2011, 127: 3–30
195 Le Cun Y, Bottou L. Large scale online learning. In: Advances in Neural Information Processing Systems 16. New York: Curran Associates, 2004, 217–224
196 Nedić A, Lee S. On stochastic subgradient mirror-descent algorithm with weighted averaging. SIAM J Optim, 2014, 24: 84–107
197 Davis D, Drusvyatskiy D, Kakade S, et al. Stochastic subgradient method converges on tame functions. Found Comput Math, 2020, 20: 119–154
198 Majewski S, Miasojedow B, Moulines E. Analysis of nonsmooth stochastic approximation: The differential inclusion approach. ArXiv:1805.01916, 2018
199 Ruszczyński A. Convergence of a stochastic subgradient method with averaging for nonsmooth nonconvex constrained optimization. Optim Lett, 2020, in press
200 Davis D, Grimmer B. Proximally guided stochastic subgradient method for nonsmooth, nonconvex problems. SIAM J Optim, 2019, 29: 1908–1930
201 Davis D, Drusvyatskiy D. Stochastic model-based minimization of weakly convex functions. SIAM J Optim, 2019, 29: 207–239
202 Nesterov Y. Lectures on Convex Optimization. Berlin: Springer, 2018
203 Nemirovski A, Yudin D B. Problem Complexity and Method Efficiency in Optimization. New York: John Wiley & Sons, 1983
204 Nesterov Y. Smooth minimization of non-smooth functions. Math Program, 2005, 103: 127–152
205 Beck A, Teboulle M. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems. SIAM J Imaging Sci, 2009, 2: 183–202
206 Nesterov Y. Gradient methods for minimizing composite functions. Math Program, 2013, 140: 125–161
207 Drori Y, Teboulle M. Performance of first-order methods for smooth convex minimization: A novel approach. Math Program, 2014, 145: 451–482
208 Bubeck S, Lee Y T, Singh M. A geometric alternative to Nesterov's accelerated gradient descent. ArXiv:1506.08187, 2015
209 Drusvyatskiy D, Fazel M, Roy S. An optimal first order method based on optimal quadratic averaging. SIAM J Optim, 2018, 28: 251–271
210 Fazlyab M, Ribeiro A, Morari M, et al. Analysis of optimization algorithms via integral quadratic constraints: Nonstrongly convex problems. SIAM J Optim, 2018, 28: 2654–2689
211 Wilson A C, Recht B, Jordan M I. A Lyapunov analysis of momentum methods in optimization. ArXiv:1611.02635, 2016
212 Su W, Boyd S, Candes E J. A differential equation for modeling Nesterov's accelerated gradient method: Theory and insights. J Mach Learn Res, 2016, 17: 5312–5354
213 Ghadimi S, Lan G. Stochastic first- and zeroth-order methods for nonconvex stochastic programming. SIAM J Optim, 2013, 23: 2341–2368
214 Li H, Lin Z. Accelerated proximal gradient methods for nonconvex programming. In: Advances in Neural Information Processing Systems 28. New York: Curran Associates, 2015, 379–387
215 Frank M, Wolfe P. An algorithm for quadratic programming. Naval Res Logist, 1956, 3: 95–110
216 Jaggi M. Revisiting Frank-Wolfe: Projection-free sparse convex optimization. In: Proceedings of the 30th International Conference on Machine Learning. Atlanta: Proceedings of Machine Learning Research, 2013, 427–435
217 Lan G, Zhou Y. Conditional gradient sliding for convex optimization. SIAM J Optim, 2016, 26: 1379–1409
218 Lacoste-Julien S, Jaggi M. On the global linear convergence of Frank-Wolfe optimization variants. In: Advances in Neural Information Processing Systems 28. New York: Curran Associates, 2015, 496–504
219 Lacoste-Julien S, Jaggi M, Schmidt M, et al. Block-coordinate Frank-Wolfe optimization for structural SVMs. In: Proceedings of the 30th International Conference on Machine Learning. Atlanta: Proceedings of Machine Learning

Research, 2013, 53–61
220 Bach F. Duality between subgradient and conditional gradient methods. SIAM J Optim, 2015, 25: 115–129
221 Hazan E, Kale S. Projection-free online learning. In: Proceedings of the 29th International Conference on Machine Learning. Edinburgh: Proceedings of Machine Learning Research, 2012, 1843–1850
222 Reddi S J, Sra S, Póczos B, et al. Stochastic Frank-Wolfe methods for nonconvex optimization. In: Proceedings of the 54th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing. Monticello: IEEE, 2016, 1244–1251
223 Shen Z, Fang C, Zhao P, et al. Complexities in projection-free stochastic non-convex minimization. In: Proceedings of the Twenty-Second International Conference on Artificial Intelligence and Statistics. Naha: Proceedings of Machine Learning Research, 2019, 2868–2876
224 Robbins H, Monro S. A stochastic approximation method. Ann Math Statist, 1951, 22: 400–407
225 Nemirovski A, Juditsky A, Lan G, et al. Robust stochastic approximation approach to stochastic programming. SIAM J Optim, 2009, 19: 1574–1609
226 Lan G. An optimal method for stochastic composite optimization. Math Program, 2012, 133: 365–397
227 Ghadimi S, Lan G. Optimal stochastic approximation algorithms for strongly convex stochastic composite optimization, II: Shrinking procedures and optimal algorithms. SIAM J Optim, 2013, 23: 2061–2089
228 Schmidt M, Le Roux N, Bach F. Minimizing finite sums with the stochastic average gradient. Math Program, 2017, 162: 83–112
229 Johnson R, Zhang T. Accelerating stochastic gradient descent using predictive variance reduction. In: Advances in Neural Information Processing Systems 26. New York: Curran Associates, 2013, 315–323
230 Lin H, Mairal J, Harchaoui Z. A universal catalyst for first-order optimization. In: Advances in Neural Information Processing Systems 28. New York: Curran Associates, 2015, 3384–3392
231 Allen-Zhu Z. Katyusha X: Simple momentum method for stochastic sum-of-nonconvex optimization. In: Proceedings of the 35th International Conference on Machine Learning. Stockholmsmässan: Proceedings of Machine Learning Research, 2018, 179–185
232 Lan G, Li Z, Zhou Y. A unified variance-reduced accelerated gradient method for convex optimization. In: Advances in Neural Information Processing Systems 32. New York: Curran Associates, 2019, 10462–10472
233 Allen-Zhu Z, Hazan E. Variance reduction for faster non-convex optimization. In: Proceedings of the 33rd International Conference on Machine Learning. New York: Proceedings of Machine Learning Research, 2016, 699–707
234 Reddi S J, Hefny A, Sra S, et al. Stochastic variance reduction for nonconvex optimization. In: Proceedings of the 33rd International Conference on Machine Learning. New York: Proceedings of Machine Learning Research, 2016, 314–323
235 Li Z. SSRGD: Simple stochastic recursive gradient descent for escaping saddle points. In: Advances in Neural Information Processing Systems 32. New York: Curran Associates, 2019, 1521–1531
236 Fang C, Li C J, Lin Z, et al. SPIDER: Near-optimal non-convex optimization via stochastic path-integrated differential estimator. In: Advances in Neural Information Processing Systems 31. New York: Curran Associates, 2018, 689–699
237 Zhou D, Xu P, Gu Q. Stochastic nested variance reduction for nonconvex optimization. In: Advances in Neural Information Processing Systems 31. New York: Curran Associates, 2018, 3921–3932
238 Friedman J, Hastie T, Tibshirani R. Sparse inverse covariance estimation with the graphical Lasso. Biostatistics, 2008, 9: 432–441
239 Friedman J, Hastie T, Tibshirani R. Regularization paths for generalized linear models via coordinate descent. J Statist Softw, 2010, 33: 1–22
240 Bertsekas D P. Nonlinear Programming. Belmont: Athena Scientific, 1999
241 Powell M J D. On search directions for minimization algorithms. Math Program, 1973, 4: 193–201
242 Luo Z Q, Tseng P. On the convergence of the coordinate descent method for convex differentiable minimization. J Optim Theory Appl, 1992, 72: 7–35
243 Nesterov Y. Efficiency of coordinate descent methods on huge-scale optimization problems. SIAM J Optim, 2012, 22: 341–362
244 Strohmer T, Vershynin R. A randomized Kaczmarz algorithm with exponential convergence. J Fourier Anal Appl, 2009, 15: 262–278
245 Richtárik P, Takáč M. Iteration complexity of randomized block-coordinate descent methods for minimizing a composite function. Math Program, 2014, 144: 1–38
246 Richtárik P, Takáč M. Parallel coordinate descent methods for big data optimization. Math Program, 2016, 156:

433–484
247 Hsieh C J, Chang K W, Lin C J, et al. A dual coordinate descent method for large-scale linear SVM. In: Proceedings of the 25th International Conference on Machine Learning. New York: Association for Computing Machinery, 2008, 408–415
248 Shalev-Shwartz S, Zhang T. Stochastic dual coordinate ascent methods for regularized loss minimization. J Mach Learn Res, 2013, 14: 567–599
249 Beck A, Tetruashvili L. On the convergence of block coordinate descent type methods. SIAM J Optim, 2013, 23: 2037–2060
250 Sun R, Ye Y. Worst-case complexity of cyclic coordinate descent: $O(n^2)$ gap with randomized version. Math Program, 2019, 151: 1–34
251 Lee Y T, Sidford A. Efficient accelerated coordinate descent methods and faster algorithms for solving linear systems. In: Proceedings of the 54th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. Berkeley: IEEE Computer Society, 2013, 147–156
252 Fercoq O, Richtárik P. Accelerated, parallel, and proximal coordinate descent. SIAM J Optim, 2015, 25: 1997–2023
253 Lin Q, Lu Z, Xiao L. An accelerated randomized proximal coordinate gradient method and its application to regularized empirical risk minimization. SIAM J Optim, 2015, 25: 2244–2273
254 Allen-Zhu Z, Qu Z, Richtárik P, et al. Even faster accelerated coordinate descent using non-uniform sampling. In: Proceedings of the 33rd International Conference on Machine Learning. New York: Proceedings of Machine Learning Research, 2016, 1110–1119
255 Qu Z, Richtárik P. Coordinate descent with arbitrary sampling I: Algorithms and complexity. Optim Methods Softw, 2016, 31: 829–857
256 Nesterov Y, Stich S U. Efficiency of the accelerated coordinate descent method on structured optimization problems. SIAM J Optim, 2017, 27: 110–123
257 Breheny P, Huang J. Coordinate descent algorithms for nonconvex penalized regression, with applications to biological feature selection. Ann Appl Stat, 2011, 5: 232–253
258 Xu Y, Yin W. A globally convergent algorithm for nonconvex optimization based on block coordinate update. J Sci Comput, 2017, 72: 700–734
259 Hong M, Razaviyayn M, Luo Z Q, et al. A unified algorithmic framework for block-structured optimization involving big data: With applications in machine learning and signal processing. IEEE Signal Processing Mag, 2015, 33: 57–77
260 Dang C D, Lan G. Stochastic block mirror descent methods for nonsmooth and stochastic optimization. SIAM J Optim, 2015, 25: 856–881
261 Patrascu A, Necoara I. Efficient random coordinate descent algorithms for large-scale structured nonconvex optimization. J Global Optim, 2015, 61: 19–46
262 Deng Q, Lan C. Efficiency of coordinate descent methods for structured nonconvex optimization. ArXiv:1909.00918, 2019
263 Bolte J, Sabach S, Teboulle M. Proximal alternating linearized minimization for nonconvex and nonsmooth problems. Math Program, 2014, 146: 459–494
264 Frostig R, Ge R, Kakade S, et al. Un-regularizing: Approximate proximal point and faster stochastic algorithms for empirical risk minimization. In: Proceedings of the 32nd International Conference on Machine Learning. Lille: Proceedings of Machine Learning Research, 2015, 2540–2548
265 Paquette C, Lin H, Drusvyatskiy D, et al. Catalyst for gradient-based nonconvex optimization. In: Proceedings of the Twenty-First International Conference on Artificial Intelligence and Statistics. Playa Blanca: Proceedings of Machine Learning Research, 2018, 613–622
266 Lan G, Yang Y. Accelerated stochastic algorithms for nonconvex finite-sum and multiblock optimization. SIAM J Optim, 2019, 29: 2753–2784
267 Kong W, Melo J G, Monteiro R D C. Complexity of a quadratic penalty accelerated inexact proximal point method for solving linearly constrained nonconvex composite programs. ArXiv:1802.03504, 2018
268 Lee J D, Sun Y, Saunders M A. Proximal Newton-type methods for minimizing composite functions. SIAM J Optim, 2014, 24: 1420–1443
269 Woodsend K, Gondzio J. Exploiting separability in large-scale linear support vector machine training. Comput Optim Appl, 2011, 49: 241–269
270 Pilanci M, Wainwright M J. Newton sketch: A near linear-time optimization algorithm with linear-quadratic conver-

gence. SIAM J Optim, 2017, 27: 205–245
271 Roosta-Khorasani F, Mahoney M W. Sub-sampled Newton methods. Math Program, 2019, 174: 293–326
272 Candès E J, Tao T. The power of convex relaxation: Near-optimal matrix completion. IEEE Trans Inform Theory, 2010, 56: 2053–2080
273 Candès E, Recht B. Exact matrix completion via convex optimization. Commun ACM, 2012, 55: 111–119
274 Cai J F, Candès E J, Shen Z. A singular value thresholding algorithm for matrix completion. SIAM J Optim, 2010, 20: 1956–1982
275 Toh K C, Yun S. An accelerated proximal gradient algorithm for nuclear norm regularized linear least squares problems. Pac J Optim, 2010, 6: 615–640
276 Jaggi M, Sulovsky M. A simple algorithm for nuclear norm regularized problems. In: Proceedings of the 27th International Conference on Machine Learning. Haifa: Proceedings of Machine Learning Research, 2010, 471–478
277 Yurtsever A, Udell M, Tropp J A, et al. Sketchy decisions: Convex low-rank matrix optimization with optimal storage. In: Proceedings of the Twentieth International Conference on Artificial Intelligence and Statistics. Fort Lauderdale: Proceedings of Machine Learning Research, 2017, 1188–1196
278 Jain P, Netrapalli P, Sanghavi S. Low-rank matrix completion using alternating minimization. In: Proceedings of the Forty-Fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing. New York: Association for Computing Machinery, 2013, 665–674
279 Netrapalli P, Niranjan U, Sanghavi S, et al. Non-convex robust PCA. In: Advances in Neural Information Processing Systems 27. New York: Curran Associates, 2014, 1107–1115
280 Li X, Ling S, Strohmer T, et al. Rapid, robust, and reliable blind deconvolution via nonconvex optimization. Appl Comput Harmon Anal, 2019, 47: 893–934
281 Candès E J, Li X, Soltanolkotabi M. Phase retrieval via Wirtinger flow: Theory and algorithms. IEEE Trans Inform Theory, 2015, 61: 1985–2007
282 Sun J, Qu Q, Wright J. A geometric analysis of phase retrieval. Found Comput Math, 2018, 18: 1131–1198
283 Ge R, Lee J D, Ma T. Matrix completion has no spurious local minimum. In: Advances in Neural Information Processing Systems 29. New York: Curran Associates, 2016, 2973–2981
284 Ge R, Jin C, Zheng Y. No spurious local minima in nonconvex low rank problems: A unified geometric analysis. In: Proceedings of the 34th International Conference on Machine Learning. Sydney: Proceedings of Machine Learning Research, 2017, 1233–1242
285 Chi Y, Lu Y M, Chen Y. Nonconvex optimization meets low-rank matrix factorization: An overview. IEEE Trans Signal Process, 2019, 67: 5239–5269
286 Lee J D, Panageas I, Piliouras G, et al. First-order methods almost always avoid strict saddle points. Math Program, 2019, 176: 311–337
287 O'Neill M, Wright S J. Behavior of accelerated gradient methods near critical points of nonconvex functions. Math Program, 2019, 176: 403–427
288 Du S S, Jin C, Lee J D, et al. Gradient descent can take exponential time to escape saddle points. In: Advances in Neural Information Processing Systems 30. New York: Curran Associates, 2017, 1067–1077
289 Jin C, Netrapalli P, Jordan M I. Accelerated gradient descent escapes saddle points faster than gradient descent. In: Proceedings of the 31st International Conference on Learning Theory. Stockholm: Proceedings of Machine Learning Research, 2018, 1042–1085
290 Jin C, Ge R, Netrapalli P, et al. How to escape saddle points efficiently. In: Proceedings of the 34th International Conference on Machine Learning. Sydney: Proceedings of Machine Learning Research, 2017, 1724–1732
291 Agarwal N, Allen-Zhu Z, Bullins B, et al. Finding approximate local minima faster than gradient descent. In: Proceedings of the 49th Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing. New York: Association for Computing Machinery, 2017, 1195–1199
292 Carmon Y, Duchi J C, Hinder O, et al. Accelerated methods for nonconvex optimization. SIAM J Optim, 2018, 28: 1751–1772
293 Hinton G E. Learning multiple layers of representation. Trends Cognitive Sci, 2007, 11: 428–434
294 Sutskever I, Martens J, Dahl G, et al. On the importance of initialization and momentum in deep learning. In: Proceedings of the 30th International Conference on Machine Learning. Atlanta: Proceedings of Machine Learning Research, 2013, 1139–1147
295 Duchi J C, Hazan E, Singer Y. Adaptive subgradient methods for online learning and stochastic optimization. J

Mach Learn Res, 2011, 12: 2121–2159
296 Kingma D P, Ba J. Adam: A method for stochastic optimization. ArXiv:1412.6980v9, 2015
297 Dozat T. Incorporating Nesterov momentum into Adam. Http://openreview.net/pdf?id=OM0jvwB8jIp57ZJjtNEZ, 2016
298 Zeiler M D. ADADELTA: An adaptive learning rate method. ArXiv:1212.5701, 2012
299 Reddi S J, Kale S, Kumar S. On the convergence of Adam and beyond. ArXiv:1904.09237, 2019
300 Wilson A C, Roelofs R, Stern M, et al. The marginal value of adaptive gradient methods in machine learning. In: Advances in Neural Information Processing Systems 30. New York: Curran Associates, 2017, 4151–4161
301 Zhang J, Karimireddy S P, Veit A, et al. Why Adam beats SGD for attention models. ArXiv:1912.03194, 2019
302 Zou F, Shen L, Jie Z, et al. A sufficient condition for convergences of Adam and RMSProp. In: Proceedings of the 2019 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Long Beach: IEEE, 2019, 11119–11127
303 Sivaprasad P T, Mai F, Vogels T, et al. On the tunability of optimizers in deep learning. ArXiv:1910.11758, 2019
304 Choi D, Shallue C J, Nado Z, et al. On empirical comparisons of optimizers for deep learning. ArXiv:1910.05446, 2019
305 Lau T T K, Zeng J, Wu B, et al. A proximal block coordinate descent algorithm for deep neural network training. ArXiv:1803.09082, 2018
306 Berrada L, Zisserman A, Kumar M P. Deep Frank-Wolfe for neural network optimization. ArXiv:1811.07591, 2018
307 Kawaguchi K. Deep learning without poor local minima. In: Advances in Neural Information Processing Systems 29. New York: Curran Associates, 2016, 586–594
308 Allen-Zhu Z, Li Y, Song Z. A convergence theory for deep learning via over-parameterization. In: Proceedings of the 36th International Conference on Machine Learning. Long Beach: Proceedings of Machine Learning Research, 2019, 242–252
309 Du S S, Lee J D, Li H, et al. Gradient descent finds global minima of deep neural networks. ArXiv:1811.03804, 2018
310 Sun R. Optimization for deep learning: Theory and algorithms. ArXiv:1912.08957, 2019
311 Vazirani V. Approximation Algorithms. Berlin-Heidelberg: Springer, 2001
312 Schrijver A. Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency. Berlin-Heidelberg: Springer, 2003
313 Lenstra J K, Shmoys D B, Tardos É. Approximation algorithms for scheduling unrelated parallel machines. Math Program, 1990, 46: 259–271
314 Yannakakis M. On the approximation of maximum satisfiability. J Algorithms, 1994, 9: 463–470
315 Goemans M X, Williamson D P. New $\frac{3}{4}$-approximation algorithms for the maximum satisfiability problem. SIAM J Discrete Math, 1994, 7: 656–666
316 He S, Zhang J, Zhang S. Bounding probability of small deviation: A fourth moment approach. Math Oper Res, 2010, 35: 208–232
317 Kleinberg J, Tardos E. Approximation algorithms for classification problems with pairwise relationships: Metric labeling and Markov random fields. In: Proceedings of the 40th Annual Symposium on Foundations of Computer Science. New York: IEEE Computer Society, 1999, 14–23
318 Ge D, He S, Ye Y, et al. Geometric rounding: A dependent randomized rounding scheme. J Comb Optim, 2011, 22: 699–725
319 Ageev A A, Sviridenko M I. Pipage rounding: A new method of constructing algorithms with proven performance guarantee. J Comb Optim, 2004, 8: 307–328
320 Fleischer L, Goemans M X, Mirrokni V S, et al. Tight approximation algorithms for maximum separable assignment problems. Math Oper Res, 2011, 36: 416–431
321 Chekuri C, Kumar A. Maximum Coverage Problem with Group Budget Constraints and Applications, vol. 3122. New York: Springer, 2004
322 Calinescu G, Chekuri C, Pál M, et al. Maximizing a monotone submodular function subject to a matroid constraint. SIAM J Comput, 2004, 8: 307–328
323 Williamson D P, Shmoys D B. The Design of Approximation Algorithms. Cambridge: Cambridge University Press, 2011
324 Goemans M X, Williamson D P. The Primal-Dual Method for Approximation Algorithms and Its Application to Network Design Problems. Boston: PWS Publishing, 1997
325 Jain K, Mahdian M, Saberi A. A new greedy approach for facility location problems. In: Proceedings of the Thirty-Fourth Annual ACM Symposium on Theory of Computing. New York: Association for Computing Machinery, 2002,

731–740
326 Jain K, Mahdian M, Markakis E, et al. Greedy facility location algorithms analyzed using dual fitting with factor-revealing LP. J ACM, 2003, 50: 795–824
327 Goemans M X, Williamson D P. Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming. J ACM, 1995, 42: 1115–1145
328 Feige U, Goemans M X. Approximating the value of the two power proof systems, with applications to MAX 2SAT and MAX DICUT. In: Proceedings of the 3rd Israel Symposium of the Theory of Computing and Systems. Washington: IEEE Computer Society, 1995, 1–182
329 Goemans M X, Williamson D P. Approximation algorithms for MAX-3-CUT and other problems via complex semidefinite programming. J Comput System Sci, 2004, 68: 442–470
330 Frieze A, Jerrum M. Improved approximation algorithms for MAX k-CUT and MAX BISECTION. Algorithmica, 1997, 18: 67–81
331 Ye Y. A .699-approximation algorithm for Max-Bisection. Math Program, 2001, 90: 101–111
332 Raghavendra P, Tan N. Approximating CSPs with global cardinality constraints using SDP hierarchies. ArXiv:1110.1064, 2011
333 Austrin P, Benabbas S, Georgiou K. Better balance by being biased. ACM Trans Algorithms, 2016, 13: 1–27
334 Natarajan K, Teo C P, Zheng Z. Mixed 0-1 linear programs under objective uncertainty: A completely positive representation. Oper Res, 2011, 59: 713–728
335 Kong Q, Lee C Y, Teo C P, et al. Scheduling arrivals to a stochastic service delivery system using copositive cones. Oper Res, 2013, 61: 711–726
336 Murota K. Discrete Convex Analysis. Philadelphia: SIAM, 2003
337 Vondrák J. Submodularity in combinatorial optimization. PhD Thesis. Prague: Charles University, 2007
338 Topkis D M. Supermodularity and Complementarity. Princeton: Princeton University Press, 2011
339 Schrijver A. A combinatorial algorithm minimizing submodular functions in strongly polynomial time. J Combin Theory Ser B, 2000, 80: 346–355
340 Vygen J. A note on Schrijver's submodular function minimization algorithm. J Combin Theory Ser B, 2003, 88: 399–402
341 Iwata S. A faster scaling algorithm for minimizing submodular functions. SIAM J Comput, 2003, 32: 833–840
342 Hochbaum D S. Submodular problems-approximations and algorithms. ArXiv:1010.1945, 2010
343 Nemhauser G L, Wolsey L A, Fisher M L. An analysis of approximations for maximizing submodular set functions, I. Math Program, 1978, 14: 265–294
344 Feige U. A threshold of $\ln n$ for approximating set cover. J ACM, 1998, 45: 634–652
345 Buchbinder N, Feldman M, Seffi J, et al. A tight linear time (1/2)-approximation for unconstrained submodular maximization. SIAM J Comput, 2015, 44: 1384–1402
346 Feige U, Mirrokni V S, Vondrák J. Maximizing non-monotone submodular functions. SIAM J Comput, 2011, 40: 1133–1153
347 Agrawal S, Ding Y, Saberi A, et al. Price of correlations in stochastic optimization. Oper Res, 2012, 60: 150–162
348 Onn S. Convex Discrete Optimization. New York: Springer, 2008
349 Chen D S, Batson R G, Dang Y. Applied Integer Programming. New York: John Wiley & Sons, 2010
350 Wolsey L A. Integer Programming. New York: John Wiley & Sons, 1998
351 Nemhauser G L, Wolsey L. Integer and Combinatorial Optimization. New York: John Wiley & Sons, 1988
352 Floudas C A. Nonlinear and Mixed-Integer Optimization: Fundamentals and Applications. Oxford: Oxford University Press, 1995
353 Sturmfels B. Gröbner Bases and Convex Polytopes. Providence: Amer Math Soc, 1996
354 Achterberg T, Koch T, Martin A. Branching rules revisited. Oper Res Lett, 2005, 33: 42–54
355 Morrison D R, Jacobson S H, Sauppe J J, et al. Branch-and-bound algorithms: A survey of recent advances in searching, branching, and pruning. Discrete Optim, 2016, 19: 79–102
356 Ostrowski J, Linderoth J, Rossi F, et al. Orbital branching. Math Program, 2011, 126: 147–178
357 Lima R M. IBM ILOG CPLEX What is inside of the box? Technical Report. Pittsburgh: Carnegie Mellon University, 2011
358 Jünger M, Reinelt G, Thienel S. Practical problem solving with cutting plane algorithms in combinatorial optimization. In: DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computational Science, vol. 20. Providence:

Amer Math Soc, 1995, 111–152

359 Balas E, Ceria S, Cornuéjols G, et al. Gomory cuts revisited. Oper Res Lett, 1996, 19: 1–9

360 Grötschel M, Holland O. Solution of large-scale symmetric travelling salesman problems. Math Program, 1991, 51: 141–202

361 Balas E, Ceria S, Cornuéjols G. A lift-and-project cutting plane algorithm for mixed 0-1 programs. Math Program, 1993, 58: 295–324

362 Lovász L, Schrijver A. Cones of matrices and set-functions and 0-1 optimization. SIAM J Optim, 1991, 1: 166–190

363 Gu Z, Nemhauser G L, Savelsbergh M W P. Sequence independent lifting in mixed integer programming. J Comb Optim, 2000, 4: 109–129

364 Chen W K, Dai Y H. On the complexity of sequentially lifting cover inequalities for the knapsack polytope. Sci China Math, 2020, doi: 10.1007/s11425-019-9538-1

365 Ceria S, Cordier C, Marchand H, et al. Cutting planes for integer programs with general integer variables. Math Program, 1998, 81: 201–214

366 Padberg M, Rinaldi G. A branch-and-cut algorithm for the resolution of large-scale symmetric traveling salesman problems. SIAM Rev, 1991, 33: 60–100

367 Dey S S, Molinaro M. Theoretical challenges towards cutting-plane selection. Math Program, 2018, 170: 237–266

368 Lenstra Jr H W. Integer programming with a fixed number of variables. Math Oper Res, 1983, 8: 538–548

369 Mittelmann H D. Decision tree for optimization software. Http://plato.asu.edu/guide.html

370 Li D, Sun X. Nonlinear Integer Programming. New York: Springer, 2006

371 Li D, Sun X L, Wang F L. Convergent Lagrangian and contour cut method for nonlinear integer programming with a quadratic objective function. SIAM J Optim, 2006, 17: 372–400

372 Li D, White D J. pth power Lagrangian method for integer programming. Ann Oper Res, 2000, 98: 151–170

373 Burer S, Letchford A N. Non-convex mixed-integer nonlinear programming: A survey. Surveys Oper Res Manage Sci, 2012, 17: 97–106

374 Hemmecke R, Köppe M, Lee J, et al. 50 years of integer programming 1958–2008. In: Nonlinear Integer Programming. New York: Springer, 2010, 561–618

375 Dang C, Ye Y. A fixed point iterative approach to integer programming and its distributed computation. Fixed Point Theory Appl, 2015, 2015: 182

376 Li D, Sun X L, Gu S S, et al. Optimization and optimal control: Theory and applications. In: Polynomially Solvable Cases of Binary Quadratic Programs. New York: Springer, 2010, 199–225

377 Beck A, Teboulle M. Global optimality conditions for quadratic optimization problems with binary constraints. SIAM J Optim, 2000, 11: 179–188

378 Li D, Sun X L, Liu C L. An exact solution method for unconstrained quadratic 0-1 programming: A geometric approach. J Global Optim, 2012, 52: 797–829

379 Malik U, Jaimoukha I M, Halikias G D, et al. On the gap between the quadratic integer programming problem and its semidefinite relaxation. Math Program, 2006, 107: 505–515

380 Sun X L, Liu C L, Li D, et al. On duality gap in binary quadratic programming. J Global Optim, 2012, 53: 255–269

381 Nesterov Y. Semidefinite relaxation and nonconvex quadratic optimization. Optim Methods Softw, 1998, 9: 141–160

382 Kim S, Kojima M. Second order cone programming relaxation of nonconvex quadratic optimization problems. Optim Methods Softw, 2001, 15: 201–224

383 Helmberg C, Rendl F. Solving quadratic $(0,1)$-problems by semidefinite programs and cutting planes. Math Program, 1998, 82: 291–315

384 Rendl F, Rinaldi G, Wiegele A. Integer programming and combinatorial optimization. In: A Branch and Bound Algorithm for Max-Cut Based on Combining Semidefinite and Polyhedral Relaxations. New York: Springer, 2007, 295–309

385 Chaovalitwongse W, Pardalos P M, Prokopyev O A. A new linearization technique for multi-quadratic 0-1 programming problems. Oper Res Lett, 2004, 32: 517–522

386 Burer S. On the copositive representation of binary and continuous nonconvex quadratic programs. Math Program, 2009, 120: 479–495

387 de Klerk E, Pasechnik D V. Approximation of the stability number of a graph via copositive programming. SIAM J Optim, 2002, 12: 875–892

388 Bomze I M. Copositive optimization—recent developments and applications. European J Oper Res, 2012, 216:

509–520
389 Dong H, Anstreicher K. Separating doubly nonnegative and completely positive matrices. Math Program, 2013, 137: 131–153
390 Gao J, Li D. Optimal cardinality constrained portfolio selection. Oper Res, 2013, 61: 745–761
391 Frangioni A, Gentile C, Lacalandra F. Tighter approximated MILP formulations for unit commitment problems. IEEE Trans Power Syst, 2009, 24: 105–113
392 Bienstock D. Computational study of a family of mixed-integer quadratic programming problems. Math Program, 1996, 74: 121–140
393 Günlük O, Linderoth J. Perspective reformulations of mixed integer nonlinear programs with indicator variables. Math Program, 2010, 124: 183–205
394 Zheng X J, Sun X L, Li D. Improving the performance of MIQP solvers for quadratic programs with cardinality and minimum threshold constraints: A semidefinite program approach. INFORMS J Comput, 2014, 26: 690–703
395 Kim J, Tawarmalani M, Richard J P P. On cutting planes for cardinality-constrained linear programs. Math Program, 2018, 178: 417–448
396 Bengio Y, Lodi A, Prouvost A. Machine learning for combinatorial optimization. ArXiv:1811.06128, 2018
397 Khalil E B, Bodic P, Song L, et al. Learning to branch in mixed integer programming. In: Proceedings of the Thirtieth AAAI Conference on Artificial Intelligence. Phoenix: AAAI Press, 2016, 724–731
398 Alvarez A M, Louveaux Q, Wehenkel L. A machine learning-based approximation of strong branching. INFORMS J Comput, 2017, 29: 185–195
399 Tang Y, Agrawal S, Faenza Y. Reinforcement learning for integer programming: Learning to cut. ArXiv:1906.04859, 2019
400 Bonami P, Lodi A, Zarpellon G. Integration of constraint programming, artificial intelligence, and operations research. In: Learning a Classification of Mixed-Integer Quadratic Programming Problems. New York: Springer International Publishing, 2018, 595–604
401 Kruber M, Lübbecke M E, Parmentier A. Integration of AI and OR techniques in constraint programming. In: Learning When to Use a Decomposition. New York: Springer, 2017, 202–210
402 Dai H, Khalil E, Zhang Y, et al. Learning combinatorial optimization algorithms over graphs. In: Advances in Neural Information Processing Systems 30. New York: Curran Associates, 2017, 6348–6358
403 Li Z, Chen Q, Koltun V. Combinatorial optimization with graph convolutional networks and guided tree search. In: Advances in Neural Information Processing Systems 31. New York: Curran Associates, 2018, 537–546
404 Yao Y, Zhu X, Dong H, et al. ADMM-based problem decomposition scheme for vehicle routing problem with time windows. Trans Res Part B Methodological, 2019, 129: 156–174
405 Zhang Y, Peng Q, Yao Y, et al. Solving cyclic train timetabling problem through model reformulation: Extended time-space network construct and alternating direction method of multipliers methods. Trans Res Part B Methodological, 2019, 128: 344–379
406 Vickrey W. Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders. J Finance, 1961, 16: 8–37
407 Clarke E H. Multipart pricing of public goods. Public Choice, 1971, 11: 17–33
408 Groves T. Incentives in teams. Econometrica, 1973, 41: 617–631
409 Pekeč A, Rothkopf M H. Combinatorial auction design. Manage Sci, 2003, 49: 1485–1503
410 Myerson R B. Optimal auction design. Math Oper Res, 1981, 6: 58–73
411 Vohra R V. Optimization and mechanism design. Math Program, 2012, 134: 283–303
412 Hartline J D. Bayesian mechanism design. Found Trends Theor Comput Sci, 2012, 8: 143–263
413 Cai Y, Daskalakis C, Weinberg S M. Optimal multi-dimensional mechanism design: Reducing revenue to welfare maximization. In: Proceedings of the 53rd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. Washington: IEEE Computer Society, 2012, 130–139
414 Cai Y, Daskalakis C, Weinberg S M. Understanding incentives: Mechanism design becomes algorithm design. In: Proceedings of the 54th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. Washington: IEEE Computer Society, 2013, 618–627
415 Cai Y, Devanur N R, Weinberg S M. A duality-based unified approach to Bayesian mechanism design. ACM SIGecom Exchanges, 2016, 15: 71–77
416 Hartline J D, Roughgarden T. Simple versus optimal mechanisms. In: Proceedings of the 10th ACM Conference on Electronic Commerce. New York: Association for Computing Machinery, 2009, 225–234

417 Roughgarden T. Approximately optimal mechanism design: Motivation, examples, and lessons learned. ACM SIGecom Exchanges, 2015, 13: 4–20
418 Carroll G. Robustness and separation in multidimensional screening. Econometrica, 2017, 85: 453–488
419 Gravin N, Lu P. Separation in correlation-robust monopolist problem with budget. In: Proceedings of the Twenty-Ninth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. Philadelphia: SIAM, 2018, 2069–2080
420 Chen N, Gravin N, Lu P. Optimal competitive auctions. In: Proceedings of the Forty-Sixth Annual ACM Symposium on Theory of Computing. New York: Association for Computing Machinery, 2014, 253–262
421 Koçyiğit Ç, Bayrak H I, Pınar M Ç. Robust auction design under multiple priors by linear and integer programming. Ann Oper Res, 2018, 260: 233–253
422 Koçyiğit Ç, Iyengar G, Kuhn D, et al. Distributionally robust mechanism design. Manage Sci, 2020, 66: 159–189
423 Carroll G. Robustness in mechanism design and contracting. Annu Rev Econ, 2019, 11: 139–166
424 Papadimitriou C H. Algorithms, games, and the internet. In: Automata, Languages, and Programming. Berlin-Heidelberg: Springer, 2001, 1–3
425 Roughgarden T. Selfish Routing and the Price of Anarchy. Cambridge: The MIT Press, 2005
426 Papadimitriou C, Valiant G. Selfish routers and the price of anarchy. Http://theory.stanford.edu/~valiant/papers/SR_sub_old.pdf
427 Sandholm W H. Population Games and Evolutionary Dynamics. Cambridge: The MIT Press, 2010
428 Abdulkadiroğlu A, Sönmez T. School choice: A mechanism design approach. Am Econ Rev, 2003, 93: 729–747
429 Roth A E, Sönmez T, Ünver M U. Kidney exchange. Quart J Econom, 2004, 119: 457–488
430 Carroll G. Robustness and linear contracts. Am Econ Rev, 2015, 105: 536–563
431 Sun P, Chen M, Xiao Y. Optimal monitoring schedule in dynamic contracts. Available at SSRN 3038034, 2017
432 He S, Sethuraman J, Wang X, et al. A noncooperative approach to cost allocation in joint replenishment. Oper Res, 2017, 65: 1562–1573
433 Harris F W. How many parts to make at once. Mag Management, 1913, 10: 135–136
434 Arrow K J, Harris T, Marschak J. Optimal inventory policy. Econometrica, 1951, 19: 250–272
435 Scarf H. The optimality of (S, s) policies in the dynamic inventory problem. In: Mathematical Methods in the Social Sciences. Stanford: Stanford University Press, 1960, 196–202
436 Clark A J, Scarf H. Optimal policies for a multi-echelon inventory problem. Manage Sci, 1960, 6: 475–490
437 Daniel K H. A delivery-lag inventory model with emergency. In: Multistage Inventory Models and Techniques. Stanford: Stanford University Press, 1963
438 Fukuda Y. Optimal policies for the inventory problem with negotiable leadtime. Manage Sci, 1964, 10: 690–708
439 Nahmias S, Pierskalla W P. Optimal ordering policies for a product that perishes in two periods subject to stochastic demand. Naval Res Logist, 1973, 20: 207–229
440 Nahmias S. Optimal ordering policies for perishable inventory, II. Oper Res, 1975, 23: 735–749
441 Fries B E. Optimal ordering policy for a perishable commodity with fixed lifetime. Oper Res, 1975, 23: 46–61
442 Chen F. Optimal policies for multi-echelon inventory problems with batch ordering. Oper Res, 2000, 48: 376–389
443 Chao X, Zhou S X. Optimal policy for a multiechelon inventory system with batch ordering and fixed replenishment intervals. Oper Res, 2009, 57: 377–390
444 Chen X, Simchi-Levi D. Coordinating inventory control and pricing strategies with random demand and fixed ordering cost: The finite horizon case. Oper Res, 2004, 52: 887–896
445 Chen X, Simchi-Levi D. Coordinating inventory control and pricing strategies with random demand and fixed ordering cost: The infinite horizon case. Math Oper Res, 2004, 29: 698–723
446 Chen X, Simchi-Levi D. Coordinating inventory control and pricing strategies: The continuous review model. Oper Res Lett, 2006, 34: 323–332
447 Chen X, Zhang Y, Zhou S X. Preservation of quasi-K-concavity and its applications. Oper Res, 2010, 58: 1012–1016
448 Chen X, Zhou S X, Chen Y. Integration of inventory and pricing decisions with costly price adjustments. Oper Res, 2011, 59: 1144–1158
449 Zhou S X, Tao Z, Chao X. Optimal control of inventory systems with multiple types of remanufacturable products. Manuf Serv Oper Management, 2011, 13: 20–34
450 Zipkin P. On the structure of lost-sales inventory models. Oper Res, 2008, 56: 937–944
451 Chen X, Pang Z, Pan L. Coordinating inventory control and pricing strategies for perishable products. Oper Res, 2014, 62: 284–300

452 Li Q, Yu P. Multimodularity and its applications in three stochastic dynamic inventory problems. Manuf Serv Oper Management, 2014, 16: 455–463
453 Hua Z, Yu Y, Zhang W, et al. Structural properties of the optimal policy for dual-sourcing systems with general lead times. IIE Trans, 2015, 47: 841–850
454 Sun P, Wang K, Zipkin P. Quadratic approximation of cost functions in lost sales and perishable inventory control problems. Technical Report. Durham: Duke University, 2014
455 Levi R, Pál M, Roundy R O, et al. Approximation algorithms for stochastic inventory control models. Math Oper Res, 2007, 32: 284–302
456 Levi R, Janakiraman G, Nagarajan M. A 2-approximation algorithm for stochastic inventory control models with lost sales. Math Oper Res, 2008, 33: 351–374
457 Levi R, Roundy R O, Shmoys D B, et al. Approximation algorithms for capacitated stochastic inventory control models. Oper Res, 2008, 56: 1184–1199
458 Levi R, Shi C. Approximation algorithms for the stochastic lot-sizing problem with order lead times. Oper Res, 2013, 61: 593–602
459 Tao Z, Zhou S X. Approximation balancing policies for inventory systems with remanufacturing. Math Oper Res, 2014, 39: 1179–1197
460 Levi R, Roundy R, Truong V A, et al. Provably near-optimal balancing policies for multi-echelon stochastic inventory control models. Math Oper Res, 2017, 42: 256–276
461 Chao X, Gong X, Shi C, et al. Approximation algorithms for perishable inventory systems. Oper Res, 2015, 63: 585–601
462 Chao X, Gong X, Shi C, et al. Approximation algorithms for capacitated perishable inventory systems with positive lead times. Manage Sci, 2018, 64: 5038–5061
463 Goldberg D A, Katz-Rogozhnikov D A, Lu Y, et al. Asymptotic optimality of constant-order policies for lost sales inventory models with large lead times. Math Oper Res, 2016, 41: 898–913
464 Xin L, Goldberg D A. Optimality gap of constant-order policies decays exponentially in the lead time for lost sales models. Oper Res, 2016, 64: 1556–1565
465 Xin L, Goldberg D A. Asymptotic optimality of tailored base-surge policies in dual-sourcing inventory systems. Manage Sci, 2018, 64: 437–452
466 Bu J, Gong X, Yao D. Constant-order policies for lost-sales inventory models with random supply functions: Asymptotics and heuristic. Available at SSRN 3063730, 2019
467 Scarf H. A min-max solution of an inventory problem. In: Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production. Redwood City: Stanford University Press, 1958, 201–209
468 Yue J, Chen B, Wang M C. Expected value of distribution information for the newsvendor problem. Oper Res, 2006, 54: 1128–1136
469 Zhu Z, Zhang J, Ye Y. Newsvendor optimization with limited distribution information. Optim Methods Softw, 2013, 28: 640–667
470 Delage E, Ye Y. Distributionally robust optimization under moment uncertainty with application to data-driven problems. Oper Res, 2010, 58: 595–612
471 Han Q, Du D, Zuluaga L. Technical note—a risk- and ambiguity-averse extension of the max-min newsvendor order formula. Oper Res, 2014, 62: 535–542
472 Bertsimas D, Thiele A. A robust optimization approach to inventory theory. Oper Res, 2006, 54: 150–168
473 Bienstock D, Özbay N. Computing robust basestock levels. Discrete Optim, 2008, 5: 389–414
474 Adida E, Perakis G. A robust optimization approach to dynamic pricing and inventory control with no backorders. Math Program, 2006, 107: 97–129
475 See C T, Sim M. Robust approximation to multiperiod inventory management. Oper Res, 2010, 58: 583–594
476 Solyalı O, Cordeau J F, Laporte G. The impact of modeling on robust inventory management under demand uncertainty. Manage Sci, 2016, 62: 1188–1201
477 Mamani H, Nassiri S, Wagner M R. Closed-form solutions for robust inventory management. Manage Sci, 2017, 63: 1625–1643
478 Sun J, Van Mieghem J A. Robust dual sourcing inventory management: Optimality of capped dual index policies and smoothing. Manuf Serv Oper Management, 2019, 21: 912–931
479 Burnetas A N, Smith C E. Adaptive ordering and pricing for perishable products. Oper Res, 2000, 48: 436–443

480 Huh W T, Rusmevichientong P. A nonparametric asymptotic analysis of inventory planning with censored demand. Math Oper Res, 2009, 34: 103–123
481 Besbes O, Muharremoglu A. On implications of demand censoring in the newsvendor problem. Manage Sci, 2013, 59: 1407–1424
482 Huh W T, Levi R, Rusmevichientong P, et al. Adaptive data-driven inventory control with censored demand based on Kaplan-Meier estimator. Oper Res, 2011, 59: 929–941
483 Shi C, Chen W, Duenyas I. Technical note—nonparametric data-driven algorithms for multiproduct inventory systems with censored demand. Oper Res, 2016, 64: 362–370
484 Cross R G. Revenue Management: Hard-Core Tactics for Market Domination. New York: Crown Business, 1998
485 Phillips R L. Pricing and Revenue Optimization. Stanford: Stanford University Press, 2005
486 Talluri K T, van Ryzin G J. The Theory and Practice of Revenue Management, vol. 68. Boston: Springer Science & Business Media, 2006
487 Littlewood K. Forecasting and control of passenger bookings. In: Proceedings of the Twelfth AGIFORS Symposium. Nathanya: American Airlines, 1972, 95–117
488 Belobaba P. Air travel demand and airline seat inventory management. PhD Thesis. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 1987
489 Bertsimas D, Popescu I. Revenue management in a dynamic network environment. Transportation Sci, 2003, 37: 257–277
490 Talluri K, van Ryzin G. A randomized linear programming method for computing network bid prices. Transportation Sci, 1999, 33: 207–216
491 Adelman D. Dynamic bid prices in revenue management. Oper Res, 2007, 55: 647–661
492 Ke J, Zhang D, Zheng H. An approximate dynamic programming approach to dynamic pricing for network revenue management. Prod Oper Manag, 2019, 28: 2719–2737
493 Zhang D, Adelman D. An approximate dynamic programming approach to network revenue management with customer choice. Transportation Sci, 2009, 43: 381–394
494 Kunnumkal S, Talluri K. Technical note—a note on relaxations of the choice network revenue management dynamic program. Oper Res, 2016, 64: 158–166
495 Talluri K, van Ryzin G. Revenue management under a general discrete choice model of consumer behavior. Manage Sci, 2004, 50: 15–33
496 Zhang D, Cooper W L. Revenue management for parallel flights with customer-choice behavior. Oper Res, 2005, 53: 415–431
497 Mcfadden D. Conditional logit analysis of qualitative choice behavior. In: Frontiers in Econometrics. New York: Wiley, 1973, 105–142
498 Wang R. Capacitated assortment and price optimization under the multinomial logit model. Oper Res Lett, 2012, 40: 492–497
499 Gallego G, Wang R. Multiproduct price optimization and competition under the nested logit model with product-differentiated price sensitivities. Oper Res, 2014, 62: 450–461
500 Du C, Cooper W L, Wang Z. Optimal pricing for a multinomial logit choice model with network effects. Oper Res, 2016, 64: 441–455
501 Rusmevichientong P, Shmoys D, Tong C, et al. Assortment optimization under the multinomial logit model with random choice parameters. Prod Oper Manag, 2014, 23: 2023–2039
502 Li G, Rusmevichientong P, Topaloglu H. The d-level nested logit model: Assortment and price optimization problems. Oper Res, 2015, 63: 325–342
503 Gallego G, Topaloglu H. Constrained assortment optimization for the nested logit model. Manage Sci, 2014, 60: 2583–2601
504 Rusmevichientong P, Topaloglu H. Robust assortment optimization in revenue management under the multinomial logit choice model. Oper Res, 2012, 60: 865–882
505 Birbil Ş İ, Frenk J B G, Gromicho J A S, et al. The role of robust optimization in single-leg airline revenue management. Manage Sci, 2009, 55: 148–163
506 Davis J M, Topaloglu H, Williamson D P. Assortment optimization over time. Oper Res Lett, 2015, 43: 608–611
507 周小川. 数学规划与经济分析. 北京: 中国金融出版社, 2019

Modern optimization theory and applications

Qi Deng, Jianjun Gao, Dongdong Ge, Simai He, Bo Jiang, Xiaocheng Li, Zizhuo Wang,
Chaolin Yang & Yinyu Ye

Abstract Over the past a few decades, significant progress has been made in the field of operations research, particularly in optimization theory and its applications. This article intensively investigates many subjects in this field, such as linear programming, nonlinear programming, online optimization, machine learning, combinatorial optimization, integer programming, mechanism design, inventory management, revenue management, etc. This survey paper does not intend to provide an encyclopedic review for the whole field, but rather focuses more on mainstream methodology, research framework, and the newest advances of some important subjects. It particularly emphasizes several recent interesting and meaningful discoveries, which potentially stimulates more quality research in the field.

Keywords optimization theory, linear programming, online optimization, nonlinear programming, machine learning, combinatorial optimization, integer programming, mechanism design, inventory management, revenue management

MSC(2010) 49M37, 65K05, 90C05, 90C06, 90C10, 90C11, 90C15, 90C20, 90C22, 90C25, 90C26, 90C27, 90C29, 90C30, 90C39, 90C46, 90C90

doi: 10.1360/SSM-2020-0035