DOI:10.19789/j.1004-9398.2023.05.014
文献引用:朱超波,马利文.拓扑学观点下的数学分析知识[J].首都师范大学学报(自然科学版),2023,44(5):96-101. ZHU C B,MA L W. Knowledge of mathematical analysis from the perspective of topology[J]. Journal of Capital Normal University(Natural Science Edition),2023,44(5):96-101.

拓扑学观点下的数学分析知识*

朱超波[1],马利文[2**]

(1.西安交通大学数学与统计学院,陕西 西安 710049;
2.北京邮电大学理学院,北京 100876)

摘要:在拓扑学观点下,深入探讨数学分析中一些重要概念和原理的本质属性,并研究其特殊性。数学分析中序列极限的唯一性、海涅定理对连续函数的刻画、介值定理,以及描述实数完备性的几个重要定理的等价性,都是特殊实数空间上的特殊结论。

关键词:拓扑空间;连续映射;稠密性;完备性
中图分类号:O171;O189 **文献标识码**:A

Knowledge of mathematical analysis from the perspective of topology*

ZHU Chaobo[1], MA Liwen[2**]

(1. School of Mathematics and Statistics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an Shaanxi 710049;
2. College of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876)

Abstract: From the high perspective of topology, this paper discusses the essential properties of some important concepts and principles in mathematical analysis, and studies their particularity. In mathematical analysis, the uniqueness of sequence limit, the characterization of continuous function by Heine's theorem, the intermediate value theorem, and the equivalence of several important theorems describing the completeness of real numbers are all special results on the space of special real numbers.

Keywords: topological space; continuous mapping; dense; completeness
CLC: O171; O189 **DC**: A

0 引 言

数学分析课程是大学生数学专业课程的重中之重,是培养学生逻辑思维、提升数学素养的重要基础课程[1-3]。数学分析及其直接后续课程——实变函数和泛函分析,都是建立在度量空间或欧氏度量空间上的函数分析类学科[4-6]。由于度量空间的特殊性,使得数学分析中的一些重要原理也具有很强的特殊性和局限性,这极大地限制了学生对数学概念本质的理解与思考,导致学生很难认识到一些

收稿日期:2022-06-21
* 北京市自然科学基金项目(1222011);北京邮电大学研究生教育教学改革重大项目(2021Y008);北京邮电大学2022年教育教学改革项目(2022JXYJ-B04)
** 通信作者:maliwen@bupt.edu.cn

原理和概念的核心思想。当度量空间被抽象成拓扑空间时,在拓扑学的观点下,数学分析中的概念和原理得到了本质的刻画。比如:数列极限的唯一性是基于实数空间是特殊的Hausdorff空间,而一般拓扑空间中收敛序列的极限并不唯一;海涅定理刻画连续函数的充要条件是建立在实数空间是满足第一可数公理的特殊性的基础上,而在一般拓扑空间中不再是充分必要条件;闭区间上连续函数的介值定理实质上只依赖于定义域的连通性,而实数集上的任意区间都是连通的,不必要求闭区间;数学分析的核心——极限理论,建立在实数集完备性的基础之上,描述实数完备性的几个等价定理,有限覆盖定理、致密性定理和聚点定理本质上是不同的紧致性,他们相互等价是由于实数空间是满足第一可数公理和Lindelöf性的特殊空间,而在一般拓扑空间上他们并不等价。此外,对常见的一些基本概念,如集合、维数、曲线和曲面等,在数学分析中并没有明确的定义。需要更高深的拓扑学知识才可以精确定义,因而只有在拓扑学的观点下,才能达到对这些定理全面深刻的理解。

本文在拓扑学的观点下,讨论数学分析中相关概念和原理的本质属性,从而认识其在数学分析中的特殊性,以达到对数学分析知识的深刻理解。在数学分析的学习和教学中,教师和学生已经有不少优秀的教学经验和学习心得[7-9]。本文将更加拓宽和加深数学分析的知识范围和深度,促进学生和教师对数学分析的深刻理解,提升学生学习数学分析和教师从事数学分析教学的能力。

1 序列收敛与连续映射

定义1[10] 称集族$\Im \subseteq 2^X$是非空集合X的一个拓扑,若$\Im$满足条件:

(1)$X, \varnothing \in \Im$,

(2)$\forall \Im_1 \subseteq \Im$,成立$\bigcup\limits_{A \in \Im_1} A \in \Im$,

(3)$\forall A, B \in \Im$,成立$A \cap B \in \Im$,

则称$(X, \Im)$是一个拓扑空间,简记作X。$\Im$中的每个元素称为X中的一个开集。

定义2[11] $(X, \Im)$的子集U称为点$x \in X$的邻域当且仅当U包含含有x的一个开集。x的所有邻域构成的集族称为x的邻域系,记作$N(x)$。

例1[10] 离散拓扑空间。

给定一个非空集合X,令$\Im$为X的所有子集构成的集族,容易验证$\Im$是X的一个拓扑,称$(X, \Im)$为离散拓扑空间。

例2[12] 平庸拓扑空间。

给定一个非空集合X,则$\Im = \{X, \varnothing\}$是X上的一个拓扑,称$(X, \Im)$为平庸拓扑空间。

在拓扑学中,收敛序列是这样定义的。

定义3[10] 设$\{x_n\}$是拓扑空间$(X, \Im)$中的一个序列,$x_0 \in X$。若$\forall U \in N(x_0)$,$\exists N \in \mathbf{Z}^+$,使得$\forall n > N$成立$x_n \in U$,则称$\{x_n\}$收敛于$x_0$,记作$x_n \to x_0$,并称$x_0$是$\{x_n\}$的一个极限点。

注:$\{x_n\}$是一个收敛序列当且仅当其至少有一个极限点。

例3 $x_n = 1/n, n = 1, 2, \cdots\cdots$,序列$\{x_n\}$收敛吗?

考虑实数集$\mathbf{R}$作为离散拓扑空间,则$\{x_n\}$不收敛于$(\mathbf{R}, \Im)$中的任意一个点,从而$\{x_n\}$是发散的。但在实数空间$\mathbb{R}$中,$\{x_n\}$唯一地收敛到极限$x_0 = 0$。

例4 $a, b \in \mathbf{R}$,且$a \neq b$,令$x_{2n-1} = a, x_{2n} = b, n = 1, 2, \cdots\cdots$。序列$\{x_n\}$收敛吗?

$\mathbf{R}$作为平庸拓扑空间,可验证序列$\{x_n\}$收敛于$x_1 = a$,也收敛于$x_2 = b$,则$\{x_n\}$是一个收敛序列,但其极限不唯一。而在实数空间$\mathbf{R}$中,$\{x_n\}$发散。

例4表明拓扑空间中收敛序列的极限不一定唯一,但这与数学分析中极限的唯一性并不矛盾,其从侧面反映出实数空间存在着某种特殊性。

定义4[10] $(X, \Im)$是一个拓扑空间,若$\forall x, y \in X$,x有邻域U,y有邻域V满足$U \cap V = \varnothing$,则称X是一个Hausdorff空间。

例5 实数空间$\mathbb{R}$是一个Hausdorff空间。

证明 $\forall a, b \in \mathbf{R}$,且$a \neq b$。不妨设$a < b$,取$c \in \mathbb{R}$满足$a < c < b$,则$U = (-\infty, c)$,$V = (c, +\infty)$为所求分割$a$、$b$的邻域。

定理1[10] 设$\{x_n\}$是Hausdorff空间$(X, \Im)$中的一个收敛序列,则$\{x_n\}$有唯一的极限点。

结论1 数学分析中,收敛序列极限的唯一性本质上依赖于实数空间$\mathbf{R}$的特殊性,即$\mathbf{R}$是一个Hausdorff空间。

下面回顾一下数学分析中连续函数的概念。

定义5[13] 设函数$f(x)$在x_0处有定义,若对任意给定的实数$\varepsilon > 0$,都存在$\delta > 0$,当$|x - x_0| < \delta$时,

成立 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续。

在拓扑学里,连续映射的本质是什么呢?

定义 6[10] $f: X \to Y$ 是从拓扑空间 X 到 Y 的一个映射,$x \in X$。若 $f(x) \in Y$ 的每个邻域 U 的原像 $f^{-1}(U)$ 是 x 的一个邻域,则称映射 f 在 x 处连续。

结论 2 数学分析中,连续函数 $\varepsilon-\delta$ 定义的本质就是 $f(x_0)$ 的任意 ε 邻域的原像是 x_0 的邻域。

事实上,在数学分析中有一个刻画函数极限的重要定理——海涅定理,其也可以利用收敛序列很好地刻画函数的连续性。

定理 2[13] 函数 f 在 x 处连续当且仅当任何以 x 为极限的序列 $\{x_n\}$,$\{f(x_n)\}$ 以 $f(x)$ 为极限。

这个命题也是依赖于实数空间 $\mathbf{R}$ 的特殊性才成立,其在一般的拓扑空间并不成立。那么,实数空间又有什么特殊性呢?

定义 7[14] 设 $(X,\Im)$ 是一个拓扑空间,$x \in X$,$\Re(x) \subseteq N(x)$。若 $\forall U \in N(x)$,$\exists V \in \Re(x)$ 使得 $x \in V \subseteq U$ 成立,则称集族 $\Re(x)$ 是 x 的一个邻域基;若 X 中的每个点 x 都有可数的邻域基,则称 X 满足第一可数公理。

命题 1 实数空间 $\mathbf{R}$ 满足第一可数公理。

证明 $\forall x \in \mathbf{R}$,集族 $\Re(x)=\{(x-r,x+r)|r \in \mathbb{Q}\}$ 中的每个元素都是点 x 的一个邻域。对 x 的每个邻域 $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$,$\exists r \in \mathbb{Q}$ 使得 $(x-r,x+r) \subseteq (x-\varepsilon,x+\varepsilon)$,故 $\Re(x)$ 是 x 的一个邻域基。显然 $\Re(x)$ 是可数族,因此 $\Re(x)$ 是 x 的一个可数邻域基,从而 $\mathbb{R}$ 满足第一可数公理。

定理 3[14] 给定 2 个拓扑空间 X 和 Y,其中 X 满足第一可数公理,则 $f: X \to Y$ 连续的充分必要条件是序列 $\{x_n\} \subseteq X$ 收敛到 x 蕴含着 $\{f(x_n)\}$ 收敛到 $f(x)$。

结论 3 由于实数空间 $\mathbf{R}$ 满足第一可数公理,因而其上的连续映射可用序列收敛来刻画。

2 稠密性与完备性

2.1 介值定理与稠密性

介值定理在数学分析中有着广泛的应用,如证明积分第一中值定理[3],以及用于一些方程的解的存在性问题研究等,但由于实数空间的特殊性,限制了学生对定理本质的理解,本文在此指出其特殊性。

定理 4[15] 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的一个连续函数,则 $\forall r \in [m,M]$,$\exists x \in [a,b]$ 使得 $f(x)=r$,其中 $m=\min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$,$M=\max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$。

这个定理成立依赖于定义域闭区间的一种特殊性质——连通性。事实上,定义在实数集的任何具有连通性质的子集上的连续函数都有介值定理成立。下面介绍拓扑空间的连通性。

定义 8[12] 若不存在非空集合 $A,B \subseteq X$ 满足 $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)=\varnothing$,且 $X=A \cup B$,则称 X 是一个连通空间。

定理 5[10] 设 $(X,\Im)$ 是一个连通空间,$f: X \to \mathbf{R}$ 是一个连续映射,则 $f(X)$ 是连通的。

定理 6[10] I 为实数集 $\mathbf{R}$ 上的连通子集,当且仅当 I 是一个区间。

推论 1 设 $f(x)$ 是区间 I 上的一个实值连续函数,则 $f(x)$ 的像集 $f(I)$ 在 $\mathbf{R}$ 中是连通的,即 $f(I)$ 为区间。

推论 2 若 $f(x)$ 为闭区间 I 上的连续函数,则 $f(I)$ 为闭区间。

证明 由连续函数的最大、小值存在定理知,$f(I)$ 存在最大值 M,最小值 m。再由上述推论 1 可知,$f(I)$ 为区间,即有 $f(I)=[m,M]$。

注:推论 2 就是前面所述的数学分析中的介值定理的等价表述。

结论 4 由上述定理和推论可知,数学分析中的介值定理成立只要求定义域的连通性。事实上,可以将定义域放松为任意区间,则可保证夹在任意 2 个不同函数值之间的值都是函数值。这便是介值定理的本质。这样,可得到如下改进的介值定理。

定理 7 设 $f(x)$ 为定义在区间 I 上的连续函数,且 $f(I)$ 不是单点集,则 $\forall c,d \in f(I)$,$c<d$ 及 $\forall r \in (c,d)$,都存在 $x \in I$,使得 $f(x)=r$。

定义 9[10] 设 $(X,\Im)$ 是一个拓扑空间,$A \subseteq X$。若集合 A 的闭包为全集 X,即 $\bar{A}=X$,则称 A 是 X 的一个稠密子集。

定理 8 设 $(X,\Im)$ 是一个拓扑空间,$A \subseteq X$,则 A 在 X 中稠密的充分必要条件是 A 与 X 中的任意一个非空开集都有非空的交。

证明 必要性:若存在 X 中的非空开集 V_0 使得 $A \cap V_0=\varnothing$,则 $A \subseteq V_0^c=X-V_0$,于是 $\bar{A}$ 包含于 V_0^c 的闭包。而 V_0 为开集,则 $\bar{A} \subseteq V_0^c \subseteq X$,且 $V_0^c \neq X$,这与 A 在 X 中稠密矛盾,故 A 与 X 中的每个非空开集都有非空的交。

充分性：若A在X中不稠密，则$\bar{A} \subseteq X$，且$\bar{A} \neq X$。令$V = X - \bar{A} = X \cap (\bar{A})^c$，则$V$是$X$中的一个非空开集，但$V \cap \bar{A} = \varnothing$，矛盾。故$A$在$X$中稠密。

定义10 A、B为实数空间$\mathbb{R}$的2个子集，且$B \subseteq A$。若$\bar{B} \supseteq A$，则称集合B在A中稠密。

根据定义，很容易得到以下命题。

命题2 设A, B是$\mathbf{R}$的2个子集，且$B \subseteq A$。则下述条件等价：

(1)B在A中稠密；

(2)$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists y \in B$，使得$|x - y| < \varepsilon$；

(3)$\forall \varepsilon > 0$，B中所有点y的邻域$U_y = (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$构成的集族$\{U_y | y \in B\}$是集合$A$的一个开覆盖；

(4)$\forall x \in A, \exists \{y_n\} \subseteq B$使得$\{y_n\}$收敛于$x$；

(5)A与$\mathbf{R}$中的每个非空开集都有非空的交。

定理9 设$f(x), g(x)$是定义在区间I上的2个连续函数，$A \subseteq I$是I的一个稠密子集。若$\forall x \in A$成立$f(x) = g(x)$，则$f(x) = g(x), \forall x \in I$。

证明 $f(x)=g(x), \forall x \in I \Leftrightarrow F(x)=f(x)-g(x)$在$I$上恒等于零。若不然，则存在$x_0 \in I$使得$F(x_0) \neq 0$。由于$A$在$I$中稠密，根据命题2中的条件(4)知存在$A$中的点列$\{x_n\}$满足$x_n \to x_0$，从而$f(x_n) \to f(x_0), g(x_n) \to g(x_0)$，且$f(x_0) = g(x_0)$。而由$f(x)$和$g(x)$的连续性知$F(x)$也连续，则$\{F(x_n)\}$收敛于$F(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = 0$，矛盾。故$\forall x \in I$，成立$f(x) = g(x)$。

结论5 定理9表明，连续函数$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$由其在$\mathbb{R}$的一个稠密子集上的作用所确定，这样可以缩小研究范围，尤其可以缩小为在基数比较小的稠密子集(如有理数集)上研究连续函数。这便是研究稠密子集的重要意义之一。

2.2 度量空间的完备化

在数学分析中有一个熟知的事实：实数集是完备的，而有理数集是不完备的。那么从有理数集到实数集是如何实现完备化的呢？

定义11[4] 设(X, ρ)是一个度量空间，$\{x_n\} \subseteq X$。若$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{Z}^+$，使得$\forall m, n > N$成立$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$，则称$\{x_n\}$是$X$中的一个Cauchy列。若$X$中的每个Cauchy列都在$X$中收敛，则称$X$是一个完备度量空间。

定义12[4] 若存在一个从度量空间(X, ρ_1)到(Y, ρ_2)的双射f，且f满足：$\forall x, y \in X$，成立$\rho_1(x, y) = \rho_2(f(x), f(y))$，则称$f$是一个等距映射，且称$X$与$Y$等距。

定义13[10] 若(X, ρ)与完备度量空间X^*的一个稠密子空间等距，则称X^*是X的一个完备化。

定理10 有理数集$\mathbb{Q}$可以完备化。

证明 对任意的Cauchy列$\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq \mathbb{Q}$，若$\lim\limits_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n) = 0$，则称$\{x_n\}$与$\{y_n\}$等价。用$[\{x_n\}]$表示与$\{x_n\}$等价的所有Cauchy列构成的集合，而集合$[\{x_n\}]$的全体记作$\mathbb{Q}^*$。$\forall [\{x_n\}], [\{y_n\}] \in \mathbb{Q}^*$，令

$$\rho^*([\{x_n\}], [\{y_n\}]) = \lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n),$$

容易验证极限$\lim\limits_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n)$存在，且$\rho^*$与等价类中代表元素的选取无关。并且映射$\rho^*$是集合$\mathbb{Q}^*$上的一个度量，从而$(\mathbb{Q}^*, \rho^*)$是一个度量空间。

下证$\mathbb{Q}$与$(\mathbb{Q}^*, \rho^*)$的一个稠密子空间等距，且度量空间$(\mathbb{Q}^*, \rho^*)$是完备的。

(1) $\forall x \in \mathbb{Q}$，令$\varphi(x) = [\{x\}]$，其中$[\{x\}]$表示$\mathbb{Q}$中常值序列$\{x\}$代表的等价类。$\forall x, y \in \mathbb{Q}$，

$$\rho^*(\varphi(x), \varphi(y)) = \lim_{n \to \infty} \rho(x, y) = \rho(x, y),$$

若存在$x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$，且$x_1 \neq x_2$使得$\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$，则$\rho(x_1, x_2) = \rho^*(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) = 0$，这与$x_1 \neq x_2$矛盾。于是$\varphi: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^*$是一个单射，从而$\varphi$是一个从$\mathbb{Q}$到$\varphi(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}^*$的等距映射。

$\forall x^* = [\{x_n\}] \in \mathbb{Q}^*$，$\{x_n\}$是$\mathbb{Q}$中的一个Cauchy列。按照定义可得$\{\varphi(x_n)\}$是$\varphi(\mathbb{Q})$中的一个Cauchy列，且成立

$$\rho^*(x^*, \varphi(x_n)) = \lim_{m \to \infty} \rho(x_m, x_n),$$

则序列$\{\varphi(x_n)\}$收敛于x^*，故$\varphi(\mathbb{Q})$在$\mathbb{Q}^*$中稠密。因此，$\mathbb{Q}$与$(\mathbb{Q}^*, \rho^*)$的稠密子集$\varphi(\mathbb{Q})$等距。

(2)任取$\varphi(\mathbb{Q})$中的一个Cauchy列$\{\varphi(x_n)\}$，则$\{x_n\}$也是$\mathbb{Q}$中的一个Cauchy列，于是$x^* = [\{x_n\}] \in \mathbb{Q}^*$。容易验证$\{\varphi(x_n)\}$收敛于$x^*$，从而$\varphi(\mathbb{Q})$中的任意一个Cauchy列都在$\mathbb{Q}^*$中收敛。于是$\mathbb{Q}^*$是一个完备的度量空间。

结合(1)和(2)可知，有理数集$\mathbb{Q}$可以完备化。

定理11 有理数集$\mathbb{Q}$的任意2个完备化等距。

证明 任取$\mathbb{Q}$的2个完备化(X_1, ρ_1)和(X_2, ρ_2)，设$\mathbb{Q}$分别等距于X_1的稠密子集X_1'和X_2的稠密子集X_2'。易得X_1'和X_2'等距，即二者之间存在一个等距映射φ。

$\forall x_1 \in X_1$，由于X_1'在X_1中稠密，则$\exists \{x_n\} \subseteq X_1'$

使得$x_n \to x_1$。易得$\{\varphi(x_n)\}$是X_2'中的一个Cauchy列,由于X_2是一个完备度量空间,则$\{\varphi(x_n)\}$收敛于X_2中的某个点x_2。令$\varphi^*(x_1)=x_2$,则得到一个从X_1到X_2的映射φ^*,下证φ^*是一个等距映射。

$\forall x_1, y_1 \in X_1$,$\exists \{x_n\}$,$\{y_n\} \subseteq X_1'$使得$x_n \to x_1$,$y_n \to y_1$,则

$$\rho_2(\varphi^*(x_1), \varphi^*(y_1)) = \rho_2(\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n), \lim_{n\to\infty}\varphi(y_n)) = \lim_{n\to\infty}\rho_2(\varphi(x_n), \varphi(y_n)) = \lim_{n\to\infty}\rho_1(x_n, y_n) = \rho_1(x_1, y_1),$$

且若存在$x_1, y_1 \in X_1$,且$x_1 \neq y_1$使得$\varphi^*(x_1)=\varphi^*(y_1)$,则$\rho(x_1, y_1)=\rho^*(\varphi(x_1), \varphi(y_1))=0$,这与$x_1 \neq y_1$矛盾。于是$\varphi^*$是从$X_1$到$X_2$的一个单射。

$\forall x_2 \in X_2$,$\exists \{z_n\} \subseteq X_2'$使得$z_n \to x_2$。易得$\{\varphi^{-1}(z_n)\}$是$X_1'$中的一个Cauchy序列,不妨设$\{\varphi^{-1}(z_n)\}$在$X_1$中收敛于$x_1$,则显然有$\varphi^*(x_1)=x_2$。故$\varphi^*$是一个等距映射,从而$X_1$和$X_2$等距。

注:在这个完备化过程中,$\mathbb{Q}$和$\mathbb{Q}^*$都被理解为柯西列的等价类作为元素构成的集合。对任意的有理数x,等距映射将x对应于常值序列$\{x\}$所在的等价类$[\{x\}]$,其实等价类$[\{x\}]$由所有以x为极限的柯西列构成。因而,那些不包含常值序列的等价类就与无理数一一对应,在等距意义下也就认为是无理数集,从而可以认为$\mathbf{R}$是$\mathbb{Q}$唯一的完备化。

2.3　拓扑空间的紧性及其关系

数学分析中有描述实数完备性的3个定理(有限覆盖定理、聚点定理和致密性定理),在实数集上是等价的。

定理12[13]　(i)有限覆盖定理:A是实数空间$\mathbf{R}$中的一个有界闭区间,则集合A的每个开覆盖都有有限子覆盖。

(ii)聚点定理:A是实数空间$\mathbf{R}$中的一个有界无限点集,则集合A必有聚点。

(iii)致密性定理:若$\left\{x_n\right\}$是实数空间$\mathbf{R}$中的一个有界数列,则$\left\{x_n\right\}$必定存在收敛子列。

事实上,这3个定理在拓扑学中是拓扑空间的3种不同的紧致性,一般情况下并不等价。本节将主要讨论三者之间的联系与区别,为此先给出定义。

定义14[10]　(i)若$(X, \mathfrak{I})$的每个开覆盖都有有限子覆盖,则称X是一个紧致空间;

(ii)若X中的每个无限子集都有聚点,则称X是一个列紧空间;

(iii)X是一个序列紧致空间当且仅当X中的每个序列都有收敛的子序列。

例6　实数空间$\mathbf{R}$的3种紧性。

考虑$\mathbf{R}$的开覆盖$\mathfrak{R}=\{(-n, n)|n \in \mathbf{Z}^+\}$,显然$\mathfrak{R}$不存在有限子覆盖,从而$\mathbf{R}$不是一个紧致空间。数列$\{x_n\}$,$x_n=n$不存在收敛子列,且其作为集合是一个无限集也无聚点,所以$\mathbf{R}$不是列紧的,也不是序列紧致的。

定理13[10]　紧致空间$(X, \mathfrak{I})$必然也是列紧空间。

定理14　每个序列紧致空间都是列紧的。

证明　设$(X, \mathfrak{I})$是一个序列紧致空间,若X是一个有限集,则X中没有无限点集,由定义可认为X是列紧的;否则,若X是无限集,则任取X的一个无限子集A。在A中任取一个各项互异的序列$\left\{x_n\right\}$,由于X是序列紧致的,则$\left\{x_n\right\}$存在收敛的子序列$\left\{x_{n_k}\right\}$,设$x_{n_k} \to x_0$。从而x_0是A的一个聚点,故X是一个列紧空间。

例7　令$\mathfrak{R}=\{\{2n, 2n+1\}|n \in \mathbf{N}\}$,设自然数集$\mathbf{N}$唯一的以$\mathfrak{R}$为基的拓扑为$\mathfrak{I}$,则$(\mathbf{N}, \mathfrak{I})$是一个列紧空间。但$(\mathbf{N}, \mathfrak{I})$不是紧致的,也不是序列紧致的。

证明　任取自然数集$\mathbf{N}$的一个无限子集A,若$a=2k \in A$,$k \in \mathbf{N}$,则$2k+1$为A的一个聚点;若$a=2k+1 \in A$,$k \in \mathbf{N}$,则$2k$是A的一个聚点,于是$\mathbf{N}$是列紧的。

显然$(\mathbf{N}, \mathfrak{I})$的开覆盖$\mathfrak{R}=\{\{2n, 2n+1\}|n \in \mathbf{N}\}$没有有限子覆盖,从而$\mathbf{N}$不是紧致的。

令$x_n=2n$,则序列$\{x_n\} \subseteq \mathbf{N}$不存在收敛的子序列,于是$\mathbf{N}$不是序列紧致的。

注:例7表明定理13和定理14的逆命题并不成立。类似地,可以验证紧致性与序列紧致性并无必然的包含关系。

命题3　设$(X, \mathfrak{I})$满足第一可数公理,则X是一个序列紧致空间当且仅当X是列紧的。

证明　必要性显然,下证充分性。

任意$\{x_n\} \subseteq X$,若$\left\{x_n\right\}$作为集合是一个有限集,则$\left\{x_n\right\}$存在收敛子列;若$\left\{x_n\right\}$作为集合是一个无限集,记作A,则A至少存在一个聚点y_0。又X满足第一可数公理,则$A-\{y_0\}$中存在一个序列$\left\{y_n\right\}$收敛于y_0,从而$\left\{y_n\right\}$中存在$\left\{x_n\right\}$的一个子列$\left\{x_{n_k}\right\}$收敛于y_0,故X是一个序列紧致空间。

定理15[14] 设$(X,\Im)$满足第一可数公理,若X是一个紧致空间,则X也是序列紧致的。

定义15[14] 若$(X,\Im)$的每个开覆盖都有可数子覆盖,则称X是一个Lindelöf空间。

命题4[10] 实数空间$\mathbb{R}$是一个Lindelöf空间。

定理16 设$(X,\Im)$是一个Lindelöf空间,若X是一个序列紧致空间,则X也是紧致的。

证明 由于$(X,\Im)$是一个Lindelöf空间,则X的每个开覆盖都存在可数子覆盖,从而X是紧致的,只需它的每个可数开覆盖都存在有限子覆盖。假设X不是紧致的,则存在一个可数开覆盖没有有限子覆盖,不妨设为$\Re=\{U_1,U_2,\cdots,U_n,\cdots\}$。令

$$V_0=\varnothing,V_n=U_1\cup U_2\cup\cdots U_n,n=1,2,\cdots\cdots,$$

显然$\left\{V_n\right\}$也是X的一个可数开覆盖,且$\left\{V_n\right\}$没有有限子覆盖。不妨设V_{n-1}真包含于V_n,则$V_n-V_{n-1}\neq\varnothing$,任取$x_n\in V_n-V_{n-1}$,得到序列$\left\{x_n\right\}$。由$X$的序列紧致性知$\left\{x_n\right\}$存在收敛子列$\left\{x_{n_k}\right\}$,设$x_{n_k}\to x_0$。而$\left\{V_n\right\}$是$X$的一个开覆盖,从而存在$V_{i_0}$使得$x_0\in V_{i_0}$。由$x_{n_k}\to x_0$可知,$\exists k_0\in\mathbb{Z}^+$使得$\forall k>k_0,x_{n_k}\in V_{i_0}$。取$k$足够大使得$n_k\gg i_0$,则同时成立$x_{n_k}\in V_{i_0}$与$x_{n_k}\in V_{n_k}-V_{n_{k-1}}$,矛盾。因此$X$是一个紧致空间。

推论3 设X是一个满足第一可数公理的Lindelöf空间,若X是列紧的,则X也是紧致空间。

推论4 设X是一个满足第一可数公理的Lindelöf空间,则下列条件等价:

(1)X是一个紧致空间;

(2)X是一个列紧空间;

(3)X是序列紧致的。

推论5 设A是$\mathbf{R}$的一个子集,则下列条件等价:

(1)A是有界闭集;

(2)A是一个紧致子集;

(3)A是列紧的;

(4)A是序列紧致的。

结论6 由推论5可知,在数学分析中,由于实数空间$\mathbf{R}$的特殊性,即满足第一可数公理的Lindelöf空间,才有前面所述的有限覆盖定理、聚点定理、致密性定理彼此等价。

3 结束语

本文在拓扑空间中深入讨论了序列收敛、连续映射、海涅定理、介值定理、稠密性、完备性的一般形式,并指出了数学分析中相关概念的特殊性。在给出实数空间中稠密子集5个等价条件的基础上,论证了稠密子集对连续函数的确定性。在不引入可数紧致空间的条件下,直接讨论3种紧性的关系,得到了在满足第一可数公理的Lindelöf空间中,紧致性、序列紧致性与列紧性相互等价的结论,这也正是数学分析中相互等价的原因。

参 考 文 献

[1] 陈纪修,於崇华,金路.数学分析:上册[M].3版.北京:高等教育出版社,2019.

[2] 菲赫金哥尔茨.微积分学教程[M].徐献瑜,冷生明,梁文骐,译.8版.北京:高等教育出版社,2006.

[3] WALTER R.数学分析原理[M].赵慈庚,蒋铎,译.3版.北京:机械工业出版社,2004.

[4] 王声望,郑维行.实变函数与泛函分析概要:下册[M].5版.北京:高等教育出版社,2019.

[5] 张恭庆,林源渠.泛函分析讲义:上册[M].2版.北京:北京大学出版社,2021.

[6] 孙炯,王万义,赫建文,等.泛函分析[M].2版.北京:高等教育出版社,2018.

[7] 江樵芬,徐起.数学分析中一类与存在性有关的错误解法原因剖析[J].大学数学,2022,38(1):3-5.

[8] 洪情,胡国荣,丁慧生.基于卓越教师培养目标的师范专业课程改革:以数学(师范)专业数学分析课程为例[J].大学数学,2021,37(6):2-3.

[9] 盛兴平,王海坤.新课标下高师数学分析教学实践与研究[J].大学数学,2013,29(1):1-3.

[10] 熊金城.点集拓扑讲义[M].4版.北京:高等教育出版社,2011.

[11] J L凯莱.一般拓扑学[M].吴从炘,吴让泉,译.2版.北京:科学出版社,2010.

[12] 彭良雪.一般拓扑学讲义[M].北京:科学出版社,2011.

[13] 陈传璋,欧阳光中,金福临,等.数学分析:上册[M].3版.北京:高等教育出版社,2007.

[14] 江辉有.拓扑学[M].北京:机械工业出版社,2013.

[15] 华东师范大学数学系.数学分析:上册[M].4版.北京:高等教育出版社,2010.

(责任编辑:马田田)