



纯断鞅的指数型集中不等式

献给林正炎教授 80 华诞

苏中根¹, 王汉超^{2*}

1. 浙江大学数学科学学院, 杭州 310027;

2. 山东大学中泰证券金融研究院, 济南 250100

E-mail: suzhonggen@zju.edu.cn, wanghanchao@sdu.edu.cn

收稿日期: 2020-08-31; 接受日期: 2020-12-27; 网络出版日期: 2021-03-08; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11871425, 11731012, 12071257 和 11971267)、中央高等学校基本科研业务费 (批准号: 2020XZZX002-03) 和山东大学青年学者未来计划资助项目

摘要 本文研究与纯断局部鞅相关的指数型集中不等式; 通过构造一个新颖的指数鞅并利用停止定理, 建立关于纯断局部鞅的一般化集中不等式. 作为推论, 本文在不同条件下得到了一系列指数型不等式, 包括纯断局部鞅的 Bernstein 型不等式和 de la Peña 不等式等. 此外, 本文考虑连续时间矩阵值局部鞅, 通过构造迹指数上鞅, 建立矩阵值纯断局部鞅算子范数的集中不等式, 改进了 Bacry 等 (2018) 的结果.

关键词 指数集中不等式 纯断局部鞅 Laplace 变换

MSC (2020) 主题分类 60E15, 60G46, 60G57

1 引言与主要结果

在过去的几十年里, 集中不等式一直是概率论和数理统计研究中的热点问题. 实际上, 关于集中不等式的研究起源于 Bernstein、Bennett 和 Hoeffding 等关于独立随机变量和的经典偏差不等式, 感兴趣的读者可参见文献 [1, 2]. 本文研究兴趣集中在纯断局部鞅的指数型集中不等式.

事实上, 关于离散时间鞅的指数不等式已有不少漂亮的结果, 可参见文献 [3–9]. 文献 [10] 系统地介绍了离散时间鞅的集中不等式. 与离散时间鞅不同, 关于连续时间鞅集中不等式的研究并不多, 文献 [11–13] 讨论了连续时间鞅的集中不等式, 所讨论的局部鞅带有连续轨道局部鞅部分. 由于连续轨道局部鞅在一定条件下可以以 Brown 运动的时间变换表示, 因此不难得到指数型的集中不等式. 这启示我们有必要研究纯断局部鞅的集中不等式. 最近, 文献 [14] 研究了多值点过程随机积分的 Bernstein 型不等式, 这里, 多值点过程随机积分是纯断局部鞅的重要例子. 本文旨在研究更一般的纯断局部鞅集中不等式.

英文引用格式: Su Z G, Wang H C. Exponential concentration inequalities for purely discontinuous martingales (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1–14, doi: [10.1360/SCM-2020-0757](https://doi.org/10.1360/SCM-2020-0757)

首先介绍基本的概念和例子, 有关细节可参见文献 [15]. 令 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t \geq 0}, P)$ 是一个带流概率空间, 如果一个适应的随机过程 $M = (M_t)_{t \geq 0}$ 满足 $M_0 = 0$, 且 M 与所有的连续局部鞅正交, 则称 M 为纯断局部鞅. 定义 M 的随机跳测度 μ^M 为

$$\mu^M(dt, dx) = \sum_s \mathbf{1}_{(\Delta M_s \neq 0)} \varepsilon_{(s, \Delta M_s)}(dt, dx), \quad (1.1)$$

其中

$$\Delta M_s = M_s - M_{s-}, \quad M_{s-} = \lim_{u \uparrow s} M_u,$$

这里 $\varepsilon_{(s, \Delta M_s)}$ 是在点 $(s, \Delta M_s)$ 处的 Dirac 测度.

令 $\tilde{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \otimes \mathcal{B}$, 其中 $\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个 Borel σ -域, $\mathcal{P}$ 是由 $\Omega \times \mathbb{R}_+$ 上所有适应的左连续过程生成的 σ -域. 可料函数是指 $\tilde{\Omega}$ 上的 $\tilde{\mathcal{P}}$ -可测函数. 令 ν^M 为 μ^M 的可料补偿子, 即 ν^M 是一个可料的随机测度, 使得对任意可料函数 W , $W * (\mu^M - \nu^M) = W * \mu^M - W * \nu^M$ 是一个局部鞅, 其中 $W * \mu^M$ 的定义为

$$W * \mu_t^M = \begin{cases} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} W(s, x) \mu^M(ds, dx), & \text{若 } \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |W(s, x)| \mu^M(ds, dx) < \infty, \\ +\infty, & \text{其他.} \end{cases}$$

事实上, ν^M 有如下分解:

$$\nu^M(dt, dx) = dA_t K(\omega, t; dx), \quad (1.2)$$

其中 $K(\cdot, \cdot)$ 是 $(\Omega \times [0, +\infty), \mathcal{P})$ 到 $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ 上的转移核, $A = (A_t)_{t \geq 0}$ 是一个可料递增右连左极过程. 利用 μ^M 和 ν^M , M 可以表示如下:

$$M_t = x * (\mu^M - \nu^M)_t, \quad (1.3)$$

且 M 的可料二次变差过程为

$$\begin{aligned} \langle M, M \rangle_t &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x^2 \nu^M(ds, dx) \\ &= \int_0^t dA_s \int_{\mathbb{R}} x^2 K(s, dx). \end{aligned} \quad (1.4)$$

为方便读者理解, 下面列举几个纯断局部鞅的经典例子.

(i) 固定 $\lambda > 0$. $N = (N_t)_{t \geq 0}$ 是一个参数为 λ 的齐次 Poisson 点过程. 令 $(T_k)_{k \geq 0}$ 表示 N 的跳的到达时刻, 其中 $T_0 = 0$, 且 $(T_k - T_{k-1})_{k \geq 1}$ 是一列独立同分布于 $\text{Exp}(\lambda)$ 的随机变量序列, 则 N 的跳测度 μ^N 为

$$\mu^N(dt, dx) = \sum_{k \geq 1} \mathbf{1}_{\{T_k < \infty\}} \varepsilon_{(T_k, 1)}(dt, dx), \quad (1.5)$$

可料补偿子 ν^N 为

$$\nu^N(dt, dx) = \lambda dt dx,$$

其中 $(N_t - \lambda t)_{t \geq 0}$ 是一个纯断局部鞅, 且 $\langle N, N \rangle_t = \lambda t$.

(ii) 假设 $N = (N_t)_{t \geq 0}$ 如上定义, 令 $(\eta_k)_{k \geq 1}$ 为一列独立同分布随机变量, 且具有共同分布函数 $F(x)$. 假设 N 独立于 $(\eta_k)_{k \geq 1}$, 定义

$$Y_t = \sum_{k=1}^{N_t} \eta_k, \quad t \geq 0. \quad (1.6)$$

Y 正是所谓的复合 Poisson 过程, 其跳测度如下给出:

$$\mu^Y(dt, dx) = \sum_{k \geq 1} \mathbf{1}_{\{T_k < \infty\}} \varepsilon_{(T_k, \eta_k)}(dt, dx), \quad (1.7)$$

且 μ^Y 的可料补偿子为

$$\nu^Y(dt, dx) = \lambda dt F(dx), \quad (1.8)$$

这里 $(Y_t - x * \nu_t^Y)_{t \geq 0}$ 是一个纯断局部鞅.

(iii) 多值点过程是一类重要的点过程. 设 $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ 是一个多值点过程, 其跳测度为

$$\mu^Z(dt, dx) = \sum_{k \geq 1} \mathbf{1}_{\{T_k < \infty\}} \varepsilon_{(T_k, \zeta_k)}(dt, dx),$$

这里, 对任意 $t \in \mathbb{R}$, 有 $\mu^Z([0, t] \times \mathbb{R}) < \infty$. μ^Z 的可料补偿子为

$$\nu^Z(dt, dx) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{G_n([t, \infty] \times \mathbb{R})} \mathbf{1}_{\{t \leq T_{n+1}\}} G_n(dt, dx),$$

其中 $G_n(dt, dx)$ 是 (T_{n+1}, ζ_{n+1}) 关于 $\sigma\{T_1, \zeta_1, \dots, T_n, \zeta_n\}$ 的一个正则条件分布, 这里 $x * (\mu^Z - \nu^Z)$ 是一个纯断局部鞅.

本文主要研究纯断局部鞅的集中不等式. 具体来讲, 我们将研究如下形式的概率上界:

$$P\left(\text{存在某个 } t > 0, \text{ 使得 } M_t \geq x, \sum_{s \leq t} |\Delta M_s|^2 \leq v^2, \langle M, M \rangle_t \leq w^2\right). \quad (1.9)$$

事实上, 人们最关心 $P(\sup_{t \geq 0} M_t \geq x)$ 的上界. 然而, 由于 $(M_t)_{t \geq 0}$ 的变化, 如果不加以控制, 人们很难估计 $P(\sup_{t \geq 0} M_t \geq x)$ 的上界. 很多文献会通过可料二次变差过程 $\langle M, M \rangle$ 来加以控制. 对于独立增量过程而言, $\langle M, M \rangle$ 往往是确定性的, 因此, 如果只对 $\langle M, M \rangle$ 加以控制, 相当于只对时间加以控制. 本文通过对 $\sum_{s \leq t} |\Delta M_s|^2$ 加以限制, 来建立相关的集中不等式. 主要结果如下:

定理 1.1 令 $M = (M_t)_{t \geq 0}$ 是一个纯断局部鞅, 且可写为 (1.2) 和 (1.3) 的形式. 假设 $A = (A_t)_{t \geq 0}$ 是一个适应的连续增过程, 且存在两个非负函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 和一个常数 $\lambda > 0$, 使得对任意 $t > 0$, 有

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \exp\{\lambda x - g(\lambda)x^2\} \nu^M(ds, dx) \leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (1 + \lambda x + f(\lambda)x^2) \nu^M(ds, dx),$$

则对任意 $x, v, w > 0$, 有

$$\begin{aligned} & P\left(\text{存在某个 } t > 0, \text{ 使得 } M_t \geq x, \sum_{s \leq t} |\Delta M_s|^2 \leq v^2, \langle M, M \rangle_t \leq w^2\right) \\ & \leq \exp\{-\lambda x + g(\lambda)v^2 + f(\lambda)w^2\}. \end{aligned}$$

注 1.1 文献 [11,13,14] 已经得到了一些关于连续时间局部鞅的指数型集中不等式. 这些结果主要关心

$$P(\text{存在某个 } t > 0, \text{ 使得 } M_t \geq x, \langle M, M \rangle_t \leq w^2) \quad (1.10)$$

的上界. 在此类研究中, 往往通过 Laplace 变换便可得到较满意的结果. 然而, 当考虑在条件

$$\sum_{s \leq t} |\Delta M_s|^2 \leq v^2$$

下的集中不等式时, Laplace 变换不再适用. 本文通过构造新的指数局部鞅, 得到相应的上界.

注 1.2 Fan 等 [8] 最近在离散情形下研究了如下情形的集中不等式. 令 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, P)$ 为离散时间带流概率空间, $(\xi_n)_{n \geq 0}$ 是一列实值随机变量序列, 其中 $\xi_0 = 0$, ξ_n 是 $\mathcal{F}_n$ -可测的, 使得对于 $n \geq 1$, $E(\xi_n | \mathcal{F}_{n-1}) \leq 0$. 假设 V_n 是非负的 $\mathcal{F}_n$ -可测随机变量, 且存在两个非负函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 和一个正的常数 λ , 使得对所有的 $n \geq 1$, 有

$$E(\exp\{\lambda \xi_n - g(\lambda) \xi_n^2\} | \mathcal{F}_{n-1}) \leq 1 + f(\lambda) V_{n-1}, \quad (1.11)$$

则对任意 $n \geq 1$ 和 $x, v, w > 0$, 有

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^k \xi_i \geq x, \sum_{i=1}^k \xi_i^2 \leq v^2, \sum_{i=1}^k V_{i-1} \leq w^2 \text{ 对某个 } k \in [1, n] \text{ 成立}\right) \\ \leq \exp\{-\lambda x + g(\lambda) v^2 + f(\lambda) w^2\}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

事实上, 本文结果推广 Fan 等 [8] 的结果至连续时间情形. 在离散情形下, Fan 等 [8] 通过

$$Z_k(\lambda) = \prod_{i=1}^k \frac{\exp(\lambda \xi_i - g(\lambda) \xi_i^2)}{E((\lambda \xi_i - g(\lambda) \xi_i^2) | \mathcal{F}_{i-1})}, \quad Z_0(\lambda) = 1$$

构造共轭概率测度, 最终证明了结果. 然而, 当考虑连续时间的情形时, 问题会变得复杂. 本文构造一个连续时间局部鞅, 该局部鞅与 $\sum_{s \leq t} |\Delta M_s|^2$ 有关, 从而可以利用停止定理和 Markov 不等式建立 (1.9) 的上界.

注 1.3 考虑复合 Poisson 过程

$$Y_t = \sum_{k=1}^{N_t} \eta_k.$$

假设 η_k 的分布函数是 F , 且对任意 $\lambda > 0$, 有

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\{\lambda x\} F(dx) < +\infty, \quad (1.13)$$

则容易得到

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left\{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2} x^2\right\} F(dx) \leq \int_{\mathbb{R}} \left(1 + \lambda x + \frac{\lambda^2}{2} x^2\right) F(dx). \quad (1.14)$$

取 $f(\lambda) = g(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2}$, 利用定理 1.1, 可得

$$P\left(\text{存在某个 } t > 0, \text{ 使得 } Y_t \geq t E \eta_1 + x, \sum_{k \leq N_t} |\eta_k|^2 \leq v^2, t \leq \frac{w^2}{E \eta_1^2}\right)$$

$$\leq \exp \left\{ -\frac{x^2}{2(v^2 + w^2)} \right\}.$$

该结果实际上是指数矩条件下独立同分布随机变量的随机和的次 Gauss 型尾概率不等式.

本文余下内容的结构如下. 第 2 节构造一个新的局部鞅, 并证明定理 1.1. 第 3 节应用定理 1.1 得到一些具体的不等式. 第 4 节研究矩阵值连续时间局部鞅. 矩阵鞅在很多问题中有广泛应用, 如时间相依随机系统的统计学习等. 关于离散时间随机矩阵及矩阵鞅的集中不等式, 文献 [16–19] 已有广泛讨论. 最近, Bacry 等 [20] 得到了连续时间矩阵鞅的一个有趣的指数型集中不等式. 本文受第 2 节局部鞅的启发, 基于随机矩阵的迹, 构造一个新的指数上鞅, 从而推广和改进了 Bacry 等 [20] 的结果.

2 定理 1.1 的证明

为了证明定理 1.1, 我们需要构造一个新的局部鞅. 定义

$$Q_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (\exp(\lambda x - g(\lambda)x^2) - \lambda x - 1) \nu^M(ds, dx), \quad (2.1)$$

$$L_t = \lambda M_t - g(\lambda) \sum_{s \leq t} (\Delta M_s)^2 - Q_t. \quad (2.2)$$

引理 2.1 在定理 1.1 的条件下, $e^L := (e^{L_t})_{t \geq 0}$ 是一个局部鞅.

证明 首先, 由 Itô 公式 (详见文献 [15, 第 1 章定理 4.57]) 有

$$e^{L_t} = 1 + e^{L-} \cdot L_t + \sum_{s \leq t} (e^{L_s} - e^{L_{s-}} - e^{L_{s-}} \Delta L_s). \quad (2.3)$$

注意到 $A = (A_t)_{t \geq 0}$ 是一个适应的连续增过程, 则对 $t > 0$, 有 $\Delta Q_t = 0$, 于是,

$$\Delta L_t = \lambda \Delta M_t - g(\lambda) (\Delta M_t)^2.$$

令 μ^L 为 L 的跳测度, 则有

$$(e^x - 1 - x) * \mu^L = (e^{\lambda x - g(\lambda)x^2} - 1 - \lambda x + g(\lambda)x^2) * \mu^M,$$

并有

$$\begin{aligned} & \sum_{s \leq t} (e^{L_s} - e^{L_{s-}} - e^{L_{s-}} \Delta L_s) \\ &= e^{L-} \cdot ((e^x - 1 - x) * \mu^L)_t \\ &= e^{L-} \cdot ((e^{\lambda x - g(\lambda)x^2} - 1) * \mu^M)_t - \lambda e^{L-} \cdot (x * \mu^M)_t \\ & \quad + g(\lambda) e^{L-} \cdot (x^2 * \mu^M)_t. \end{aligned} \quad (2.4)$$

注意到 (1.3) 和 (2.2), 有

$$\begin{aligned} e^{L-} \cdot L_t &= e^{L-} \cdot \left(\lambda M - g(\lambda) \sum_{s \leq \cdot} (\Delta M_s)^2 - Q \right)_t \\ &= \lambda e^{L-} \cdot (x * (\mu^M - \nu^M))_t - g(\lambda) e^{L-} \cdot (x^2 * \mu^M)_t - e^{L-} \cdot Q_t. \end{aligned} \quad (2.5)$$

因此, 将 (2.4) 和 (2.5) 代入 (2.3), 可得

$$\begin{aligned}
 e^{L_t} &= 1 + e^{L_-} \cdot L_t + \sum_{s \leq t} (e^{L_s} - e^{L_{s-}} - e^{L_{s-}} \Delta L_s) \\
 &= 1 + \lambda e^{L_-} \cdot (x * (\mu^M - \nu^M))_t - g(\lambda) e^{L_-} \cdot (x^2 * \mu^M)_t \\
 &\quad - e^{L_-} \cdot Q_t + e^{L_-} \cdot ((e^{\lambda x - g(\lambda)x^2} - 1) * \mu^M)_t - \lambda e^{L_-} \cdot (x * \mu^M)_t \\
 &\quad + g(\lambda) e^{L_-} \cdot (x^2 * \mu^M)_t \\
 &= 1 + e^{L_-} \cdot ((e^{\lambda x - g(\lambda)x^2} - 1) * (\mu^M - \nu^M))_t.
 \end{aligned}$$

由于 $(e^{\lambda x - g(\lambda)x^2} - 1) * (\mu^M - \nu^M)$ 是一个局部鞅, 故 e^L 是一个局部鞅. 引理证毕. $\square$

注 2.1 由于 $A = (A_t)_{t \geq 0}$ 是一个适应的连续增过程, 故 $Q = (Q_t)_{t \geq 0}$ 没有跳, 这样, $L = (L_t)_{t \geq 0}$ 的跳仅来自过程 $M = (M_t)_{t \geq 0}$. 我们猜测, 即使 A 不连续, 引理仍然成立, 但是其证明会比较复杂.

定理 1.1 的证明 令

$$B_t = \left\{ M_t \geq x, \sum_{s \leq t} |\Delta M_s|^2 \leq v^2, \langle M, M \rangle_t \leq w^2 \right\}.$$

定义停时

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : B_t \text{ 发生}\}.$$

记 $S_t = e^{L_t}$. 对于 $S = (S_t)_{t \geq 0}$, 由停止定理得

$$ES_\tau = ES_0 = 1. \quad (2.6)$$

由 (1.11), 有

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} (\exp\{\lambda x - g(\lambda)x^2\} - \lambda x - 1) \nu^M(ds, dx) \leq f(\lambda) \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x^2 \nu^M(ds, dx) = f(\lambda) \langle M, M \rangle_t. \quad (2.7)$$

注意到, 在集合 $B = \bigcup_{0 \leq t \leq T} B_t$ 上,

$$S_\tau \geq \exp\{\lambda x - g(\lambda)v^2 - f(\lambda)w^2\}.$$

因此,

$$ES_\tau \geq ES_\tau \mathbf{1}_B \geq \exp\{\lambda x - g(\lambda)v^2 - f(\lambda)w^2\} P(B). \quad (2.8)$$

结合 (2.6) 可得

$$P(B) \leq \exp\{-\lambda x + g(\lambda)v^2 + f(\lambda)w^2\},$$

定理 1.1 证毕. $\square$

3 定理 1.1 的应用

本节利用定理 1.1 推导出一系列关于纯断局部鞅的集中不等式. 注意到, 条件 (1.11) 在定理 1.1 的证明中起了关键作用. 对于下面的特殊情形, 我们需要选择函数 $f(\lambda)$ 和 $g(\lambda)$, 并验证条件 (1.11).

3.1 纯断局部鞅的 Bernstein 不等式

许多文献已经研究了连续时间鞅的 Bernstein 型不等式. 例如, van de Geer^[11] 给出了 Bernstein 条件下局部鞅的 Bernstein 不等式, Dzharapadze 和 van Zanten^[13] 得到了局部平方可积鞅的 Bernstein 型不等式, 文献 [14] 建立了多元点过程随机积分的 Bernstein 型不等式. 作为定理 1.1 的应用, 我们获得下列结果:

定理 3.1 令 $M = (M_t)_{t \geq 0}$ 如定理 1.1 中定义, 并假设对任意 $t > 0, \lambda > 0$, 有

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \exp\{\lambda x\} \nu^M(ds, dx) < \infty. \quad (3.1)$$

则对所有 $x, v, w > 0$, 有

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\text{存在某个 } t > 0, \text{使得 } M_t \geq x, \sum_{s \leq t} |\Delta M_s|^2 \leq v^2, \langle M, M \rangle_t \leq w^2\right) \\ & \leq \exp\left\{-\frac{x^2}{2(v^2 + w^2)}\right\}. \end{aligned}$$

证明 注意到初等不等式 (参见文献 [13, (3.6)])

$$\left|\exp\left\{x - \frac{1}{2}x^2\right\} - 1 - x\right| \leq \frac{1}{2}x^2, \quad x \in \mathbb{R},$$

因此, 对任意 $\lambda \geq 0$, 有

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}x^2\right\} \nu^M(ds, dx) \leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(1 + \lambda x + \frac{\lambda^2}{2}x^2\right) \nu^M(ds, dx). \quad (3.2)$$

定义 $f(\lambda) = g(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2}$, 利用定理 1.1, 可直接得到

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\text{存在某个 } t > 0, \text{使得 } M_t \geq x, \sum_{s \leq t} |\Delta M_s|^2 \leq v^2, \langle M, M \rangle_t \leq w^2\right) \\ & \leq \inf_{\lambda \geq 0} \exp\left\{-\lambda x + \frac{\lambda^2}{2}v^2 + \frac{\lambda^2}{2}w^2\right\} \\ & = \exp\left\{-\frac{x^2}{2(v^2 + w^2)}\right\}, \end{aligned}$$

其中下确界可在 $\lambda = \frac{x}{v^2 + w^2}$ 点达到. □

经典 Bernstein 不等式可以作为定理 1.1 的推论得到.

定理 3.2 令 $M = (M_t)_{t \geq 0}$ 如定理 1.1 中定义, 并假设存在正常数 c 使得对任意 $t > 0, k \geq 3$, 有

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} x^k \nu^M(ds, dx) \leq \frac{k!c^{k-2}}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x^2 \nu^M(ds, dx), \quad (3.3)$$

则对所有 $x, w > 0$, 有

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\text{存在某个 } t > 0, \text{使得 } M_t \geq x, \langle M, M \rangle_t \leq w^2) \\ & \leq \exp\left\{-\frac{\sqrt{w^2 + 2cx}}{c^2}(\sqrt{w^2 + 2cx} - w)\right\} \\ & \leq \exp\left\{-\frac{x^2}{2(w^2 + cx)}\right\}. \end{aligned}$$

证明 由 (3.3), 对于 $0 < \lambda < \frac{1}{c}$, 有

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x) \nu^M(ds, dx) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \nu^M(ds, dx) \\ &\leq \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x^2 \nu^M(ds, dx) \sum_{k=2}^{\infty} (\lambda c)^{k-2} \\ &= \frac{\lambda^2}{2(1-\lambda c)} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x^2 \nu^M(ds, dx). \end{aligned}$$

定义 $g(\lambda) = 0$, $f(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2(1-\lambda c)}$, 则

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\text{存在某个 } t > 0, \text{ 使得 } M_t \geq x, \langle M, M \rangle_t \leq w^2) \\ &\leq \inf_{\lambda \in (0, \frac{1}{c})} \exp \left\{ -\lambda x + \frac{\lambda^2}{2(1-\lambda c)} w^2 \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{\sqrt{w^2 + 2cx}}{c^2} (\sqrt{w^2 + 2cx} - w) \right\} \\ &\leq \exp \left\{ -\frac{x^2}{2(w^2 + cx)} \right\}, \end{aligned}$$

其中下确界可在 $\lambda = \frac{1}{c}(1 - \sqrt{\frac{w^2}{w^2 + 2cx}})$ 点达到. □

3.2 纯断局部鞅的 de la Peña 不等式

文献 [3] 研究了一类特殊类型的指数不等式, 称其为 de la Peña 不等式. 作为定理 1.1 的推论, 我们可以给出纯断局部鞅的 de la Peña 不等式.

定理 3.3 令 $M = (M_t)_{t \geq 0}$ 如定理 1.1 中定义, 并假设对任意 $t > 0$ 和 $\lambda > 0$, 有

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \exp \left\{ \lambda x - \frac{\lambda^2}{2} x^2 \right\} \nu^M(ds, dx) \leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (1 + \lambda x) \nu^M(ds, dx), \quad (3.4)$$

则对所有 $x \geq 0$, $\beta > 0$, $y > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \left(\text{存在某个 } t > 0, \text{ 使得 } M_t \geq \left(\alpha + \beta \sum_{s \leq t} |\Delta M_s|^2 \right) x, \sum_{s \leq t} |\Delta M_s|^2 \geq y^2 \right) \\ &\leq \exp \left\{ -x^2 \left(\alpha \beta + \frac{\beta^2 y^2}{2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

证明 令

$$B_t = \left\{ M_t \geq \left(\alpha + \beta \sum_{s \leq t} |\Delta M_s|^2 \right) x, \sum_{s \leq t} |\Delta M_s|^2 \geq y^2 \right\},$$

并令 $B = \bigcup_{0 \leq t \leq T} B_t$. 定义

$$\tau = \inf \{ t \geq 0 : B_t \text{ 发生} \}.$$

对任意 $\lambda > 0$, 有

$$\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{E} \exp \left\{ \frac{\lambda}{4} M_\tau - \left(\frac{\alpha \lambda x}{4} + \frac{\beta \lambda x}{4} \sum_{s \leq \tau} |\Delta M_s|^2 \right) \right\} \mathbf{1}_B$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \left\{ -\frac{\alpha\lambda x}{4} \right\} \mathbb{E} \exp \left\{ \frac{\lambda}{4} M_\tau - \frac{\lambda^2}{8} \sum_{s \leq \tau} |\Delta M_s|^2 + \left(\frac{\lambda^2}{8} - \frac{\beta\lambda x}{4} \right) \sum_{s \leq \tau} |\Delta M_s|^2 \right\} \mathbf{1}_B \\
&\leq \exp \left\{ -\frac{\alpha\lambda x}{4} \right\} \sqrt{\mathbb{E} \exp \left\{ \frac{\lambda}{2} M_\tau - \frac{\lambda^2}{4} \sum_{s \leq \tau} |\Delta M_s|^2 \right\} \mathbf{1}_B} \\
&\quad \times \sqrt{\mathbb{E} \exp \left\{ \left(\frac{\lambda^2}{4} - \frac{\beta\lambda x}{2} \right) \sum_{s \leq \tau} |\Delta M_s|^2 \right\} \mathbf{1}_B}. \tag{3.5}
\end{aligned}$$

利用 (2.1) 和 (2.2), 并注意到 (3.4), 有 $\mathbb{E} S_\tau = \mathbb{E} S_0 = 1$. 因此,

$$\mathbb{E} \exp \left\{ \frac{\lambda}{2} M_\tau - \frac{\lambda^2}{4} \sum_{s \leq \tau} |\Delta M_s|^2 \right\} \mathbf{1}_B \leq \sqrt{\mathbb{E} e^{L_\tau}} \sqrt{\mathbb{E} e^{Q_\tau} \mathbf{1}_B} \leq \mathbb{P}(B)^{1/2}. \tag{3.6}$$

选择 $\lambda = \beta x$, 有

$$\mathbb{E} \exp \left\{ -\frac{\beta^2 x^2}{4} \sum_{s \leq \tau} |\Delta M_s|^2 \right\} \mathbf{1}_B \leq \exp \left\{ -\frac{\beta^2 x^2 y^2}{8} \right\} \mathbb{P}(B). \tag{3.7}$$

将 (3.6) 和 (3.7) 代入 (3.5), 有

$$\mathbb{P}(B) \leq \exp \left\{ -\frac{\alpha\beta x^2}{4} \right\} \exp \left\{ -\frac{\beta^2 x^2 y^2}{8} \right\} \mathbb{P}(B)^{3/4}.$$

所以,

$$\mathbb{P}(B) \leq \exp \left\{ -x^2 \left(\alpha\beta + \frac{\beta^2 y^2}{2} \right) \right\}.$$

证毕. □

3.3 具有有界跳的纯断局部鞅的集中不等式

定理 3.4 令 $M = (M_t)_{t \geq 0}$ 如定理 1.1 中定义, 并假设对任意 $t > 0$, 有 $|\Delta M_t| \leq 1$ a.s., 则对所有 $x, v, w \geq 0$, 有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P} \left(\text{存在某个 } t > 0, \text{ 使得 } M_t \geq x, \sum_{s \leq t} |\Delta M_s|^2 \leq v^2, \langle M, M \rangle_t \leq w^2 \right) \\
&\leq \left(\frac{v^2 + x}{v^2} \right)^{\frac{v^2}{2}} \left(\frac{w^2}{w^2 + x} \right)^{\frac{w^2 + x}{2}}.
\end{aligned}$$

证明 定义

$$\begin{aligned}
B &= \left\{ \text{存在某个 } t > 0, \text{ 使得 } M_t \geq x, \sum_{s \leq t} |\Delta M_s|^2 \leq v^2 \right\}, \\
\tau &= \inf \left\{ t \geq 0 : M_t \geq x, \sum_{s \leq t} |\Delta M_s|^2 \leq v^2 \right\}.
\end{aligned}$$

注意到初等不等式 (参见文献 [8, (4.12)])

$$\exp \{ \lambda x + x^2 (\lambda + \log(1 - \lambda)) \} \leq 1 + \lambda x, \quad \text{对于 } \lambda \in [0, 1), \quad x \geq -1,$$

因此,

$$\int_0^t \int_{-1}^{\infty} \exp\{\lambda x + (\lambda + \log(1 - \lambda))x^2\} \nu^M(ds, dx) \leq \int_0^t \int_{-1}^{\infty} (1 + \lambda x) \nu^M(ds, dx). \quad (3.8)$$

由于对任意 $t > 0$, 有 $\Delta M_t \geq -1$, 通过选取 $f(\lambda) = 0$, $g(\lambda) = -(\lambda + \log(1 - \lambda))$, 可以看出 (3.8) 可推导出 (1.10). 注意到 $S = (S_t)_{t \geq 0}$ 是一个局部鞅, 其中

$$S_t = \frac{\exp\{\lambda M_t + (\lambda + \log(1 - \lambda)) \sum_{s \leq t} (\Delta M_s)^2\}}{\exp\{\int_0^t \int_{-1}^{+\infty} (\exp\{\lambda x + (\lambda + \log(1 - \lambda))x^2\} - \lambda x - 1) \nu^M(ds, dx)\}}.$$

所以, (3.8) 可推导出

$$S_t \mathbf{1}_B \geq \exp\{\lambda x + (\lambda + \log(1 - \lambda))v^2\}.$$

利用文献 [8] 中的结论, 有

$$P(B) \leq \inf_{\lambda \in [0, 1]} \exp\{-\lambda x - (\lambda + \log(1 - \lambda))v^2\} = \left(\frac{v^2 + x}{v^2}\right)^{v^2} e^{-x}.$$

利用文献 [13] 中的结论, 在定理的条件下, 有

$$P(\text{存在某个 } t > 0, \text{ 使得 } M_t \geq x, \langle M, M \rangle_t \leq w^2) \leq \left(\frac{w^2}{w^2 + x}\right)^{w^2 + x} e^x.$$

结合上述结论, 利用 $\min\{a, b\} \leq (ab)^{1/2}$, 便可证明结论. $\square$

4 矩阵值局部鞅

在很多问题的讨论中, 会涉及连续时间矩阵值局部鞅, 如 Dyson Brown 运动、交互作用的粒子系统及时变系统的统计学习等. 本节专门研究与矩阵值纯断局部鞅相关的指数不等式.

固定 $d \geq 1$, 矩阵值随机过程 $\mathbf{M} = (\mathbf{M}_t)_{t \geq 0}$ 是一族定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ 上的 $d \times d$ 维随机矩阵. 如果每个元素 $(\mathbf{M}_t)_{ij}$ 都是纯断局部鞅, 则称 $\mathbf{M}$ 为矩阵值纯断局部鞅. 对于每个元素 $(\mathbf{M}_t)_{ij}$, 使用前面所介绍的符号, 令

$$\mu^{\mathbf{M}_t} = (\mu^{(\mathbf{M}_t)_{ij}}), \quad \nu^{\mathbf{M}_t} = (\nu^{(\mathbf{M}_t)_{ij}})$$

和

$$(\mathbf{M}_t)_{ij} = x * ((\mu^{\mathbf{M}_t} - \nu^{\mathbf{M}_t})_{ij}), \quad (\nu^{\mathbf{M}_t})_{ij}(dt, dx) = d(A_t)_{ij} K_{ij}(\omega, t; dx). \quad (4.1)$$

给定两个矩阵值随机过程 $\mathbf{M} = (\mathbf{M}_t)_{t \geq 0}$ 和 $\mathbf{H} = (\mathbf{H}_t)_{t \geq 0}$, 其中 $\mathbf{H}$ 为 $d \times d$ 维矩阵. 定义 $\int_0^t \mathbf{H}_s d\mathbf{M}_s$ 为随机矩阵, 其每个元素为

$$\left(\int_0^t \mathbf{H}_s d\mathbf{M}_s\right)_{i,j} = \sum_{l=1}^d \int_0^t (\mathbf{H}_s)_{i,l} d(\mathbf{M}_s)_{l,j}.$$

对于矩阵, 我们需要引入一些概念和符号. 对于一个 $d \times d$ 维实值矩阵 $\mathbf{X}$, 令 $\text{tr} \mathbf{X}$ 表示迹, $\|\mathbf{X}\|_{op}$ 表示算子范数, $\lambda_{\max}(\mathbf{X})$ 表示最大特征根, $\mathbf{X}^{\odot k}$ 代表 Hadamard 幂, 即其每个元素是 $\mathbf{X}$ 相关元素的第 k 次幂. 矩阵指数 $e^{\mathbf{X}}$ 定义如下:

$$e^{\mathbf{X}} = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{X}^n}{n!}, \quad (4.2)$$

其中 $\mathbf{I}$ 是单位阵.

定义 $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_t)_{t \geq 0}$ 是一个矩阵值随机过程, 其每个元素为矩阵 $(\sum_{s \leq t} (\Delta \mathbf{M}_s)^{\odot 2})_{t \geq 0}$ 中相应位置元素的可料补偿子, 定义

$$Z_t = \sum_{i=1}^d (x^2(x-1)^2 * (\nu^{\mathbf{M}})_{i,i})_t.$$

定理 4.1 令 $\mathbf{M} = (\mathbf{M}_t)_{t \geq 0}$ 是一个 $d \times d$ 对称矩阵, 其元素都是形如 (4.1) 的纯断局部鞅, 且 $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_t)_{t \geq 0}$ 是一个适应的非负连续矩阵值增过程. 假设 $\mathcal{R}_t$ 是半正定的, 并假设 $\mathbf{M}$ 中的元素不能同时发生跳, 且对于所有的 $t \geq 0$ 和 $1 \leq i, j \leq d$, 有 $|\Delta(\mathbf{M}_t)_{ij}| \leq 1$, 则对所有的 $x > 0, w > 0$, 有

$$\mathbb{P}\left(\left\|\mathbf{M}_t - \sum_{s \leq t} (\Delta \mathbf{M}_s)^{\odot 2}\right\|_{op} \geq 2(wx + x^2), Z_t \leq w^2\right) \leq de^{-x^2}. \quad (4.3)$$

进一步地, 有

$$\mathbb{P}\left(\|\mathbf{M}_t\|_{op} \geq 3wx + 2x^2, \left\|\sum_{s \leq t} (\Delta \mathbf{M}_s)^{\odot 2}\right\|_{op} \leq wx, Z_t \leq w^2\right) \leq de^{-x^2}. \quad (4.4)$$

首先, 需要一些引理. 引理 4.1 和 4.2 可参见文献 [20].

引理 4.1 令 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 为两个对称随机矩阵. 假设存在一个正常数 α 使得

$$\mathrm{tr} \mathbb{E} e^{\mathbf{X} - \mathbf{Y}} \leq \alpha,$$

则对任意 $x > 0$, 有

$$\mathbb{P}(\lambda_{\max}(\mathbf{X}) \geq \lambda_{\max}(\mathbf{Y}) + x) \leq \alpha e^{-x}.$$

引理 4.2 令 $\mathbf{M} = (\mathbf{M}_t)_{t \geq 0}$ 是一个 $d \times d$ 维矩阵值纯断局部鞅, 则

$$d(\mathrm{tr} \exp(\mathbf{M}_t)) = \mathrm{tr}(\exp(\mathbf{M}_{t-}) d\mathbf{M}_t) + \Delta \mathrm{tr} \exp(\mathbf{M}_t) - \mathrm{tr}(\exp(\mathbf{M}_{t-}) \Delta \mathbf{M}_t).$$

令 $\mathbf{M} = (\mathbf{M}_t)_{t \geq 0}$ 是一个 $d \times d$ 维对称矩阵值纯断局部鞅, 且 $\mathbf{M}_0 = \mathbf{0}$. 对于每一个 $\lambda > 0$, 定义

$$\mathbf{U}_t(\lambda) = \sum_{s \leq t} (\exp(\lambda \Delta \mathbf{M}_s - \lambda (\Delta \mathbf{M}_s)^{\odot 2}) - \lambda \Delta \mathbf{M}_s - \mathbf{I}).$$

令 $\mathbf{G}_t(\lambda)$ 中每个元素是矩阵 $\mathbf{U}_t(\lambda)$ 中相应位置元素的可料补偿子, 定义

$$L_t(\lambda) = \mathrm{tr} \exp\left(\lambda \mathbf{M}_t - \lambda \sum_{s \leq t} (\Delta \mathbf{M}_s)^{\odot 2} - \mathbf{G}_t(\lambda)\right). \quad (4.5)$$

引理 4.3 $L = (L_t(\lambda))_{t \geq 0}$ 是一个上鞅.

证明 记

$$\mathbf{Q}_t = \sum_{s \leq t} (\Delta \mathbf{M}_s)^{\odot 2}, \quad \mathbf{X}_t = \mathbf{M}_t - \mathbf{Q}_t - \mathbf{G}_t.$$

由引理 4.2, 对于 $t_1 < t_2$, 有

$$L_{t_2} - L_{t_1} = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{tr}(\exp(\mathbf{X}_{t-}) d\mathbf{X}_t) + \sum_{t_1 \leq t \leq t_2} (\Delta \mathrm{tr} \exp(\mathbf{X}_t) - \mathrm{tr}(\exp(\mathbf{X}_{t-}) \Delta \mathbf{X}_t))$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{t_1}^{t_2} \text{tr}(\exp(\mathbf{X}_{t-})d\mathbf{M}_t) - \int_{t_1}^{t_2} \text{tr}(\exp(\mathbf{X}_{t-})d\mathbf{Q}_t) - \int_{t_1}^{t_2} \text{tr}(\exp(\mathbf{X}_{t-})d\mathbf{G}_t) \\
 &\quad + \sum_{t_1 \leq t \leq t_2} (\text{tr} \exp(\mathbf{X}_{t-} + \Delta\mathbf{M}_t - (\Delta\mathbf{M}_t)^{\odot 2}) - \text{tr} \exp(\mathbf{X}_{t-})) \\
 &\quad - \text{tr}(\exp(\mathbf{X}_{t-})\Delta\mathbf{M}_t) + \text{tr}(\exp(\mathbf{X}_{t-})(\Delta\mathbf{M}_t)^{\odot 2}).
 \end{aligned}$$

注意到, 对于对称矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$, 有 $\text{tr} e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} \leq \text{tr} e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}}$. 因此,

$$\begin{aligned}
 L_{t_2} - L_{t_1} &\leq \int_{t_1}^{t_2} \text{tr}(\exp\{\mathbf{X}_{t-}\}d\mathbf{M}_t) - \int_{t_1}^{t_2} \text{tr}(\exp\{\mathbf{X}_{t-}\}d\mathbf{G}_t) \\
 &\quad + \sum_{t_1 \leq t \leq t_2} \text{tr}(\exp\{\mathbf{X}_{t-}\}(\exp\{\Delta\mathbf{M}_s - (\Delta\mathbf{M}_s)^{\odot 2}\} - \Delta\mathbf{M}_s - \mathbf{I})) \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \text{tr}(\exp(\mathbf{X}_{t-})d\mathbf{M}_t) + \int_{t_1}^{t_2} \text{tr}(\exp(\mathbf{X}_{t-})d(\mathbf{U}_t - \mathbf{G}_t)).
 \end{aligned}$$

由于 $\mathbf{G}$ 中每个元素是矩阵 $\mathbf{U}$ 中相应位置元素的可料补偿子, 因此, $L = (L_t)_{t \geq 0}$ 是一个上鞅. $\square$

注 4.1 在定理 4.1 的证明中, 引理 4.3 起着关键作用. (4.5) 中 L_t 的构造受到引理 2.1 的启发. 结论 (4.4) 事实上可以由文献 [20] 得到; 然而, 如果没有引理 4.3, 则无法得到更强的不等式 (4.3).

定理 4.1 的证明 令 $\lambda > 0$. 由 (4.3), $(L_t(\lambda))_{t \geq 0}$ 是一个上鞅. 由 (4.2) 知, $\mathbf{G}_t(\lambda)$ 是

$$\sum_{s \leq t} \sum_{k \geq 2} \frac{\lambda^k (\Delta\mathbf{M}_s - (\Delta\mathbf{M}_s)^{\odot 2})^k}{k!} - \lambda \sum_{s \leq t} (\Delta\mathbf{M}_s)^{\odot 2}$$

的补偿子. 因此,

$$\mathbf{G}_t(\lambda) = \sum_{k \geq 2} \frac{\lambda^k \mathcal{V}(k)_t}{k!} - \lambda \mathcal{R}_t,$$

其中 $\mathcal{V}(k)$ 的每个元素是矩阵 $\sum_{s \leq t} (\Delta\mathbf{M}_s - (\Delta\mathbf{M}_s)^{\odot 2})^k$ 中相应位置元素的可料补偿子. 注意到 $\mathbf{M}$ 的元素不能同时发生跳, $|\Delta(\mathbf{M}_t)_{ij}| \leq 1$, 且 $\mathcal{R}_t$ 是半正定的. 由文献 [17, 引理 6.7] 可知, $(e^\lambda - \lambda - 1)\mathbf{\Gamma}_t - \mathbf{G}_t(\lambda)$ 是半正定的, 其中 $\mathbf{\Gamma}_t$ 是一个对角阵, 对角线元素为 $(x^2(x-1)^2 * (\nu^{\mathbf{M}})_{i,i})_t$. 故

$$\text{tr} \mathbf{G}_t(\lambda) \leq (e^\lambda - \lambda - 1)Z_t \tag{4.6}$$

且

$$\mathbb{E} \text{tr} \exp \left\{ \lambda \mathbf{M}_t - \lambda \sum_{s \leq t} (\Delta\mathbf{M}_s)^{\odot 2} - (e^\lambda - \lambda - 1)\mathbf{\Gamma}_t \right\} \leq \mathbb{E} L_t(\lambda) \leq \mathbb{E} L_0(\lambda) = d.$$

这样, 由引理 4.1 得

$$\mathbb{P} \left(\lambda_{\max} \left(\mathbf{M}_t - \sum_{s \leq t} (\Delta\mathbf{M}_s)^{\odot 2} \right) \geq \frac{e^\lambda - \lambda - 1}{\lambda} \lambda_{\max}(\mathbf{\Gamma}_t) + \frac{x^2}{\lambda} \right) \leq d e^{-x^2}.$$

由于 $\lambda_{\max}(\mathbf{\Gamma}_t) \leq Z_t$, 对任意 $\lambda > 0$, 有

$$\mathbb{P} \left(\lambda_{\max} \left(\mathbf{M}_t - \sum_{s \leq t} (\Delta\mathbf{M}_s)^{\odot 2} \right) \geq \frac{e^\lambda - \lambda - 1}{\lambda} w^2 + \frac{x^2}{\lambda}, Z_t \leq w^2 \right) \leq d e^{-x^2}.$$

注意到一个初等不等式 (参见文献 [20])

$$e^\lambda - \lambda - 1 \leq \frac{3\lambda^2}{2(3-\lambda)}, \quad \text{对于 } 0 < \lambda < 3,$$

故

$$P\left(\lambda_{\max}\left(M_t - \sum_{s \leq t} (\Delta M_s)^{\odot 2}\right) \geq 2(wx + x^2), Z_t \leq w^2\right) \leq de^{-x^2},$$

即

$$P\left(\left\|M_t - \sum_{s \leq t} (\Delta M_s)^{\odot 2}\right\|_{op} \geq 2(wx + x^2), Z_t \leq w^2\right) \leq de^{-x^2}.$$

最后, 由三角不等式得

$$\begin{aligned} P\left(\|M_t\|_{op} \geq 3wx + 2x^2, \left\|\sum_{s \leq t} (\Delta M_s)^{\odot 2}\right\|_{op} \leq wx, Z_t \leq w^2\right) \\ \leq P\left(\left\|M_t - \sum_{s \leq t} (\Delta M_s)^{\odot 2}\right\|_{op} \geq 2(wx + x^2), Z_t \leq w^2\right) \\ \leq de^{-x^2}. \end{aligned}$$

证毕. □

致谢 感谢审稿人对本文提出的宝贵意见.

参考文献

- 1 Freedman D A. On tail probabilities for martingales. *Ann Probab*, 1975, 3: 100–118
- 2 Hoeffding W. Probability inequalities for sums of bounded random variables. *J Amer Statist Assoc*, 1963, 58: 13–30
- 3 de la Peña V H. A general class of exponential inequalities for martingales and ratios. *Ann Probab*, 1999, 27: 537–564
- 4 de la Peña V H, Klass M J, Lai T. Self-normalized processes: Exponential inequalities, moment bounds and iterated logarithm laws. *Ann Probab*, 2004, 32: 1902–1933
- 5 Bercu B, Touati A. Exponential inequalities for self-normalized martingales with applications. *Ann Appl Probab*, 2008, 18: 1848–1869
- 6 Fan X, Grama I, Liu Q. Hoeffding's inequality for supermartingales. *Stochastic Process Appl*, 2012, 122: 3545–3559
- 7 Rio E. Extensions of the Hoeffding-Azuma inequalities. *Electron Commun Probab*, 2013, 18: 6pp
- 8 Fan X, Grama I, Liu Q. Exponential inequalities for martingales with applications. *Electron J Probab*, 2015, 20: 22pp
- 9 Bercu B, Touati T. New insights on concentration inequalities for self-normalized martingales. *Electron Commun Probab*, 2019, 24: 12pp
- 10 Bercu B, Delyon B, Rio E. Concentration Inequalities for Sums and Martingales. Cham: Springer, 2015
- 11 van de Geer S. Exponential inequalities for martingales, with application to maximum likelihood estimation for counting processes. *Ann Statist*, 1995, 23: 1779–1801
- 12 Khoshnevisan D. Deviation inequalities for continuous martingales. *Stochastic Process Appl*, 1996, 65: 17–30
- 13 Dzhaparidze K, van Zanten J H. On Bernstein-type inequalities for martingales. *Stochastic Process Appl*, 2001, 93: 109–117
- 14 Wang H, Lin Z, Su Z. On Bernstein type inequalities for stochastic integrals of multivariate point processes. *Stochastic Process Appl*, 2019, 129: 1605–1621
- 15 Jacod J, Shiryaev A. Limit Theorems for Stochastic Processes, 2nd ed. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 288. Berlin: Springer, 2003
- 16 Tropp J. Freedman's inequality for matrix martingales. *Electron Commun Probab*, 2011, 16: 262–270
- 17 Tropp J. User-friendly tail bounds for sums of random matrices. *Found Comput Math*, 2012, 12: 389–434

- 18 Mackey L, Jordan M I, Chen R Y, et al. Matrix concentration inequalities via the method of exchangeable pairs. [Ann Probab](#), 2014, 42: 906–945
- 19 Minsker S. On some extensions of Bernstein’s inequality for self-adjoint operators. [Statist Probab Lett](#), 2017, 127: 111–119
- 20 Bacry E, Gaïffas S, Muzy J-F. Concentration inequalities for matrix martingales in continuous time. [Probab Theory Related Fields](#), 2018, 170: 525–553

Exponential concentration inequalities for purely discontinuous martingales

Zhonggen Su & Hanchao Wang

Abstract A novel exponential concentration inequality is obtained for purely discontinuous local martingales. The proof is largely based on a new exponential martingale and the optional time rule. As direct applications, we can derive the classical Bernstein type inequality, de la Peña’s inequality and the exponential concentration inequality for purely discontinuous local martingales under the exponential moments or bounded jumps assumption. Besides, we consider the continuous time matrix-valued local martingales and obtain a refined concentration inequality for norms of matrix operators through a new exponential supermartingale for traces, which is an improvement of Bacry et al. (2018).

Keywords exponential concentration inequality, purely discontinuous local martingales, Laplace transform

MSC(2020) 60E15, 60G46, 60G57

doi: 10.1360/SCM-2020-0757