中国科学 : 数学 2023 年 第 53 卷 第 2 期 : 249 ～ 260
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS
论 文

正交极空间 $Q^+(7,q)$ 中的 $\mathrm{PSU}_3(q)$- 不变奇妙集

献给朱烈教授 80 华诞

冯涛[1], 李伟聪[2,3], 陶然[4,5*]

1. 浙江大学数学科学学院, 杭州 310027;
2. 南方科技大学数学系, 深圳 518055;
3. 南科大杰曼诺夫数学中心, 深圳 518055;
4. 山东大学教育部密码技术与信息安全重点实验室, 青岛 266237;
5. 山东大学网络空间安全学院, 青岛 266237
E-mail: tfeng@zju.edu.cn, liwc3@sustech.edu.cn, rtao@sdu.edu.cn

收稿日期: 2022-04-27; 接受日期: 2022-08-29; 网络出版日期: 2022-09-26; * 通信作者
国家重点研发计划 (批准号: 2021YFA1001000) 和国家自然科学基金 (批准号: 12171428) 资助项目

摘要 设 $q \equiv 2 \pmod 3$ 为一个素数幂. 借助于 Kantor 的 $Q^+(7,q)$ 模型, 本文研究了正交极空间 $Q^+(7,q)$ 的点集在群 $\mathrm{PSU}_3(q)$ 作用下的轨道结构, 由此构造出新的自同构群为 $\mathrm{PSU}_3(q)$ 的 (q^2+q)- 和 q^3- 卵形体 (ovoid). 在此模型下, 本文确定 $Q^+(7,q)$ 的所有 $\mathrm{PSU}_3(q)$- 不变奇妙集, 证明其一定是酉型卵形体、新构造的两类 m- 卵形体或它们的补集.

关键词 奇妙集 卵形体 正交极空间 酉群

MSC (2020) 主题分类 51A50, 51E20, 05B25

1 引言

假设 $\mathcal{S}$ 是一个秩为 r 的有限经典极空间, 并用 $\perp$ 表示其上的极映射. $\mathcal{S}$ 的点共线图 $\Gamma(\mathcal{S})$ 是一个强正则图, 其顶点集为 $\mathcal{S}$ 中的点, 两个顶点相邻当且仅当它们正交 (参见文献 [4]). 用 A 表示 $\Gamma(\mathcal{S})$ 的邻接矩阵, 并用 $\mathbf{1}$ 表示长为 $|\mathcal{S}|$ 的全 1 向量. 给定极空间 $\mathcal{S}$ 中的一个非平凡集合 $\mathcal{M}$, 用 $\chi_{\mathcal{M}}$ 表示其示性向量, 即对于 $\mathcal{S}$ 中的点 P, 根据其是否在 $\mathcal{M}$ 中, 相应地有 $\chi_{\mathcal{M}}(P)=1$ 或 $\chi_{\mathcal{M}}(P)=0$. 如果 $\chi_{\mathcal{M}}-\frac{|\mathcal{M}|}{|\mathcal{S}|}\mathbf{1}$ 是矩阵 A 的特征向量, 则称 $\mathcal{M}$ 为该极空间 $\mathcal{S}$ 中的奇妙集 (intriguing set). 邻接矩阵 A 有两个受限的 (restricted) 特征值, 分别对应于两类奇妙集: i- 紧集 (tight set) 和 m- 卵形体 (ovoid), 其中 i 和 m 为它们对应的参数. 特别地, 1- 卵形体简称作卵形体.

奇妙集的概念最早由 Bamberg 等 [2] 在经典广义四边形中给出, 随后被 Bamberg 等 [1] 推广到了有限经典极空间. 它统一了此前有限几何中的多个概念, 并揭示了这些几何对象的代数意义. 奇妙集

英文引用格式: Feng T, Li W C, Tao R. $\mathrm{PSU}_3(q)$-invariant intriguing sets of orthogonal polar space $Q^+(7,q)$ (in Chinese). Sci Sin Math, 2023, 53: 249–260, doi: 10.1360/SSM-2022-0071

不但是重要的几何构型, 而且与图论和编码理论有密切的联系, 因此近些年来得到了广泛关注和研究, 详情参见文献 [1,5].

对于奇妙集的研究涉及较为深刻的群论和数论知识. 对于满足特定的传递性假设的奇妙集, 一般可以利用有限典型群的结构定理和深刻的表示论知识完全分类, 例如, Bamberg 和 Penttila [3] 对有限经典极空间中具有不可解自同构群的传递卵形体进行了分类. 三维射影空间中的 Cameron-Liebler 线族等价于 $Q^+(5,q)$ 中的紧集, 在文献 [11] 的构造中涉及极为复杂的指数和运算.

在低秩极空间中, 奇妙集的构造方面已经有大量工作, 可参见文献 [1,6–14] 及其中所列的参考文献. 当极空间的秩较大时, 已知的奇妙集构造比较稀少. 1982 年, Kantor [16] 利用群 $\mathrm{PGU}_3(q)$ 的 8 维绝对不可约表示构造了双曲正交极空间 $Q^+(7,q)$ 中的一类卵形体, 其中 $q\equiv 2 \pmod 3$. 这类卵形体称作酉型 (unitary) 卵形体. 本文将采用相同的模型, 研究特殊酉群 $\mathrm{PSU}_3(q)$ 在 $Q^+(7,q)$ 点集上的轨道结构, 从而得到 $Q^+(7,q)$ 上自同构群为 $\mathrm{PSU}_3(q)$ 的 (q^2+q)- 卵形体和 q^3- 卵形体, 并且对 $Q^+(7,q)$ 中的 $\mathrm{PSU}_3(q)$- 不变奇妙集进行完全分类.

针对本文的研究内容, 介绍下列定义与引理.

定义 1.1 [1] 令 q 是一个素数幂, $Q^+(7,q)$ 是双曲型正交极空间, 其极映射用 $\perp$ 表示. 给定极空间 $Q^+(7,q)$ 中的一个非平凡点集 $\mathcal{M}$, 如果 $|\mathcal{M}|=m(q^3+1)$ 并且

$$|P^\perp\cap\mathcal{M}|=\begin{cases} m(q^2+1)-q^2, & \text{如果 } P\in\mathcal{M},\\ m(q^2+1), & \text{如果 } P\in Q^+(7,q)\setminus\mathcal{M}, \end{cases} \tag{1.1}$$

则称 $\mathcal{M}$ 为 $Q^+(7,q)$ 中一个 m- 卵形体.

引理 1.1 [1] 令 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 分别为 $Q^+(7,q)$ 中的 m_1- 卵形体和 m_2- 卵形体.

(1) 如果 $\mathcal{M}_1$ 是 $\mathcal{M}_2$ 的子集, 则 $\mathcal{M}_2\setminus\mathcal{M}_1$ 是 $Q^+(7,q)$ 的 (m_2-m_1)- 卵形体;

(2) 如果 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 不相交, 则 $\mathcal{M}_1\cup\mathcal{M}_2$ 是 $Q^+(7,q)$ 的 (m_1+m_2)- 卵形体.

2 $Q^+(7,q)$ 的模型和 $\mathrm{PSU}_3(q)$ 的轨道结构

2.1 $Q^+(7,q)$ 的模型

令 $q=p^h$ 是一个素数幂, 满足 $q\equiv 2 \pmod 3$ 且 $q>2$; 令 $\mathbb{F}_q$ 表示有 q 个元素的有限域. 对于 $x\in\mathbb{F}_{q^2}$, 令 $\overline{x}$ 表示 x 的共轭, 即 $\overline{x}=x^q$; 定义从 $\mathbb{F}_{q^2}$ 到 $\mathbb{F}_q$ 上的迹函数为 $\mathrm{Tr}(x)=x+\overline{x}$. 令 V 是由如下矩阵构成的 $\mathbb{F}_q$ 上的 8 维向量空间:

$$M=\begin{pmatrix} \alpha & \beta & c\\ \gamma & a & \overline{\beta}\\ b & \overline{\gamma} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{F}_{q^2}$, $a,b,c\in\mathbb{F}_q$ 且 $\alpha+a+\overline{\alpha}=0$. 定义 V 上的一个二次型

$$Q(M)=\alpha^2+\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}^2+\mathrm{Tr}(\beta\gamma)+bc. \tag{2.2}$$

该二次型是非退化的, 其极化型 (polar form) 如下:

$$B(M,N)=Q(M+N)-Q(M)-Q(N)=\mathrm{tr}(MN), \tag{2.3}$$

其中 $\mathrm{tr}(MN)$ 表示矩阵 MN 的迹. 相应的极映射为

$$\langle v\rangle \mapsto v^{\perp} = \{x \in V : B(x,v) = 0\}.$$

由 (2.2) 所定义的 Q 是双曲二次型, 其定义的正交极空间 $Q^{+}(7,q)$ 的点集为

$$\mathcal{Q} = \{\langle M\rangle_{\mathbb{F}_q} : M \in V, Q(M) = 0\}, \tag{2.4}$$

其中 $\langle M\rangle_{\mathbb{F}_q}$ 表示 V 中向量 M 的 $\mathbb{F}_q$ 射影点. 下文将 $\langle M\rangle_{\mathbb{F}_q}$ 简记为 $\langle M\rangle$.

令 $\mathrm{GL}_3(q^2)$ 表示 $\mathbb{F}_{q^2}$ 上 3 阶可逆矩阵的全体构成的一般线性群, 即

$$\mathrm{GL}_3(q^2) = \{A = (a_{ij})_{3\times 3} \mid \det(A) \neq 0, a_{ij} \in \mathbb{F}_{q^2}, 1 \leqslant i, j \leqslant 3\},$$

其中 $\det(A)$ 表示矩阵 A 的行列式. 对于 $A \in \mathrm{GL}_3(q^2)$, 定义其共轭 $\overline{A}$ 为将 A 中每个元素均取 q 次方所得的矩阵. 记

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

并定义 $G_0 = \{A : A \in \mathrm{GL}_3(q^2) \mid J^{-1}AJ = (\overline{A}^{\top})^{-1}\}$, 其中 $\overline{A}^{\top}$ 表示矩阵 A 的共轭转置. 由文献 [16] 可知 G_0 同构于酉群 $\mathrm{GU}_3(q)$, 且群 G_0 按如下方式作用在向量空间 V 上: 矩阵 $A \in G_0$ 将 $X \in V$ 映到 $A^{-1}XA$. 容易验证 G_0 中的数量矩阵在 V 上的作用是平凡的, 故这诱导了 $\mathrm{PGU}_3(q)$ 在 V 上的作用. 令 $\mathcal{Q}$ 由 (2.4) 所定义, 根据文献 [16], G_0 对应的射影群 $\mathrm{PGU}_3(q)$ 在二次曲面 $\mathcal{Q}$ 上有 3 个轨道, 分别对应于 $\mathcal{Q}$ 中秩为 1、2 和 3 的矩阵.

2.2　$\mathbf{PSU_3}(q)$ 的轨道结构

令

$$G = \{A : A \in G_0 \mid \det(A) = 1\}. \tag{2.5}$$

其在 V 上的作用诱导了射影特殊酉群 $\mathrm{PSU}_3(q)$ 在 $\mathcal{Q}$ 上的作用. 本小节分析 $\mathrm{PSU}_3(q)$ 在 $\mathcal{Q}$ 上的轨道结构.

由于 $q \equiv 2 \pmod 3$, 3 整除 $q+1$, 故 $\mathbb{F}_{q^2}$ 中有 3 阶元 ω. 我们有 $\omega^q + \omega + 1 = \omega^2 + \omega + 1 = 0$. 现取 V 中的 5 个向量如下:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_{22} = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

$$X_{23} = \begin{pmatrix} 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\omega} \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

容易验证它们是 (2.2) 的零点, 故它们是 $Q^{+}(7,q)$ 中的点.

对于 $\mathcal{Q}$ 中的一点 $\langle M\rangle$, 令 $O(\langle M\rangle)$ 表示以点 $\langle M\rangle$ 为代表元的 $\mathrm{PSU}_3(q)$- 轨道. 令

$$O_i = O(\langle X_i\rangle), \quad i=1,3, \tag{2.8}$$

$$O_{2j} = O(\langle X_{2j}\rangle), \quad j=1,2,3. \tag{2.9}$$

定理 2.1 假设 $q\equiv 2 \pmod 3$, $q>2$, 并设二次曲面 $\mathcal{Q}$ 由 (2.4) 所定义. 群 $\mathrm{PSU}_3(q)$ 在 $\mathcal{Q}$ 上恰有 5 个轨道, 即 O_1、O_{21}、O_{22}、O_{23} 和 O_3, 其中 O_i $(i=1,3)$ 和 O_{2j} $(j=1,2,3)$ 由 (2.8) 和 (2.9) 所定义. 它们的长度分别为

$$|O_1| = q^3+1, \quad |O_3| = q^3(q^3+1), \tag{2.10}$$

$$|O_{21}| = |O_{22}| = |O_{23}| = \frac{(q^2+q)(q^3+1)}{3}. \tag{2.11}$$

证明 矩阵 X_1 和 X_3 的秩分别为 1 和 3, 矩阵 X_{21}、X_{22} 和 X_{23} 的秩均为 2. 已知 $q\equiv 2 \pmod 3$ 且 $q>2$, 群 $\mathrm{PSU}_3(q)$ 的阶为 $\frac{q^3(q^2-1)(q^3+1)}{3}$. 下面将计算点 $\langle X_i\rangle$ $(i=1,3)$ 和 $\langle X_{2j}\rangle$ $(j=1,2,3)$ 在 $\mathrm{PSU}_3(q)$ 中的稳定化子的大小, 从而得到轨道的长度如 (2.10) 和 (2.11) 所示. 通过比较大小即可知这 5 个轨道是 $\mathcal{Q}$ 的划分, 从而是所有的 $\mathrm{PSU}_3(q)$ 轨道.

由于方法类似, 此处只给出 $\langle X_1\rangle$ 的稳定化子的计算过程. 群 $\mathrm{SU}_3(q)$ 中的元素 A 稳定 $\langle X_1\rangle$ 当且仅当存在 $\lambda\in\mathbb{F}_q^*$ 使得 $A^{-1}X_1A=\lambda X_1$, 这等价于

$$X_1A=\lambda AX_1, \quad AJ\overline{A}^{\top}=J, \quad \det(A)=1. \tag{2.12}$$

记 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$, $1\leqslant i,j\leqslant 3$. 经展开计算可得, (2.12) 中的 3 个等式成立等价于下列等式同时成立:

$$\begin{aligned} &a_{21}=a_{31}=a_{32}=0, \quad a_{33}=\lambda a_{11}, \quad a_{22}=\lambda^{-1}a_{11}^{-2},\\ &\lambda=a_{11}^{-(q+1)}, \quad a_{23}=-\lambda^{-1}a_{11}^{-q-2}a_{12}^q, \quad \mathrm{Tr}(a_{13}a_{11}^q)=-a_{12}^{q+1}. \end{aligned}$$

从而, 矩阵 A 由其分量 $a_{11}\in\mathbb{F}_{q^2}^*$、$a_{12}\in\mathbb{F}_{q^2}$ 和 $a_{13}\in\mathbb{F}_{q^2}$ 所唯一确定, 且这 3 个分量满足 $\mathrm{Tr}(a_{13}a_{11}^q)=-a_{12}^{q+1}$. 容易验证 $\langle X_1\rangle$ 在 $\mathrm{SU}_3(q)$ 中的稳定化子包含 3 阶数量矩阵, 从而有 $|\mathrm{Stab}_{\mathrm{PSU}_3(q)}(\langle X_1\rangle)| = \frac{(q^2-1)\cdot q^2\cdot q}{3}$. 因此,

$$|O(\langle X_1\rangle)| = |O_1| = \frac{|\mathrm{PSU}_3(q)|}{|\mathrm{Stab}_{\mathrm{PSU}_3(q)}(\langle X_1\rangle)|} = q^3+1.$$

证毕. □

注 2.1 令 $A_0=\mathrm{diag}(1,\omega,1)$, 则 $A_0\in\mathrm{GU}_3(q)\setminus\mathrm{SU}_3(q)$, 且 $X_{22}=A_0^{-1}X_{21}A_0$, $X_{23}=A_0^{-2}X_{21}A_0^2$. 特别地, A_0 的作用引起 O_{21}、O_{22} 和 O_{23} 之间的传递置换, 它们的并构成一个 $\mathrm{PGU}_3(q)$- 轨道 O_2:

$$O_2 = O_{21}\cup O_{22}\cup O_{23}. \tag{2.13}$$

由定理 2.1 可知, 轨道 O_{21}、O_{22} 和 O_{23} 构成了 $\mathcal{Q}$ 中所有秩为 2 的点, 故对于 $i=1, 2, 3$, 集合 O_i 恰好是由 $\mathcal{Q}$ 中秩为 i 的点构成.

3 $Q^+(7,q)$ 中的 $\mathrm{PSU}_3(q)$- 不变奇妙集

本节采用第 2 节所引入的各种符号. 特别地, O_1、O_2 和 O_3 分别为秩为 1、2 和 3 的奇异点集合. 本节的目标是确定 $Q^+(7,q)$ 中所有 $\mathrm{PSU}_3(q)$- 不变的奇妙集. 由文献 [16] 可知, O_1 是卵形体. 第 3.1 小节将证明 O_2 和 O_3 分别构成 m- 卵形体. 第 3.2 小节将证明除了 O_1、O_2、O_3 以及它们的补以外没有别的 $\mathrm{PSU}_3(q)$- 不变奇妙集.

3.1 $Q^+(7,q)$ 中自同构群为 $\mathrm{PSU}_3(q)$ 的 m- 卵形体

Kantor [16] 对轨道 O_1 进行研究, 证明了如下结论.

定理 3.1 [16] 集合 O_1 是正交极空间 $Q^+(7,q)$ 中的卵形体.

该卵形体称作 $Q^+(7,q)$ 的酉型卵形体, 也称作 Kantor 卵形体. 接下来对剩下的 $\mathrm{PSU}_3(q)$- 轨道 O_{21}、O_{22}、O_{23} 和 O_3 展开研究.

引理 3.1 令 O_2 为由 (2.13) 所定义的集合, 则 $O_2=S_1\cup S_2\cup S_3$, 其中

$$S_1=\left\{\left\langle\begin{pmatrix}0&0&0\\ \gamma&0&0\\ b&\overline{\gamma}&0\end{pmatrix}\right\rangle:\gamma\in\mathbb{F}_{q^2}^*,b\in\mathbb{F}_q\right\}\cup\left\{\left\langle\begin{pmatrix}0&\beta&c\\ 0&0&\overline{\beta}\\ 0&0&0\end{pmatrix}\right\rangle:\beta\in\mathbb{F}_{q^2}^*,c\in\mathbb{F}_q\right\},\tag{3.1}$$

$$S_2=\left\{\left\langle\begin{pmatrix}\lambda b&\lambda\overline{\gamma}&\lambda^{q+1}b\\ \gamma&0&\overline{\lambda}\gamma\\ b&\overline{\gamma}&\overline{\lambda}b\end{pmatrix}\right\rangle:\lambda,\gamma\in\mathbb{F}_{q^2}^*,b\in\mathbb{F}_q,\mathrm{Tr}(\lambda)=0\right\},\tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}S_3=\Bigg\{\left\langle\begin{pmatrix}\lambda_1\gamma+\lambda_2b&\beta&\lambda_1\overline{\beta}+\lambda_2\overline{\lambda_1\gamma+\lambda_2b}\\ \gamma&-\mathrm{Tr}(\lambda_1\gamma+\lambda_2b)&\overline{\beta}\\ b&\overline{\gamma}&\overline{\lambda_1\gamma+\lambda_2b}\end{pmatrix}\right\rangle&:\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{F}_{q^2}^*,\gamma\in\mathbb{F}_{q^2},b\in\mathbb{F}_q,\\ \beta=-\lambda_1\mathrm{Tr}(\lambda_1\gamma+\lambda_2b)+\lambda_2\overline{\gamma},\ \mathrm{Tr}(\lambda_2)=\lambda_1^{q+1},\ \gamma^{q+1}&\neq-b\mathrm{Tr}(\lambda_1\gamma+\lambda_2b)\Bigg\}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

证明 可以直接验证 S_1、S_2 和 S_3 中的元素均在 O_2 中, 即秩为 2 且是二次型 Q 的零点. 现取 O_2 中的一个元素 $\langle M\rangle$, 其中 M 表达式形如 (2.1). 下面分 3 种情形进行讨论.

情形 1 矩阵 M 有全零行.

如果 M 的第二行 $(\gamma,a,\overline{\beta})=(0,0,0)$, 则 $\mathrm{Tr}(\alpha)=0$, 由 $Q(M)$=0 可得 $\alpha^2+bc=0$. 此时 M 的秩为 1, 与 $M\in O_2$ 矛盾. 因此只能是 M 的第一行全为 0 或第三行全为 0. 此时, 容易验证 $\langle M\rangle$ 为 S_1 中元素.

情形 2 矩阵 M 没有全零行但有两行线性相关.

首先考虑第一和二行线性相关的情形. 此时存在 $\lambda\in\mathbb{F}_{q^2}^*$ 使得 $(\alpha,\beta,c)=\lambda(\gamma,a,\overline{\beta})$, 即 $\alpha=\lambda\gamma$, $a=-\mathrm{Tr}(\lambda\gamma)$. 由此可以推导出 $\beta=-\lambda\mathrm{Tr}(\lambda\gamma)$, $c=-\lambda^{q+1}\mathrm{Tr}(\lambda\gamma)$. 直接计算 $Q(M)=0$ 可得 $-b\mathrm{Tr}(\lambda\gamma)=\gamma^{q+1}$, 利用这些关系可以推导出 M 的第二和三行线性相关, 从而 M 的秩为 1, 与 $M\in O_2$ 矛盾. 因此第一和二行线性无关. 类似地, M 的第二和三行线性无关.

现在考虑第一和三行线性相关的情形. 此时存在 $\lambda\in\mathbb{F}_{q^2}^*$ 使得 $(\alpha,\beta,c)=\lambda(b,\overline{\gamma},\overline{\alpha})$, 即 $\alpha=\lambda b$, $\beta=\lambda\overline{\gamma}$, $c=\lambda^{q+1}b$. 从而 M 中的元素均可由 b、γ 和 λ 表示. 由于 M 的秩为 2, 通过计算其二阶子式可得 $-\gamma^{q+1}\neq b^2\mathrm{Tr}(\lambda)$. 在此基础上, 直接计算 $Q(M)=0$ 可得 $\mathrm{Tr}(\lambda)=0$. 这时, $\langle M\rangle$ 落入集合 S_2.

情形 3 矩阵 M 的任意两行线性无关.

此时, 存在 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{F}_{q^2}^*$ 使得 $(\alpha,\beta,c)=\lambda_1(\gamma,a,\overline{\beta})+\lambda_2(b,\overline{\gamma},\overline{\alpha})$, 从而 M 中的元素均可以由 λ_1、λ_2、γ 和 b 表示. 通过计算二阶子式的行列式可知 $(\gamma,a,\overline{\beta})$ 和 $(b,\overline{\gamma},\overline{\alpha})$ 线性无关等价于 $\gamma^{q+1}\neq-b\mathrm{Tr}(\lambda_1\gamma+\lambda_2b)$. 直接计算可知

$$Q(M)=(\lambda_1^{q+1}-\mathrm{Tr}(\lambda_2))(-b\mathrm{Tr}(\lambda_1\gamma+\lambda_2b)-\gamma^{q+1})=0.$$

故 $\mathrm{Tr}(\lambda_2)=\lambda_1^{q+1}$. 从而, $\langle M\rangle$ 是 S_3 中的元素.

由上述讨论可知, 集合 $O_2=S_1\cup S_2\cup S_3$, 且集合 S_1、S_2 和 S_3 两两之间互不相交. 因此, S_1、S_2 和 S_3 构成 O_2 的一个划分. □

引理 3.2 令 X_{21} 和 O_2 分别由 (2.6) 和 (2.13) 所定义, 则有 $|X_{21}^{\perp}\cap O_2|=q^4+q^3+q$.

证明 现取 O_2 中的元素 $\langle M\rangle$, 其表达式如 (2.1) 所示. 根据 (2.3) 中的极化型 B 可知, M 落在 $X_{21}^{\perp}$ 中当且仅当 $\mathrm{Tr}(\gamma)=0$.

由引理 3.1 及其证明过程可知, 集合 $X_{21}^{\perp}\cap O_2$ 的大小为

$$|X_{21}^{\perp}\cap O_2|=|X_{21}^{\perp}\cap S_1|+|X_{21}^{\perp}\cap S_2|+|X_{21}^{\perp}\cap S_3|. \tag{3.4}$$

假设 $\langle M\rangle\in X_{21}^{\perp}\cap S_1$, 则有

$$M=\begin{pmatrix}0&0&0\\ \gamma&0&0\\ b&\overline{\gamma}&0\end{pmatrix},$$

其中 γ 是 $\mathbb{F}_{q^2}$ 中满足 $\mathrm{Tr}(\gamma)=0$ 的非零元, b 是 $\mathbb{F}_q$ 中的元素; 或

$$M=\begin{pmatrix}0&\beta&c\\ 0&0&\overline{\beta}\\ 0&0&0\end{pmatrix},$$

β 是 $\mathbb{F}_{q^2}$ 中的非零元, c 是 $\mathbb{F}_q$ 中的元素. 因此,

$$\begin{aligned}|X_{21}^{\perp}\cap S_1|&=\frac{1}{q-1}\#\{(b,\gamma):\, b\in\mathbb{F}_q,\,\gamma\in\mathbb{F}_{q^2}^*,\,\mathrm{Tr}(\gamma)=0\}+\frac{1}{q-1}\#\{(c,\beta):\, c\in\mathbb{F}_q,\,\beta\in\mathbb{F}_{q^2}^*\}\\&=\frac{1}{q-1}q(q-1)+\frac{1}{q-1}q(q^2-1)\\&=q^2+2q.\end{aligned} \tag{3.5}$$

类似地, 有

$$|X_{21}^{\perp}\cap S_2|=\frac{1}{q-1}\#\{(\lambda,\gamma,b):\,\lambda,\gamma\in\mathbb{F}_{q^2}^*,\,b\in\mathbb{F}_q,\,\mathrm{Tr}(\lambda)=0,\mathrm{Tr}(\gamma)=0\}=(q-1)q. \tag{3.6}$$

假设 $\langle M\rangle\in X_{21}^{\perp}\cap S_3$, 则由 (3.3) 可知 M 中的元素可由 $\mathbb{F}_q$ 中元素 b 和 $\mathbb{F}_{q^2}$ 中的元素 λ_1、λ_2 和 γ 表示, 其中 $\lambda_1\lambda_2\neq 0$, $\mathrm{Tr}(\lambda_2)=\lambda_1^{q+1}$, $\gamma^{q+1}\neq -b\mathrm{Tr}(\lambda_1\gamma+\lambda_2 b)$. 如前所述, $M\in X_{21}^{\perp}$ 当且仅当 $\mathrm{Tr}(\gamma)=0$. 因此,

$$\begin{aligned}|X_{21}^{\perp}\cap S_3|&=\frac{1}{q-1}\#\{(\lambda_1,\lambda_2,\gamma,b)\in\mathbb{F}_{q^2}^*\times\mathbb{F}_{q^2}^*\times\mathbb{F}_{q^2}^*\times\mathbb{F}_q:\,\mathrm{Tr}(\lambda_2)=\lambda_1^{q+1},\,\mathrm{Tr}(\gamma)=0,\\&\qquad\gamma^{q+1}\neq -b\mathrm{Tr}(\lambda_1\gamma+\lambda_2 b)\}\\&=\frac{q}{q-1}\#\{(\lambda_1,\gamma,b)\in\mathbb{F}_{q^2}^*\times\mathbb{F}_{q^2}\times\mathbb{F}_q:\,b(\lambda_1\gamma-\overline{\lambda_1}\gamma+\lambda_1^{q+1}b)-\gamma^2\neq 0,\,\mathrm{Tr}(\gamma)=0\}\\&=\frac{q(q^2-1)q^2}{q-1}-\frac{q}{q-1}N_0,\end{aligned} \tag{3.7}$$

其中 $N_0=\#\{(\lambda_1,\gamma,b)\in\mathbb{F}_{q^2}^*\times\mathbb{F}_{q^2}\times\mathbb{F}_q:\ \mathrm{Tr}(\gamma)=0,\ b(\lambda_1\gamma-\overline{\lambda_1}\gamma+\lambda_1^{q+1}b)-\gamma^2=0\}$.

按照特征 p 为奇数和偶数两种情形分别计算 N_0 的值.

情形 1 特征 p 为奇数. 此时, 取 $\mathbb{F}_{q^2}$ 中的一个非零元 δ 使得 $\mathrm{Tr}(\delta)=0$. 则 1 和 δ 是 $\mathbb{F}_{q^2}$ 在 $\mathbb{F}_q$ 上的一组基, 且 $\mathbb{F}_q\cdot\delta$ 是其中所有相对迹为 0 的元素. 容易验证 δ^2 是 $\mathbb{F}_q$ 中的非平方元, 即 $(\delta^2)^{(q-1)/2}\neq 1$. 记 $\lambda_1=x_1+x_2\delta$ 和 $\gamma=r_1\delta$, 其中 x_1、x_2 和 r_1 均为 $\mathbb{F}_q$ 中的元素. 通过展开可知, N_0 是以下集合的大小:

$$\begin{aligned}T_0&=\{(x_1,x_2,r_1,b)\in\mathbb{F}_q^4:\ \{x_1,\,x_2\}\neq\{0\},\ (x_1^2-\delta^2x_2^2)b^2+2x_2\delta^2r_1b-r_1^2\delta^2=0\}\\&=\#\{(x_1,x_2,r_1,b)\in\mathbb{F}_q^4:\ \{x_1,\,x_2\}\neq\{0\},\ x_1^2b^2-\delta^2(x_2b-r_1)^2=0\}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

令 $L(x_1,x_2,r_1,b)=x_1^2b^2-\delta^2(x_2b-r_1)^2$. 进一步细分为以下 3 种情形来计算 T_0 的大小.

情形 1.1 $b=0$. 此时, $L(x_1,x_2,r_1,b)=-\delta^2r_1^2$. 要使得 $L(x_1,x_2,r_1,b)=0$, 则需要 $r_1=0$. 从而 T_0 中相应部分大小为

$$N_1=\#\{(x_1,x_2)\in\mathbb{F}_q^2:\ \{x_1,\,x_2\}\neq\{0\}\}=q^2-1.$$

情形 1.2 $b\neq 0$, $r_1=x_2b$. 此时, $L(x_1,x_2,r_1,b)=x_1^2b^2$. 要使得 $L(x_1,x_2,r_1,b)=0$, 则需要 $x_1=0$. 从而 T_0 中相应部分大小为

$$N_2=\#\{(x_2,b)\in\mathbb{F}_q^2:\ x_2\neq 0,\ b\neq 0\}=(q-1)^2.$$

情形 1.3 $b\neq 0$, $r_1\neq x_2b$. 此时, 由于 δ^2 是 $\mathbb{F}_q$ 中的非平方元, 则 $L(x_1,x_2,r_1,b)=0$ 无解.

因此, 在特征为奇数的情形下, 得到 $N_0=N_1+N_2=2q^2-2q$.

情形 2 特征 p 为偶数. 此时, 取 $\mathbb{F}_{q^2}$ 的元素 δ 使得 $\mathrm{Tr}(\delta)=1$. 则 1 和 δ 是 $\mathbb{F}_{q^2}$ 在 $\mathbb{F}_q$ 上的一组基. 记 $\lambda_1=x_1+x_2\delta$, 其中 $x_1,\,x_2\in\mathbb{F}_q$. 在该种情形下, 由 $\gamma^q=-\gamma$ 可知 $\gamma\in\mathbb{F}_q$. 通过展开可知 N_0 是以下集合的大小:

$$T_0=\{(x_1,x_2,\gamma,b)\in\mathbb{F}_q^4:\ \{x_1,\,x_2\}\neq\{0\},\ (x_1^2+x_1x_2+x_2^2\delta^{q+1})b^2+x_2\gamma b+\gamma^2=0\}.$$

进一步细分为以下两种情形来计算 N_0.

情形 2.1 $x_2=0$. 此时, T_0 中相应部分大小为

$$N_1=\#\{(x_1,\gamma,b)\in\mathbb{F}_q^3:\ x_1\neq 0,x_1^2b^2+\gamma^2=0\}=(q-1)q.$$

这里, 用到以下事实: $\mathbb{F}_q$ 上的映射 $x\mapsto x^2$ 是加性的.

情形 2.2 $x_2\neq 0$. 此时, T_0 中相应部分大小为

$$N_2=\#\{(x_1,x_2,\gamma,b)\in\mathbb{F}_q^4:\ x_2\neq 0,\ (x_1^2+x_1x_2+x_2^2\delta^{q+1})b^2+x_2\gamma b+\gamma^2=0\}.$$

令 ψ 是 $\mathbb{F}_q$ 的基本加法特征, 即 $\psi(x)=\omega_p^{\mathrm{Tr}_{q/p}(x)}$, 其中 $\mathrm{Tr}_{q/p}$ 是从 $\mathbb{F}_q$ 到 $\mathbb{F}_p$ 的绝对迹函数, ω_p 是一个本原 p 次单位根. 利用特征的性质, 可进行如下计算:

$$\begin{aligned}N_2&=\frac{1}{q}\sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q}\sum_{x_2\in\mathbb{F}_q^*}\sum_{x_1,\gamma,b\in\mathbb{F}_q}\psi(\lambda((x_1^2+x_1x_2+x_2^2\delta^{q+1})b^2+x_2\gamma b+\gamma^2))\\&=\frac{(q-1)q^3}{q}+\frac{1}{q}\sum_{\lambda,\,x_2\in\mathbb{F}_q^*}\sum_{x_1,\,b\in\mathbb{F}_q}\psi(\lambda(x_1^2+x_1x_2+x_2^2\delta^{q+1})b^2)\sum_{\gamma\in\mathbb{F}_q}\psi(\lambda(\gamma^2+x_2b\gamma))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= q^2(q-1) + \frac{1}{q} \sum_{\lambda,\, x_2 \in \mathbb{F}_q^*} \sum_{x_1,\, b \in \mathbb{F}_q} \psi(\lambda(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\delta^{q+1})b^2) q[[\lambda = x_2^{-2}b^{-2}]] \\
&= q^2(q-1) + \sum_{\lambda,\, x_2 \in \mathbb{F}_q^*} \sum_{x_1 \in \mathbb{F}_q} \psi(x_2^{-2}x_1^2 + x_2^{-1}x_1 + \delta^{q+1}) \\
&= q^2(q-1) - \sum_{\lambda,\, x_2 \in \mathbb{F}_q^*} \sum_{x_1 \in \mathbb{F}_q} \psi(0) \\
&= q(q-1).
\end{aligned}
$$

在第 3 个等式中, $[[\mathbf{P}]]$ 表示 Kronecker delta 函数: 若性质 $\mathbf{P}$ 成立, 则该函数取值为 1, 否则取值为 0. 因此, 在特征为偶数的情形下, 同样有 $N_0 = N_1 + N_2 = 2q^2 - 2q$.

综合特征为奇数和偶数两种情形, 有 $N_0 = 2q^2 - 2q$. 由 (3.7) 可得

$$
|X_{21}^{\perp} \cap S_3| = (q+1)q^3 - \frac{q}{q-1}N_0 = q^4 + q^3 - 2q^2. \tag{3.9}
$$

结合 (3.5)、(3.6) 和 (3.9), 有

$$
|X_{21}^{\perp} \cap O_2| = q^4 + q^3 + q. \tag{3.10}
$$

证毕. □

引理 3.3 令 $G_1 = \mathrm{PGU}_3(q)$ 或 $G_1 = \mathrm{PSU}_3(q)$, 并取 $Q^+(7,q)$ 的两个 G_1- 轨道 O 和 O'. 对于 $X \in O$ 和 $Y \in O'$, 有 $|O| \cdot |X^{\perp} \cap O'| = |O'| \cdot |Y^{\perp} \cap O|$.

证明 由于 O 和 O' 是 G_1- 轨道, $|Y^{\perp} \cap O|$ 与 $Y \in O'$ 的选取无关. 同样地, $|X^{\perp} \cap O'|$ 与 $X \in O$ 的选取无关. 对集合 $\{(X,Y): X \in O, Y \in O', B(X,Y) = 0\}$ 进行双重计数即可得引理中所述的等式. □

定理 3.2 令 $q \equiv 2 \pmod 3$, $q > 2$, 则 $\mathrm{PSU}_3(q)$- 不变集 O_2 是 $Q^+(7,q)$ 的一个 (q^2+q)- 卵形体.

证明 根据文献 [16], O_1、O_2 和 O_3 是所有的 $\mathrm{PGU}_3(q)$- 轨道, 且 O_1 是 $Q^+(7,q)$ 的卵形体. 根据定义 1.1, $|Y^{\perp} \cap O_1| = q^2 + 1$, 其中 Y 是 O_2 的任意元素. 根据引理 3.3, 对于任意 $X \in O_1$, 有

$$
|X^{\perp} \cap O_2| = \frac{|O_2|}{|O_1|} \cdot (q^2+1) = (q^2+q)(q^2+1). \tag{3.11}
$$

现任取 $Q^+(7,q)$ 中的元素 Y, 超平面 $Y^{\perp}$ 和 $Q^+(7,q)$ 相交于一个二次锥体 (quadratic cone), 其顶点 (vertex) 为 Y, 基底 (base) 为 $Q^+(5,q)$ (详情参见文献 [15, 引理 1.22]). 从而有

$$
|Y^{\perp} \cap Q^+(7,q)| = (q^2+q+1)(q^2+1)q + 1.
$$

由于 O_2 是一个 $\mathrm{PGU}_3(q)$- 轨道, 由引理 3.2 知, 对于任意 $Y \in O_2$, 有 $|Y^{\perp} \cap O_2| = q^4 + q^3 + q$, 从而有

$$
|Y^{\perp} \cap O_3| = |Y^{\perp} \cap Q^+(7,q)| - |Y^{\perp} \cap O_1| - |Y^{\perp} \cap O_2| = (q^2+1)q^3.
$$

根据引理 3.3, 对于任意 $X \in O_3$, 有

$$
|X^{\perp} \cap O_2| = \frac{|O_2|}{|O_3|} \cdot (q^2+1)q^3 = (q^2+q)(q^2+1). \tag{3.12}
$$

由 (3.10)–(3.12) 和引理 3.3, 即可推导出 O_2 是 $Q^+(7,q)$ 的一个 (q^2+q)- 卵形体. 证毕. □

推论 3.1 令 $q \equiv 2 \pmod 3$, $q > 2$, 则 $\mathrm{PSU}_3(q)$- 轨道 $\mathcal{O}_3$ 是 $Q^+(7,q)$ 的一个 q^3- 卵形体.

证明 由定理 3.2 可知, $\mathcal{O}_2$ 是 $Q^+(7,q)$ 的一个 (q^2+q)- 卵形体. 根据引理 1.1, $\mathcal{O}_3$ 作为 $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ 在 $\mathcal{Q}$ 中的补, 构成了 $Q^+(7,q)$ 的一个 q^3- 卵形体. □

注 3.1 当 $q = 2$ 时, 通过 Magma 软件直接验证可知, 群 $\mathrm{PSU}_3(q)$ 作用在 $Q^+(7,q)$ 上恰有 5 个轨道, 其描述和 $q > 2$ 时相同; 轨道 $\mathcal{O}_1$ 和 $\mathcal{O}_3$ 仍分别构成 $Q^+(7,q)$ 的 1- 和 8- 卵形体, 其余 3 个轨道不是奇妙集, 但它们的并 $\mathcal{O}_2$ 是 $Q^+(7,q)$ 的 6- 卵形体.

3.2 $Q^+(7,q)$ 中秩为 2 的 $\mathrm{PSU}_3(q)$- 轨道结构分析

首先证明秩为 2 的 $\mathrm{PSU}_3(q)$- 轨道 $\mathcal{O}_{21}$、$\mathcal{O}_{22}$ 和 $\mathcal{O}_{23}$ 均不是奇妙集, 这些集合由 (2.8) 和 (2.9) 定义. 根据文献 [1, 定理 4], i- 紧集和 m- 卵形体相交于 $m \cdot i$ 个公共点. 由于 $\mathcal{O}_1$ 是 1- 卵形体且与 $\mathcal{O}_{21}, \ldots, \mathcal{O}_{23}$ 不相交, 故如果后者是奇妙集, 则其一定是 m- 卵形体. 根据定义 1.1 知, 参数 m 由其大小唯一确定. 由于 $A_0 = \mathrm{diag}(1,\omega,1)$ 引起 3 个 $\mathrm{PSU}_3(q)$- 轨道 $\mathcal{O}_{21}$、$\mathcal{O}_{22}$ 和 $\mathcal{O}_{23}$ 的传递置换, 故只需证明其中任何一个不是 m- 卵形体即可. 这里, ω 是 $\mathbb{F}_{q^2}$ 中的 3 阶元.

令 X_{21}、X_{22} 和 X_{23} 如 (2.6) 所定义. 根据定义, $\mathcal{O}_{22}$ 是 X_{22} 在 $\mathrm{PSU}_3(q)$ 的共轭作用下的像集. 令 S_1、S_2 和 S_3 分别是由 (3.1)–(3.3) 所定义的集合, 它们构成 $\mathcal{O}_2$ 的一个划分. 取 $\mathcal{O}_2$ 中的一个元素 $\langle M \rangle$, 其表达式如 (2.1) 所示. 根据 (2.3) 中 B 的表达式, $B(X_{21}, M) = \mathrm{Tr}(\gamma) = 0$. 因此 $\langle M \rangle \in X_{21}^{\perp}$ 当且仅当 $\mathrm{Tr}(\gamma) = 0$.

定理 3.3 令 $q \equiv 2 \pmod 3$, 则轨道 $\mathcal{O}_{22}$ 不是 $Q^+(7,q)$ 中的 m- 卵形体.

证明 对于 $q = 2$ 的情形, 由注 3.1 可知, $\mathcal{O}_{22}$ 不是 $Q^+(7,2)$ 中的 m- 卵形体. 现只需考虑 $q > 2$ 的情形. 假设 $\mathcal{O}_{22}$ 是 $Q^+(7,q)$ 中的 m- 卵形体. 根据定义 1.1 和定理 2.1, 有 $m = \frac{q^2+q}{3}$. 接下来计算

$$|X_{21}^{\perp} \cap S_1 \cap \mathcal{O}_{22}| = \frac{(q+1)q}{3} + q \cdot [[9 \mid (q+1)]], \tag{3.13}$$

$$|X_{21}^{\perp} \cap S_2 \cap \mathcal{O}_{22}| = (q-1)q \cdot [[9 \mid (q+1)]], \tag{3.14}$$

$$|X_{21}^{\perp} \cap S_3 \cap \mathcal{O}_{22}| = \frac{1}{3} q^2(q^2-1) + (q-1)q^2 \cdot [[9 \mid (q+1)]], \tag{3.15}$$

其中, $[[\mathbf{P}]] = 1$ 或 $[[\mathbf{P}]] = 0$, 取决于性质 $\mathbf{P}$ 是否成立. 将它们相加, 即可得到矛盾:

$$|X_{21}^{\perp} \cap \mathcal{O}_{22}| = \frac{1}{3}(q^4+q) + q^3 \cdot [[9 \mid (q+1)]] \neq \frac{q^2+q}{3}(q^2+1).$$

由于证明方法类似, 这里只给出最复杂的情形 (3.15) 的证明.

现任取 $\langle M \rangle \in X_{21}^{\perp} \cap S_3 \cap \mathcal{O}_{22}$. 由本定理前的分析以及 (3.3) 可知

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1\gamma + \lambda_2 b & \beta & \lambda_1\overline{\beta} - \lambda_2\lambda_1^q\gamma + \lambda_2^{q+1}b \\ \gamma & -t & \overline{\beta} \\ b & -\gamma & \overline{\lambda_1\gamma + \lambda_2 b} \end{pmatrix},$$

其中, $t = \mathrm{Tr}(\lambda_1\gamma) + \lambda_1^{q+1}b$, $\beta = -\lambda_1\mathrm{Tr}(\lambda_1\gamma + \lambda_2 b) - \lambda_2\gamma$, 且 4 个参数 $(\lambda_1, \lambda_2, \gamma, b)$ 满足以下条件: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}_{q^2}^*$, $\gamma \in \mathbb{F}_{q^2}$, $b \in \mathbb{F}_q$ 且

$$\gamma^q + \gamma = 0, \quad \mathrm{Tr}(\lambda_2) = \lambda_1^{q+1}, \quad \gamma^{q+1} + bt \neq 0.$$

该点 $\langle M\rangle$ 落在 O_{22} 中当且仅当存在 $A=(a_{ij})_{3\times 3}\in \mathrm{SU}_3(q)$ 和 $\lambda_0\in\mathbb{F}_q^*$ 使得 $A^{-1}X_{22}A=\lambda_0 M$ 成立. 这等价于

$$X_{22}A=\lambda_0 AM,\quad AJ\overline{A}^{\top}=J,\quad \det(A)=1.$$

通过比较 $X_{22}A=\lambda_0 AM$ 两端各个分量可知, 其等价于

$$\begin{aligned}
&a_{32}=-a_{31}\lambda_1,\quad a_{33}=-a_{31}\lambda_2,\quad a_{23}=\lambda_2^q a_{21}+\lambda_1^q a_{22},\\
&a_{31}=-\omega\lambda_0(a_{22}+\lambda_1 a_{21})(\gamma-\lambda_1 b)^q, \qquad (3.16)\\
&a_{22}=w^2\lambda_0(\beta a_{11}-ta_{12}-\gamma a_{13}),\\
&a_{21}=w^2\lambda_0((\lambda_1\gamma+\lambda_2 b)a_{11}+\gamma a_{12}+ba_{13}). \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

利用上述表达式直接计算可得

$$\det(A)=a_{31}(a_{22}+a_{21}\lambda_1)(a_{11}\lambda_2^q+a_{12}\lambda_1^q-a_{13})=1. \qquad (3.18)$$

引入辅助变量 $\eta=a_{22}+\lambda_1 a_{21}$, $s=a_{12}+\lambda_1 a_{11}$. 比较 $AJ\overline{A}^{\top}=J$ 两端各项, 可知其等价于下列条件:

$$(a_{12}\lambda_1^q+a_{11}\lambda_2^q-a_{13})a_{31}^q=-1, \qquad (3.19)$$

$$a_{22}^{q+1}+\lambda_1^{q+1}a_{21}^{q+1}+\mathrm{Tr}(\lambda_1 a_{21}a_{22}^q)=1, \qquad (3.20)$$

$$(a_{13}+\lambda_2 a_{11})a_{21}^q+sa_{22}^q=0, \qquad (3.21)$$

$$a_{12}^{q+1}+\mathrm{Tr}(a_{13}a_{11}^q)=0. \qquad (3.22)$$

由 (3.18) 和 (3.19) 可得 $\eta=-a_{31}^{q-1}\neq 0$, 故有 $\eta^{q+1}=1$. 代入 (3.16) 化简可得

$$(\gamma-\lambda_1 b)^{q-1}=-\eta^{-3}w. \qquad (3.23)$$

以下运算较为复杂, 我们使用符号计算软件 Maple 辅助计算. 利用上面的等式将 A 中元素全部由 a_{11}、η、s、λ_0 以及 M 中的参数表示: 将上面等式中的 a_{12} 全部替换为 $s-\lambda_1 a_{11}$; 将上面 a_{21} 和 a_{22} 的表达式代入 $\eta=a_{22}+\lambda_1 a_{21}$ 将 a_{13} 解出, 再依次代入其他 a_{ij} 的表达式即可. 利用这些表达式以及 $\eta^{q+1}=1$ 可以直接验证: (3.21) 自动成立; (3.18) 和 (3.19) 等价于 (3.23) 且必有 $\eta^{q+1}=1$; (3.21) 和 (3.22) 分别等价于

$$x^{q+1}=\mathrm{Tr}\left(\frac{(\gamma-\lambda_1 b)a_{11}}{\lambda_0 w\eta(\gamma^2-bt)}\right),\quad \mathrm{Tr}(x)=\frac{b}{\lambda_0(\gamma^2-bt)}, \qquad (3.24)$$

其中 $x=w^{-1}\eta^{-1}s$. 换言之, x 和 x^q 是方程

$$Y^2-\frac{b}{\lambda_0(\gamma^2-bt)}Y+\mathrm{Tr}\left(\frac{(\gamma-\lambda_1 b)a_{11}}{\lambda_0 w\eta(\gamma^2-bt)}\right)=0 \qquad (3.25)$$

的两个解, 且当 $x\in\mathbb{F}_q$ 时这两个解相同. 由于该方程在 $\mathbb{F}_{q^2}$ 中总有两个解, 故只需保证当它在 $\mathbb{F}_q$ 中有解时两个解相同即可. 综上所述, $\langle M\rangle$ 落在 $X_{21}^{\perp}\cap S_3\cap O_{22}$ 中当且仅当存在 $\mathbb{F}_{q^2}$ 中元素 a_{11}、η 和 λ_0 满足如下条件: $\eta^{q+1}=1$, $\lambda_0\in\mathbb{F}_q^*$, (3.23) 成立且 (3.25) 在 $\mathbb{F}_q$ 中要么无解要么有两个相同的解.

考虑两种情形.

情形 1 当 $b=0$ 时, 取 $a_{11}=w\eta\gamma^2$ 即可令 (3.25) 的两个解均为 0, 且 (3.23) 简化为 $\gamma^{q-1}=-\eta^{-3}w$. 由于 $\gamma+\gamma^q=0$, 故 $\gamma^{q-1}=-1$, 从而 $\eta^3=w$. 由于 w 的阶为 3 且 $\eta^{q+1}=1$, 所以存在这样的 η 当且

仅当 3 整除 $\frac{q+1}{3}$, 即 $9 \mid (q+1)$. 如果 $q \not\equiv -1 \pmod 9$, 则没有这样的点 $\langle M\rangle$. 如果 $q \equiv -1 \pmod 9$, 则此时 M 的参数 $(\lambda_1,\lambda_2,\gamma)$ 有 $(q^2-1)\cdot q\cdot(q-1)$ 种选择: 对于给定 $\lambda_1 \in \mathbb{F}_{q^2}^*$, 共有 q 个 λ_2 满足 $\mathrm{Tr}(\lambda_2)=\lambda_1^{q+1}$, 而 γ 有 $q-1$ 种选择. 总之, 共有 $(q^2-1)q\cdot[[9\mid(q+1)]]$ 个这样的射影点 $\langle M\rangle$, 其参数 $b=0$.

情形 2 当 $b\neq 0$ 时, 由于考虑的是射影点, 故不失一般性可设 $b=1$. 存在 $q+1$ 阶元 η 使得 (3.23) 成立当且仅当 $(\gamma-\lambda_1)^{(q^2-1)/3}=(-w)^{(q+1)/3}$. 假设 λ_1 和 γ 满足该条件, 并选定这样一个 η. 取 c 为 $\mathbb{F}_q$ 中使得 Y^2-Y+c 在 $\mathbb{F}_q$ 上不可约的一个元素. 令 $\lambda_0=(\gamma^2-t)^{-1}$, 并取 a_{11} 使得 $\mathrm{Tr}(\frac{(\gamma-\lambda_1 b)a_{11}}{\lambda_0 w\eta(\gamma^2-bt)})=c$, 可知 (3.25) 在 $\mathbb{F}_q$ 上无解. 因此, $\langle M\rangle$ 的参数 $(\lambda_1,\lambda_2,\gamma)$ 需要满足的条件为 $(\gamma-\lambda_1)^{(q^2-1)/3}=(-w)^{(q+1)/3}$, $\gamma^q+\gamma=0$, $\mathrm{Tr}(\lambda_2)=\lambda_1^{q+1}$, $\lambda_1\lambda_2\neq 0$. 满足前两个条件的 (γ,λ_1) 共有 $\frac{1}{3}(q^2-1)\cdot q$ 对. 当 $\gamma^{(q^2-1)/3}=(-w)^{(q+1)/3}$ 时, 由 $\gamma^q+\gamma=0$ 可知 $\gamma^{q-1}=-1$, 故 $w^{(q+1)/3}=1$, 这只有在 $q\equiv -1 \pmod 9$ 时成立. 因此满足前两个条件的 (γ,λ_1) 对中有 $\frac{1}{3}(q^2-1)q-(q-1)[[9\mid(q+1)]]$ 个满足 $\lambda_1\neq 0$. 对于每一个这种对, 有 q 个 λ_2 满足剩余两个条件. 因此, 该情形共有 $\frac{1}{3}q^2(q^2-1)-(q-1)q\cdot[[9\mid(q+1)]]$ 个这样的点 $\langle M\rangle$.

综上可知,

$$|X_{21}^{\perp}\cap S_3\cap O_{22}|=\frac{1}{3}q^2(q^2-1)+(q-1)q^2\cdot[[9\mid(q+1)]]. \tag{3.26}$$

证毕. □

推论 3.2 正交极空间 $Q^+(7,q)$ 中的 $\mathrm{PSU}_3(q)$- 不变奇妙集只有 O_1、O_2、O_3 以及它们的补集.

证明 由上一小节内容可知, O_1、O_2 和 O_3 是 m- 卵形体, 且构成 $Q^+(7,q)$ 中点集的划分. 由定理 3.3 及其前面的分析可知, O_{21}、O_{22} 和 O_{23} 均不是 m- 卵形体. 现由引理 1.1 即可推导出所需要的结论. □

4 结论

有限经典极空间中的 m- 卵形体是一类重要的几何构型, 它与强正则图和二重量码有着密切的联系. 在高维情形下, m- 卵形体的构造极少, 且由于维数较高一般很难利用计算机搜索得到新的例子. 通过研究有限典型群的低维绝对不可约表示的轨道结构, 有望得到新参数的奇妙集, 在这方面尚没有系统的研究. 本文借助于 Kantor 的 $Q^+(7,q)$ 模型, 研究了 $\mathrm{PSU}_3(q)$ 的 8 维绝对不可约表示所对应的正交极空间 $Q^+(7,q)$ 的轨道结构, 由此构造出新的自同构群为 $\mathrm{PSU}_3(q)$ 的 (q^2+q)- 和 q^3- 卵形体. 在此基础上, 本文进一步确定了 $Q^+(7,q)$ 的所有 $\mathrm{PSU}_3(q)$- 不变奇妙集.

致谢 感谢审稿人提出的宝贵意见和建议.

参考文献

1 Bamberg J, Kelly S, Law M, et al. Tight sets and m-ovoids of finite polar spaces. J Combin Theory Ser A, 2007, 114: 1293–1314

2 Bamberg J, Law M, Penttila T. Tight sets and m-ovoids of generalised quadrangles. Combinatorica, 2009, 29: 1–17

3 Bamberg J, Penttila T. Overgroups of cyclic Sylow subgroups of linear groups. Comm Algebra, 2008, 36: 2503–2543

4 Brouwe A E, Haemers W H. Spectra of Graphs. Universitext. New York: Springer, 2012

5 Calderbank R, Kantor W M. The geometry of two-weight codes. Bull Lond Math Soc, 1986, 18: 97–122

6 Cossidente A, Culbert C, Ebert G L, et al. On m-ovoids of $W_3(q)$. Finite Fields Appl, 2008, 14: 76–84

7 Cossidente A, Pavese F. Intriguing sets of quadrics in $\mathrm{PG}(5,q)$. Adv Geom, 2017, 17: 339–345

8 Cossidente A, Pavese F. On intriguing sets of finite symplectic spaces. Des Codes Cryptogr, 2018, 86: 1161–1174
9 Cossidente A, Pavese F. Cameron-Liebler line classes of $\mathrm{PG}(3,q)$ admitting $\mathrm{PGL}(2,q)$. J Combin Theory Ser A, 2019, 167: 104–120
10 Cossidente A, Penttila T. Hemisystems on the Hermitian surface. J Lond Math Soc (2), 2005, 72: 731–741
11 Feng T, Momihara K, Rodgers M, et al. Cameron-Liebler line classes with parameter $x=\frac{(q+1)^2}{3}$. Adv Math, 2021, 385: 107780
12 Feng T, Momihara K, Xiang Q. Cameron-Liebler line classes with parameter $x=\frac{q^2-1}{2}$. J Combin Theory Ser A, 2015, 133: 307–338
13 Feng T, Momihara K, Xiang Q. A family of m-ovoids of parabolic quadrics. J Combin Theory Ser A, 2016, 140: 97–111
14 Feng T, Tao R. An infinite family of m-ovoids of $Q(4,q)$. Finite Fields Appl, 2020, 63: 101644
15 Hirschfeld J W P, Thas J A. General Galois Geometries. Springer Monographs in Mathematics. London: Springer, 2016
16 Kantor W M. Ovoids and translation planes. Canad J Math, 1982, 34: 1195–1207
17 Lidl R, Niederreiter H. Finite Fields, 2nd ed. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, vol. 20. Cambridge: Cambridge University Press, 1997

$\mathrm{PSU}_3(q)$-invariant intriguing sets of orthogonal polar space $Q^+(7,q)$

Tao Feng, Weicong Li & Ran Tao

Abstract Suppose that q is a prime power such that $q\equiv 2 \pmod 3$. By using Kantor's model of $Q^+(7,q)$, we study the orbit structure of the action of $\mathrm{PSU}_3(q)$ on the polar space $Q^+(7,q)$ and obtain new (q^2+q)- and q^3-ovoids with an automorphism group $\mathrm{PSU}_3(q)$. In this way, we determine all the $\mathrm{PSU}_3(q)$-invariant intriguing sets of $Q^+(7,q)$. It turns out that such an intriguing set is either the unitary ovoid, one of the two new m-ovoids, or their complements.

Keywords **intriguing set, ovoid, orthogonal polar space, unitary group**

MSC(2020) **51A50, 51E20, 05B25**

doi: 10.1360/SSM-2022-0071