关于 Thurston 障碍的判定

献给杨乐教授 80 华诞

崔贵珍^{1,2,3,4}, 彭文娟^{1,2*}

1. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190;

2. 中国科学院华罗庚数学重点实验室, 北京 100190;

3. 华罗庚数学科学中心, 北京 100190;

4. 中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049

E-mail: gzcui@math.ac.cn, wenjpeng@amss.ac.cn

收稿日期: 2019-06-14; 接受日期: 2019-08-07; 网络出版日期: 2019-09-11; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11688101) 和中国科学院前沿科学重点研究 (批准号: QYZDJ-SSW-SYS005) 资助项目

摘要 本文利用不变图给出临界有限分歧覆盖没有 Thurston 障碍的一个判定条件.

关键词 临界有限分歧覆盖 Thurston 障碍 不变图

MSC (2010) 主题分类 37F10, 37F20

1 引言

复动力系统领域的重要结果之一是 Thurston 给出的关于临界有限有理函数拓扑特征的刻画^[1]. 在这项工作中, Thurston 深刻地应用了 Teichmüller 空间理论, 证明了具有双曲 orbifold 的临界有限分歧覆盖 Thurston 等价于有理函数的充要条件是没有 Thurston 障碍. 这个结果被推广到次双曲有理函数情形^[2,3] 和几何有限有理函数的情形^[4].

1985 年, Levy^[5] 在博士论文中引入了 Levy 循环的概念, 并且对二次临界有限分歧覆盖证明了 Thurston 障碍和 Levy 循环的等价性 (参见文献 [6]). 对于高次的情形, Shishikura 和 Tan^[7] 给出了反例, 构造了一族三次分歧覆盖, 具有 Thurston 障碍但是没有 Levy 循环. 对拓扑多项式, Thurston 障碍和 Levy 循环是等价的^[8]. 更多相关研究方法和结果可以参见文献 [7]. 一般而言, 对于给定的临界有限分歧覆盖, 直接验证它是否存在 Thurston 障碍是困难的.

注意到 Thurston 关于临界有限有理函数实现问题给出的是一个否定的判断准则, Dylan Thurston 在一定条件下给出了一个正面的判断方法^[9].

对于临界有限多项式, Douady 和 Hubbard^[10] 构造了 Hubbard 树, 利用 Hubbard 树可以刻画临界有限多项式 Julia 集的组合结构. 对于一般有理函数, 寻找类似于 Hubbard 树的不变图是一个公开

英文引用格式: Cui G Z, Peng W J. A criterion for the existence of Thurston obstructions (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 1373–1376, doi: 10.1360/N012019-00156

问题^[11]. 对 Newton 迭代映射^[12-14]、McMullen 有理函数族^[15,16]、Sierpiński 有理函数^[17,18] 和一般的临界有限有理函数^[19-21], 不变图的存在性都得到证明.

不变图为检查 Thurston 障碍的存在性提供了有效的辅助手段. 例如, 在对几何有限有理函数实现问题的研究中利用了局部不变图^[4]. 在对通过多项式 Folding 得到的临界有限分歧覆盖的研究中, Cui 等^[22] 也利用了不变图的结构给出 Folding 没有 Thurston 障碍的判定条件.

本文将利用不变图 (参见下文定义 1.1) 给出临界有限分歧覆盖没有 Thurston 障碍的判定条件.

设 f 是 Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的分歧覆盖, 且 $\deg f \geq 2$. 记 Ω_f 是 f 的分歧点的集合, 记 $\mathcal{P}_f = \overline{\bigcup_{n>0} f^n(\Omega_f)}$ 是 f 的临界集. 如果 $\mathcal{P}_f$ 是有限集, 则称 f 是临界有限分歧覆盖. 下面总假定 $f: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ 是临界有限分歧覆盖.

定义 1.1 一个有限连通图 $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ 称为 f 的一个组合不变图, 如果 $\mathcal{P}_f \subset G$, 且存在同胚 $\phi: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, 使得 ϕ 相对于 $\mathcal{P}_f$ 同伦于恒等映射, 且 $\phi(G) \subset f^{-1}(G)$.

进一步称组合不变图 $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ 为弱单的, 如果存在 $k > 0$ 使得 f 在 $(\phi \circ f)^k(f^{-1}(G))$ 上是单射.

本文证明了下面的结果.

定理 1.1 设 f 是临界有限分歧覆盖. 如果存在 f 的一个弱单的组合不变图, 则 f Thurston 等价于有理函数当且仅当 f 没有 Levy 循环.

关于 Thurston 障碍和 Levy 循环的定义参见第 2 节或者文献 [5].

注 1.1 临界有限多项式一定存在弱单的组合不变图. 例如, 从无穷远点出发, 通过外射线连接每个 $\mathcal{P}_f$ 点, 这样构造的图为弱单的组合不变图.

2 Thurston 障碍

本节将回顾 Thurston 定理的相关内容.

两个临界有限分歧覆盖 f 和 g 称为是 Thurston 等价的, 如果存在同胚 $\phi, \psi: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, 使得 ϕ 相对于 $\mathcal{P}_f$ 同伦于 ψ , 且 $\phi \circ f \circ \psi^{-1} = g$.

设 $f: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ 是临界有限分歧覆盖. 一条若当曲线 $\gamma \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{P}_f$ 称为是平凡的, 如果 $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \gamma$ 有一个分支不包含 $\mathcal{P}_f$ 的点; 称为是 peripheral 的, 如果 $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \gamma$ 的一个分支恰好包含 $\mathcal{P}_f$ 的一个点; 称为是 essential 的, 如果 $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \gamma$ 的每个分支都包含至少两个 $\mathcal{P}_f$ 点.

为简略起见, 称两条 essential 曲线同伦, 如果它们相对于临界集 $\mathcal{P}_f$ 同伦. 一个多重曲线族 Γ 是由 $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{P}_f$ 中有限条互不相交的 essential 曲线组成的集合, 且任何两条曲线不同伦. 多重曲线族 Γ 称为不变的, 如果对于每条曲线 $\gamma \in \Gamma$, $f^{-1}(\gamma)$ 的每个 essential 分支都同伦于 Γ 中的一条曲线.

多重曲线族 Γ 的转移矩阵 $M(\Gamma) = (a_{\beta\gamma})$ ($\beta, \gamma \in \Gamma$) 定义为

$$a_{\beta\gamma} = \sum_{\delta} \frac{1}{\deg(f: \delta \rightarrow \gamma)},$$

其中和式对 $f^{-1}(\gamma)$ 同伦于 β 的所有分支 δ 取和. 令 $\lambda(\Gamma) = \lambda(M(\Gamma))$ 表示矩阵 $M(\Gamma)$ 的谱半径. 多重曲线族 Γ 称为 f 的 Thurston 障碍, 如果 $\lambda(\Gamma) \geq 1$.

关于下面的定理以及双曲 orbifold 的定义参见文献 [1, 23].

定理 2.1 设 f 是临界有限分歧覆盖, 且 f 具有双曲 orbifold, 则 f Thurston 等价于有理函数当且仅当 f 没有 Thurston 障碍. 进一步, 这个有理函数在全纯共轭意义下是唯一的.

多重曲线族 $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ 称为一个 Levy 循环, 如果对 $0 \leq i < n$, $f^{-1}(\gamma_{i+1})$ 有一个分支 γ'_i 同伦于 γ_i 且 $\deg(f: \gamma'_i \rightarrow \gamma_{i+1}) = 1$, 其中 $\gamma_0 = \gamma_n$. 显然, Levy 循环一定是一个 Thurston 障碍.

多重曲线族 Γ 称为不可约的, 如果对于任意 $(\beta, \gamma) \in \Gamma \times \Gamma$, 存在一列 Γ 中的曲线 $\{\beta = \delta_0, \dots, \delta_k = \gamma\}$, 使得对 $1 \leq i \leq k$, $f^{-1}(\delta_i)$ 的一个分支同伦于 δ_{i-1} . 下面的引理是常用的 (参见文献 [23, 定理 B.6]).

引理 2.1 对任意多重曲线族 Γ , 若 $\lambda(\Gamma) > 0$, 则存在不可约多重曲线族 $\Gamma_0 \subset \Gamma$, 使得 $\lambda(\Gamma_0) = \lambda(\Gamma)$.

3 定理 1.1 的证明

引理 3.1 设 f 是临界有限分歧覆盖, 且具有弱单的组合不变图. 设 Γ 是一个不可约多重曲线族, 则对任意的 $\gamma \in \Gamma$, $f^{-1}(\gamma)$ 有唯一的一个分支同伦于 Γ 中的一条曲线.

证明 因为 Γ 是不可约多重曲线族, 我们只需证明对于任意 $\gamma \in \Gamma$, $f^{-1}(\gamma)$ 最多有一个分支同伦于 Γ 中的一条曲线.

令 G 为 f 的一个弱单的组合不变图. 不妨假设 $f(G) \subset G$. 由定义 1.1, 存在 $k \geq 0$ 使得 f 在 $G_0 = f^k(G)$ 上是单射. 令 $\kappa(\gamma, G_0)$ 表示 γ 与 G_0 的几何相交数, 即

$$\kappa(\gamma, G_0) = \min\{\#(\gamma' \cap G_0), \gamma' \text{ 同伦于 } \gamma\}.$$

我们断言对任意 $\gamma \in \Gamma$, 有 $\kappa(\gamma, G_0) > 0$. 否则 $f^{-k}(\gamma) \cap f^{-k}(G_0) = \emptyset$. 由 $f^{-k}(G_0) \supset G$, 我们得到 $f^{-k}(\gamma) \cap G = \emptyset$. 由于 $\mathcal{P}_f \subset G$, 因此, $f^{-k}(\gamma)$ 中的每条曲线都是平凡的. 这与 Γ 的不可约性矛盾.

不妨假设 $\kappa(\gamma, G_0) = \#(\gamma \cap G_0)$. 记 δ_s ($s = 1, 2, \dots, l$) 是 $f^{-1}(\gamma)$ 的所有同伦于 Γ 中的某条曲线的分支. 由于 $f: G_0 \rightarrow G_0$ 是单射, 因此, $f: (\bigcup_{s=1}^l \delta_s) \cap G_0 \rightarrow \gamma \cap G_0$ 是单射. 从而,

$$\sum_{s=1}^l \#(\delta_s \cap G_0) \leq \#(\gamma \cap G_0) = \kappa(\gamma, G_0). \quad (3.1)$$

因此, 如果存在 $\beta \in \Gamma$ 同伦于 $f^{-1}(\gamma)$ 的某条曲线, 则

$$\kappa(\beta, G_0) \leq \sum_{s=1}^l \#(\delta_s \cap G_0) \leq \kappa(\gamma, G_0).$$

由于 Γ 是不可约的, 对任意 $\beta \in \Gamma$, 存在一列 Γ 中的曲线 $\{\beta = \alpha_0, \dots, \alpha_m = \gamma\}$, 使得对 $1 \leq j \leq m$, $f^{-1}(\alpha_j)$ 的一个分支同伦于 α_{j-1} . 这样我们得到

$$\kappa(\beta, G_0) \leq \kappa(\alpha_1, G_0) \leq \dots \leq \kappa(\gamma, G_0).$$

同理, 可以证明 $\kappa(\gamma, G_0) \leq \kappa(\beta, G_0)$. 因此, 对任意的 $\beta, \gamma \in \Gamma$, 有 $\kappa(\beta, G_0) = \kappa(\gamma, G_0)$.

把这个等式和不等式 (3.1) 结合起来, 我们得到 $l \leq 1$, 即 $f^{-1}(\gamma)$ 最多有一个分支同伦于 Γ 中的一条曲线. $\square$

定理 1.1 的证明 因为一个 Levy 循环是 Thurston 障碍, 所以, 定理的必要性是显然的.

下面证明充分性. 我们将证明任何一个 Thurston 障碍一定包含一个 Levy 循环, 从而说明充分性成立. 设 Γ 是 f 的一个 Thurston 障碍. 由引理 2.1 可知, 存在不可约多重曲线族 $\Gamma_0 \subset \Gamma$, 使得 $\lambda(\Gamma_0) = \lambda(\Gamma) \geq 1$. 再由引理 3.1, 我们可以将 Γ_0 表示为 $\Gamma_0 = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, 使得对 $0 \leq i < n$, $f^{-1}(\gamma_{i+1})$ 有唯一的一个分支 γ'_i 同伦于 γ_i , 其中 $\gamma_0 = \gamma_n$. 由 $\lambda(\Gamma_0) \geq 1$ 可得 $\deg(f: \gamma'_i \rightarrow \gamma_{i+1}) = 1$. 因此, Γ_0 是一个 Levy 循环. $\square$

致谢 感谢审稿人悉心阅读本文, 以及提出的非常宝贵的意见.

参考文献

- 1 Douady A, Hubbard J H. A proof of Thurston's topological characterization of rational functions. *Acta Math*, 1993, 171: 263–297
- 2 Cui G, Tan L. A characterization of hyperbolic rational maps. *Invent Math*, 2011, 183: 451–516
- 3 Zhang G, Jiang Y. Combinatorial characterization of sub-hyperbolic rational maps. *Adv Math*, 2009, 221: 1990–2018
- 4 Cui G, Tan L. Hyperbolic-parabolic deformations of rational maps. *Sci China Math*, 2018, 61: 2157–2220
- 5 Levy S. Critically finite rational maps. PhD Thesis. Princeton: Princeton University, 1985
- 6 Tan L. Matings of quadratic polynomials. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1992, 12: 589–620
- 7 Shishikura M, Tan L. A family of cubic rational maps and matings of cubic polynomials. *Experiment Math*, 2000, 9: 29–53
- 8 Bielefeld B, Fisher Y, Hubbard J H. The classification of critically preperiodic polynomials as dynamical systems. *J Amer Math Soc*, 1992, 5: 721–762
- 9 Thurston D P. A positive characterization of rational maps. *ArXiv:1612.04424*, 2016
- 10 Douady A, Hubbard J H. Exploring the Mandelbrot set. The Orsay notes. [Http://pi.math.cornell.edu/~hubbard/OrsayEnglish.pdf](http://pi.math.cornell.edu/~hubbard/OrsayEnglish.pdf)
- 11 McMullen C T. The classification of conformal dynamical systems. In: *Current Developments in Mathematics*, 1995. Cambridge: International Press, 1995, 323–360
- 12 Tan L. Branched coverings and cubic Newton maps. *Fund Math*, 1997, 154: 207–260
- 13 Lodge R, Mikulich Y, Schleicher D. Combinatorial properties of Newton maps. *ArXiv:1510.02761*, 2015
- 14 Lodge R, Mikulich Y, Schleicher D. A classification of postcritically finite Newton maps. *ArXiv:1510.02771*, 2015
- 15 Qiu W, Wang X, Yin Y. Dynamics of McMullen maps. *Adv Math*, 2012, 229: 2525–2577
- 16 Qiu W, Roesch P, Wang X, et al. Hyperbolic components of McMullen maps. *Ann Sci École Norm Sup (4)*, 2015, 48: 703–737
- 17 Rees M. Persistent Markov partitions for rational maps. *ArXiv:1306.6166*, 2013
- 18 Gao Y, Haïssinsky P, Meyer D, et al. Invariant Jordan curves of Sierpiński carpet rational maps. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2018, 38: 583–600
- 19 Bonk M, Meyer D. Expanding Thurston Maps. *Mathematical Surveys and Monographs*, vol. 225. Providence: Amer Math Soc, 2017
- 20 Cannon J W, Floyd W J, Parry W R. Constructing subdivision rules from rational maps. *Conform Geom Dyn*, 2007, 11: 128–136
- 21 Cui G, Gao Y, Zeng J. Invariant graphs for rational maps. *ArXiv:1907.02870*, 2019
- 22 Cui G, Peng W, Tan L. Renormalizations and wandering Jordan curves of rational maps. *Comm Math Phys*, 2016, 344: 67–115
- 23 McMullen C T. *Complex Dynamics and Renormalizations*. Princeton: Princeton University Press, 1994

A criterion for the existence of Thurston obstructions

Guizhen Cui & Wenjuan Peng

Abstract In this paper, by the invariant graphs, we give a criterion for a post-critically finite branched covering having no Thurston obstructions.

Keywords post-critically finite branched covering, Thurston obstruction, invariant graphs

MSC(2010) 37F10, 37F20

doi: 10.1360/N012019-00156