轴对称 Navier-Stokes 方程的 Liouville 型定理

献给陈恕行教授 80 华诞

雷震^{1*}, 任潇¹, 张旗²

1. 复旦大学数学科学学院, 上海 200433;

2. Department of Mathematics, University of California, Riverside, Riverside, CA 92521, USA

E-mail: zlei@fudan.edu.cn, xiaoren18@fudan.edu.cn, qizhang@math.ucr.edu

收稿日期: 2020-06-09; 接受日期: 2020-11-02; 网络出版日期: 2021-03-05; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11725102) 资助项目

摘要 不可压 Navier-Stokes 方程的有界古代解分类是一个古老而困难的问题, 与 Navier-Stokes 方程整体正则性理论关系密切. 特别地, 有关于轴对称 Navier-Stokes 方程的如下 Liouville 型猜想: 对于 3 维不可压轴对称 Navier-Stokes 方程, 其有界古代解是常数. 本文给出一种新的加权能量估计的方法, 并在适当的 $\Gamma = rv_\theta$ 收敛速率条件下得到 Liouville 定理; 并且, 用类似的能量估计, 结合紧性方法, 给出 z -周期稳态解的 Liouville 定理的一个证明. 本文的定理中不需要对速度场假设不自然的衰减速率条件.

关键词 Navier-Stokes 方程 古代解 轴对称 Liouville 定理

MSC (2020) 主题分类 35Q30

1 引言

经典的 Liouville 定理, 也即 $\mathbb{R}^n$ 上的有界调和函数是常数, 已经被人们推广到诸多的椭圆方程和抛物方程中, 并在相关数学问题中产生了很多应用. 本文考虑 3 维 Navier-Stokes 方程的有界古代解是否为常数这一问题. 它与 3 维 Navier-Stokes 方程的正则性问题有着密切的关系. 为了研究非线性方程的奇点是否存在, 以及如果存在则具有什么样的结构, 人们常常运用爆破 (blow-up) 过程: 将解在可能存在的奇点附近作尺度变换, 并取某种适当意义下的极限. 对于 $\mathbb{R}^n$ 上的发展型方程来说, 这个过程通常可以产生 $\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]$ 上的有界解. 这样的解一般被称作有界古代解. 如果能获得有界古代解的分类情形, 则可以相应地获得方程的奇点结构的信息, 甚至直接排除其奇点存在的可能. 对于 3 维不可压 Navier-Stokes 方程, 也可以采用这一方法 (参见文献 [1]). 自然地, 人们希望分类如此得到的有界古代解. 但是, 完全解答这个分类问题似乎超出了现有理论的能力范围. 事实上, 即便是对于稳态情形, Navier-Stokes 方程的有界古代解的分类也依然是困难的公开问题. 这个问题包含了关于稳态 Navier-

英文引用格式: Lei Z, Ren X, Zhang Q S. Liouville type theorems for axially symmetric Navier-Stokes equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 971–984, doi: 10.1360/SSM-2020-0179

Stokes 方程所谓 D- 解的一个著名难题: 若一个 $\mathbb{R}^3$ 上的稳态解在无穷远处趋于 0, 且 Dirichlet 能量有限, 则它是否恒等于 0? 尽管 Dirichlet 能量有限和无穷远处趋于 0 这两个额外条件看起来比有界性要强得多, 但它们并没有使问题变得容易, 即便进一步限制在轴对称情形也是如此 (参见文献 [2, 3]).

在过去的几十年中, 对 3 维不可压 Navier-Stokes 方程已经有了大量的分析方面的研究. 我们在这里列出一些著名的相关工作. 早在 1934 年, Leray^[4] 提出了倒向自相似解 (是一种特殊的古代解) 的存在性问题. Nečas 等^[5] 证明了这样的解如果关于空间是 L^3 的, 则一定是平凡的; Tsai^[6] 对 L^3 这一限制条件有改进. 在文献 [7] 这一重要工作中, Escauriaza 等证明了 $L_t^\infty L_x^3$ 解一定是正则的, 这可以很快推出文献 [5] 的结果; 他们证明的第一步正是在可能存在的奇点处使用一种爆破过程, 以得到 $L_t^\infty L_x^3$ 古代解. 这类工作都运用了 Caffarelli 等^[8] 的部分正则性理论作为基础. 具体来说, 文献 [8] 建立了 Navier-Stokes 方程的 ϵ - 正则性理论, 并证明了合适弱解的 1 维 Hausdorff 测度一定是 0. 特别地, 这一结果意味着在轴对称情形, 奇点只可能发生在轴上. 需要指出的是, Caffarelli-Kohn-Nirenberg 理论是基于摄动方法的. 在很多情形, 运用第 1 节介绍的爆破过程并研究得到的古代解, 可能会得到超出摄动方法的结果.

Koch 等^[1] 作出了以下猜想: 对于 3 维不可压轴对称 Navier-Stokes 方程 (axially symmetric Navier-Stokes equations, ASNS), 有界古代解是常数. 他们在速度场的临界衰减条件下得到了一些部分结果. 例如, 对于 ASNS, 若假设 $|v(x, t)| \leq C/|x'|$, 则 Liouville 定理成立, 其中 v 是速度, $x = (x^1, x^2, x^3)$ 和 $x' = (x^1, x^2, 0)$ 是笛卡尔坐标, 对称轴为 z - 轴. 在文献 [9] 中, 这一结果被推广到 $v \in \text{BMO}^{-1}$ 的条件下 (如果 $|v_z| \leq \frac{C}{|x'|}$, 则这一条件成立). 读者可参见文献 [10–12] 的相关结果和文献 [13] 中的进一步研究.

本文考虑 ASNS 的 z - 周期有界古代解. 为了陈述主要结果, 我们需要引入一些记号. 设 v 为速度场, v_r 、 v_z 和 v_θ 分别为 v 在标准的柱坐标系 (r, z, θ) 中关于 $\{e_r, e_z, e_\theta\}$ 的分量. 对于轴对称情形, v_r 、 v_z 和 v_θ 都与 θ 无关. 这样, ASNS 可以写为如下的非线性系统:

$$\begin{cases} \left(\Delta - \frac{1}{r^2} \right) v_r - (b \cdot \nabla) v_r + \frac{v_\theta^2}{r} - \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial t} = 0, \\ \left(\Delta - \frac{1}{r^2} \right) v_\theta - (b \cdot \nabla) v_\theta - \frac{v_\theta v_r}{r} - \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = 0, \\ \Delta v_z - (b \cdot \nabla) v_z - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中

$$b(x, t) = v_r e_r + v_z e_z, \quad (1.2)$$

而最后一个方程是速度场的无源性条件. Δ 是作用于标量的 3 维 Laplace 算子, ∇ 是梯度算子, 它们在柱坐标系下可分别写为

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

观察到 v_θ 的方程与压力 p 无关. 令 $\Gamma = rv_\theta$, 则函数 Γ 满足方程

$$\Delta \Gamma - (b \cdot \nabla) \Gamma - \frac{2}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} - \frac{\partial \Gamma}{\partial t} = 0, \quad \text{div } b = 0. \quad (1.3)$$

所以 Γ 满足极值原理, 这是轴对称 Navier-Stokes 方程的一个特殊性质. 一个重要的推论是, 轴对称 Navier-Stokes 方程的 Cauchy 问题有先验估计 $\|\Gamma\|_{L^\infty} \leq \|\Gamma_i n\|_{L^\infty}$. 根据 $\|\Gamma\|_{L^\infty}$ 的尺度不变性, 通过爆破过程得到的有界温和古代解也自然地满足 Γ 有界. 记

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \Gamma = \lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{z, t} \Gamma(r, z, t). \quad (1.4)$$

第 2 节中将证明, 如果 v 是使得 Γ 有界的有界温和古代解, 则有 $\limsup_{r \rightarrow \infty} \Gamma = \sup \Gamma$.

本文给出一种新的加权能量估计的方法来研究 ASNS 系统. 值得指出的是, 我们使用的权函数是由某些变系数线性抛物方程的解给出的. 作为这一方法的应用, 我们得到两个主要结果如下:

定理 1.1 设 $v = v_\theta e_\theta + v_r e_r + v_z e_z$ 是 ASNS 的有界温和古代解, 使得 $\Gamma = rv_\theta$ 有界. 那么存在一个小常数 $\epsilon_0 \in (0, 1)$, 仅依赖于 $\|v\|_\infty$, 使得如果对于 z, t 和较大的 r , 有

$$\left| \Gamma^2(r, z, t) - \limsup_{r \rightarrow \infty} \Gamma^2 \right| \leq \frac{\epsilon_0}{r} \limsup_{r \rightarrow \infty} \Gamma^2 \quad (1.5)$$

一致成立, 则 $v = ce_z$, 其中 c 是常数.

注 1.1 定理 1.1 条件中的 ϵ_0 是一个小常数, 能否改进为任意常数是一个有趣的问题.

定理 1.2 设 $v = v_\theta e_\theta + v_r e_r + v_z e_z$ 是 ASNS 的有界稳态古代解, 且满足 $\Gamma = rv_\theta$ 有界. 假设 v 在 z 方向是周期的, 则 $v = ce_z$, 其中 c 是常数.

注 1.2 定理 1.2 中, 稳态这一条件事实上可以去掉. 我们已经在本文的后续工作 [14] 中给出了更一般的定理, 文献 [14] 中的证明是基于抛物方程的 De Giorgi-Nash-Moser 理论, 同时运用了本文中一些重要的观察. 本文中, 我们用较初等的能量方法可以处理稳态这一重要情形.

注 1.3 对于温和解的定义和性质, 可参见文献 [1], 该文献中也可以找到通过爆破过程得到有界温和古代解的严格做法. 简略来说, 这样的解需要满足特定的包含热核和 Leray 投影算子的积分方程, 这样就排除了形如 $v = a(t)$ 和 $P = -a'(t) \cdot x$ 的非常数古代解, 这里 $a(t)$ 是任何只依赖于时间的向量场. 可以证明, 温和解一旦是有界的, 那么它关于时间和空间也是无限阶光滑的.

与文献中已有的大部分 Navier-Stokes 方程 Liouville 型定理不同的是, 我们的两个结果都没有假设速度场的额外衰减性条件, 而速度场衰减条件的缺失正是建立一般情形 Navier-Stokes 方程 Liouville 定理的难点所在. 本文余下内容的安排如下. 第 2 节引入一种加权能量估计的方法, 其中的权函数将由某些线性抛物方程的解给出. 在此基础上, 结合定理 1.1 中的 Γ 收敛速度条件, 我们得以处理能量估计中的一些关键项, 从而得到 Liouville 定理. 第 3 节首先通过紧性方法得出 v_r 和 Γ 在 $r \rightarrow \infty$ 时的收敛性, 然后再说明第 2 节的能量方法稍加修改后即可证得定理 1.2, 证明中克服速度场无衰减估计这一障碍的主要思想是, 利用 z -方向的周期性得到流函数的估计, 从而改进对流项的估计.

2 定理 1.1 的证明

本节运用加权能量估计的方法, 考虑满足 Γ 收敛速率条件的有界温和古代解. 我们将证明

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \Gamma = 0 \quad (2.1)$$

关于 t 和 z 一致成立. 一旦上式成立, 那么由文献 [15, 定理 1.3 和注 1.4] 将会得出 $v = ce_z$.

回顾 Γ 所满足的方程

$$\partial_r^2 \Gamma + \partial_z^2 \Gamma - v_r \partial_r \Gamma - v_z \partial_z \Gamma - \frac{1}{r} \partial_r \Gamma - \partial_t \Gamma = 0. \quad (2.2)$$

用反证法, 假设 (2.1) 不成立, 我们来导出矛盾. 也就是说,

$$\limsup_{r \rightarrow \infty, z, t \rightarrow t_\infty} |\Gamma| = c_0 \neq 0$$

对某常数 c_0 成立, 这里 t_∞ 要么是 $-\infty$, 要么是一个有限的非正数. 不失一般性, 可以假设 $c_0 = 1$. 否则总可以将 Γ 乘以一个常数. 接下来, 将证明分为若干步进行.

第 1 步 我们断言

$$|\Gamma| \leq 1. \quad (2.3)$$

其原因在于

$$\limsup_{r \rightarrow \infty, z, t \rightarrow t_\infty} |\Gamma| = \sup_{r, z, t} |\Gamma|. \quad (2.4)$$

否则, 将存在有界序列 $\{r_i\}$ 及序列 z_i 和 $t_i \rightarrow t_\infty$ 使得

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |\Gamma(r_i, z_i, t_i)| = \sup_{r, z, t} |\Gamma|.$$

考虑将坐标适当平移后的函数序列

$$\Gamma_i = \Gamma_i(r, z, t) = \Gamma(r, z + z_i, t + t_i).$$

由弱紧性和 Γ 满足的抛物方程, 可以找到一列在 $C_{\text{loc}}^{2,1}$ 拓扑 (2 和 1 分别是对空间和时间的可微次数) 意义下收敛的 Γ_i 的子列 (仍记作 Γ_i), 使其收敛到一个满足以下方程的有界古代解 Γ_∞ :

$$\Delta \Gamma_\infty - \bar{b} \nabla \Gamma_\infty - \frac{2}{r} \partial_r \Gamma_\infty - \partial_t \Gamma_\infty = 0,$$

这里, $\bar{b}$ 是在 $C^{2,1}$ 中有界的无源向量场. 我们可以假设 $r_i \rightarrow r_\infty < +\infty$. 那么 $|\Gamma_\infty|$ 将在点 $(r_\infty, z = 0, t = 0)$ 处取得非零极大值. 从而, 根据极值原理得到 Γ_∞ 是非零的常值函数. 这与在 z -轴上 $\Gamma_\infty = 0$ 这一事实矛盾. 这就证明了 (2.3). 接下来将假定 $\limsup_{r \rightarrow \infty} |\Gamma| = \sup |\Gamma| = 1$.

第 2 步 令 $R > R_0 > r_0 (> 1)$ 为一系列待定的大数. 取权函数 λ 使得

$$\lambda = \begin{cases} r, & r \in [0, r_0], \\ r_0 - \frac{r_0 - 1}{R_0 - r_0}(r - r_0), & r \in [r_0, R_0], \\ 1, & r \geq R_0. \end{cases} \quad (2.5)$$

考虑区域

$$D = D_1 \cup D_2,$$

其中

$$D_1 = \{(r, z, t) \mid 0 \leq r < R_0; -R \leq z \leq R, -T \leq t \leq 0\},$$

$$D_2 = \{(r, z, t) \mid R_0 \leq r \leq R; -R \leq z \leq R, -T \leq t \leq 0\}.$$

取

$$\phi_1 = \xi_1(z) \frac{t}{-T},$$

这里 $\xi_1 = \xi_1(z)$ 是 $[-R, R]$ 上的光滑截断函数, 使得 $0 \leq \xi_1 \leq 1$, $|\xi_1'| \leq C/R$, 且当 $z \in [-R/2, R/2]$ 时有 $\xi_1(z) = 1$. 令 $\phi_2 = \phi_2(r, z, t)$ 为如下 (线性) 倒向抛物方程在终时条件和边值条件下的解:

$$\begin{cases} \partial_r^2 \phi_2 + \partial_z^2 \phi_2 + \frac{2\lambda'(r)}{\lambda(r)} \partial_r \phi_2 + v_r \partial_r \phi_2 + v_z \partial_z \phi_2 \\ \quad + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\lambda'(r)}{\lambda(r)} - \frac{1}{r} \right) v_r + \left(\frac{\lambda(r)}{r} \right)' \frac{1}{\lambda(r)} \right] \phi_2 - A \phi_2 + \partial_t \phi_2 = 0, \quad (r, z) \in D_2, \\ \phi_2(R_0, z, t) = \phi_1(z, t), \quad \phi_2(R, z, t) = 0, \quad t \in [-T, 0], \\ \phi_2 = 0, \quad \text{如果 } z = R, -R, \\ \phi_2(r, z, 0) = 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

这里取 $A = \frac{1}{2R_0} \|v_r\|_\infty$. 表达式中的 λ 实际上满足当 $r \geq R_0$ 时 $\lambda = 1$ 和 $\lambda' = 0$, 但为了便于在其他场合使用这里的估计结果, 我们暂时将 λ 保留.

由于 $r \geq R_0 > 1$ 和 $\lambda = 1$ 在 D_2 中成立, 标准的抛物方程理论告诉我们, 上述问题的解 ϕ_2 存在且唯一, 并满足 $0 \leq \phi_2 \leq 1$ 和 $\|\nabla \phi_2\|_\infty \leq A_0$, 这里 A_0 是只依赖于 $b = v_r e_r + v_z e_z$ 的 C^1 范数的一个常数. 下面计算

$$\begin{aligned} & - \int_{D_1} (\partial_r^2 \Gamma + \partial_z^2 \Gamma) \Gamma \phi_1^2 d\mu dt \\ &= - \int_{D_1} (\partial_r^2 \Gamma + \partial_z^2 \Gamma) \Gamma \phi_1^2 \lambda(r) dr dz dt \\ &= \int_{D_1} (|\partial_r \Gamma|^2 + |\partial_z \Gamma|^2) \phi_1^2 d\mu dt + \int_{-T}^0 \int_{-R}^R \int_0^{R_0} (\partial_r \Gamma) \Gamma \phi_1^2(z, t) \lambda'(r) dr dz dt \\ & \quad + \int_{-T}^0 \int_{-R}^R \int_0^{R_0} (\partial_z \Gamma) \Gamma \phi_1(z, t) \partial_z \phi_1(z, t) \lambda(r) dr dz dt - \int_{-T}^0 \int_{-R}^R (\partial_r \Gamma) \Gamma \phi_1^2(z, t) \lambda(r) |_{r=R_0} dz dt. \end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned} & - \int_{D_2} (\partial_r^2 \Gamma + \partial_z^2 \Gamma) \Gamma \phi_2^2 d\mu dt \\ &= \int_{D_2} (|\partial_r \Gamma|^2 + |\partial_z \Gamma|^2) \phi_2^2 d\mu dt + \int_{-T}^0 \int_{-R}^R \int_{R_0}^R (\partial_r \Gamma) \Gamma \phi_2^2 \lambda'(r) dr dz dt \\ & \quad + \int_{-T}^0 \int_{-R}^R \int_{R_0}^R (\partial_r \Gamma) \Gamma \phi_2 \partial_r \phi_2 \lambda(r) dr dz dt + \int_{-T}^0 \int_{-R}^R \int_{R_0}^R (\partial_z \Gamma) \Gamma \phi_2 \partial_z \phi_2 \lambda(r) dr dz dt \\ & \quad + \int_{-T}^0 \int_{-R}^R (\partial_r \Gamma) \Gamma \phi_2^2 \lambda(r) |_{r=R_0} dz dt. \end{aligned}$$

将前两个等式相加, 并注意到两者最后的边界项相互抵消, 以及当 $r > R_0$ 时 $\lambda' = 0$, 得到

$$\begin{aligned} L &\equiv \int_{D_1} (|\partial_r \Gamma|^2 + |\partial_z \Gamma|^2) \phi_1^2 d\mu dt + \int_{D_2} (|\partial_r \Gamma|^2 + |\partial_z \Gamma|^2) \phi_2^2 d\mu dt \\ &= \underbrace{- \int_{D_1} (\partial_r^2 \Gamma + \partial_z^2 \Gamma) \Gamma \phi_1^2 d\mu dt}_{T_1} - \underbrace{\int_{-T}^0 \int_{-R}^R \int_0^{R_0} (\partial_r \Gamma) \Gamma \phi_1^2(z, t) \lambda'(r) dr dz dt}_{T_2} \\ & \quad - \underbrace{\int_{-T}^0 \int_{-R}^R \int_0^{R_0} (\partial_z \Gamma) \Gamma \phi_1 \partial_z \phi_1 \lambda(r) dr dz dt}_{T_3} - \underbrace{\int_{D_2} (\partial_r^2 \Gamma + \partial_z^2 \Gamma) \Gamma \phi_2^2 d\mu dt}_{T_4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{- \int_{-T}^0 \int_{-R}^R \int_{R_0}^R (\partial_r \Gamma) \Gamma^2 \phi_2 \partial_r \phi_2 \lambda(r) dr dz dt}_{T_5} \quad \underbrace{- \int_{-T}^0 \int_{-R}^R \int_{R_0}^R (\partial_z \Gamma) \Gamma^2 \phi_2 \partial_z \phi_2 \lambda(r) dr dz dt}_{T_6} \\
 & \equiv T_1 + \cdots + T_6.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

在接下来的证明中, 将分别得到 T_i ($i = 1, \dots, 6$) 的估计.

第 3 步 T_1 的估计.

由方程 (2.2) 知,

$$T_1 = - \int_{-T}^0 \int_{-R}^R \int_0^{R_0} \left(v_r \partial_r \Gamma + v_z \partial_z \Gamma + \frac{1}{r} \partial_r \Gamma + \partial_t \Gamma \right) \Gamma \phi_1^2 \lambda(r) dr dz dt.$$

分部积分并利用 $v_r e_r + v_z e_z$ 散度为 0, 得到

$$\begin{aligned}
 T_1 &= - \frac{1}{2} \int_{-T}^0 \int_{-R}^R \int_0^{R_0} \left[v_r \partial_r (\Gamma^2 - 1) + v_z \partial_z (\Gamma^2 - 1) + \frac{1}{r} \partial_r \Gamma^2 + \partial_t (\Gamma^2 - 1) \right] \phi_1^2(z, t) \lambda(r) dr dz dt \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-T}^0 \int_{-R}^R \int_0^{R_0} (v_r \partial_r \phi_1^2 + v_z \partial_z \phi_1^2) (\Gamma^2 - 1) \lambda(r) dr dz dt}_{T_{11}} \\
 &\quad - \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-T}^0 \int_{-R}^R v_r (\Gamma^2 - 1) \phi_1^2 \lambda(r) \Big|_{r=R_0} dz dt}_{T_{12}} \\
 &\quad + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-T}^0 \int_{-R}^R \int_0^{R_0} v_r (\Gamma^2 - 1) \phi_1^2 \left(\lambda'(r) - \frac{\lambda(r)}{r} \right) dr dz dt}_{T_{13}} \\
 &\quad + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-T}^0 \int_{-R}^R \int_0^{R_0} \Gamma^2 \phi_1^2 \left(\frac{\lambda(r)}{r} \right)' dr dz dt}_{T_{14}} \quad - \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-T}^0 \int_{-R}^R \Gamma^2 \phi_1^2 \frac{\lambda(r)}{r} \Big|_{r=R_0} dz dt}_{T_{15}} \\
 &\quad + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-T}^0 \int_{-R}^R \int_0^{R_0} (\Gamma^2 - 1) \partial_t \phi_1^2 \lambda(r) dr dz dt}_{T_{16}} + \underbrace{\left(-\frac{1}{2} \right) \int_{-R}^R \int_0^{R_0} (\Gamma^2 - 1) \phi_1^2 \Big|_{t=-T}^{t=0} \lambda(r) dr dz}_{T_{17}} \\
 &\equiv T_{11} + \cdots + T_{17}.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

注意到

$$|T_{11}| \leq \|v_z\|_\infty \frac{CT}{R} R R_0 \|\lambda\|_\infty \|\Gamma^2 - 1\|_\infty = C R_0 r_0 T \|v_z\|_\infty \|\Gamma^2 - 1\|_\infty.$$

T_{12} 是边界项, 它将与 D_2 上积分产生的边界项, 即 T_{42} 抵消. $T_{14} \leq 0$ 和 $T_{15} \leq 0$ 是显然的. 另外, 由于

$$|\partial_t \phi_1| \leq \frac{1}{T}$$

和

$$\int_0^{R_0} \lambda(r) dr = \frac{1}{2} (R_0 - r_0) + \frac{1}{2} R_0 r_0,$$

通过直接计算可得

$$T_{16} \leq \frac{1}{2} \|\Gamma^2 - 1\|_\infty R (R_0 r_0 + R_0 - r_0) \leq \|\Gamma^2 - 1\|_\infty R R_0 r_0. \tag{2.9}$$

第二个不等号成立是由于 $r_0 > 1$. 类似地有

$$T_{17} \leq -\frac{1}{2} \inf[1 - \Gamma^2(R_0, \cdot, -T)] R(R_0 r_0 + R_0 - r_0) \leq 0. \quad (2.10)$$

暂时保留 T_{12} 和 T_{13} , 得到

$$\begin{aligned} T_1 &\leq CR_0 r_0 \|v_z\|_\infty \|\Gamma^2 - 1\|_\infty T + \|\Gamma^2 - 1\|_\infty R R_0 r_0 + T_{12} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-T}^0 \int_{-R}^R \int_0^{R_0} v_r (\Gamma^2 - 1) \phi_1^2 \left(\lambda'(r) - \frac{\lambda(r)}{r} \right) dr dz dt. \end{aligned} \quad (2.11)$$

第 4 步 $T_2, \dots, T_7$ 的估计.

首先来估计 T_2 . 根据我们对 λ 的选取, 可得

$$\begin{aligned} T_2 &= -\frac{1}{2} \int_{-T}^0 \int_{-R}^R \int_0^{R_0} \partial_r (\Gamma^2 - 1) \phi_1^2 \lambda'(r) dr dz dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-T}^0 \int_{-R}^R \phi_1^2 \int_0^{r_0} \partial_r (\Gamma^2 - 1) dr dz dt + \frac{r_0 - 1}{2(R_0 - r_0)} \int_{-T}^0 \int_{-R}^R \phi_1^2 \int_{r_0}^{R_0} \partial_r (\Gamma^2 - 1) dr dz dt \\ &\leq \left[-\frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6} + \frac{r_0 - 1}{3(R_0 - r_0)} \right) \sup_{r=r_0, t \in [-T, 0]} (1 - \Gamma^2) \right] RT. \end{aligned} \quad (2.12)$$

接下来, 由于 $|\partial_z \phi_1| \leq C/R$, 因此,

$$T_3 \leq C \|\partial_z \Gamma\|_\infty r_0 R_0 T. \quad (2.13)$$

现在处理 $T_4, \dots, T_7$, 它们只在 D_2 上积分. 由方程 (2.2) 知,

$$T_4 = - \int_{-T}^0 \int_{-R}^R \int_{R_0}^R \left(v_r \partial_r \Gamma + v_z \partial_z \Gamma + \frac{1}{r} \partial_r \Gamma + \partial_t \Gamma \right) \Gamma \phi_2^2 \lambda(r) dr dz dt.$$

在分部积分并运用 $v_r e_r + v_z e_z$ 散度为 0 后, 得到

$$\begin{aligned} T_4 &= -\frac{1}{2} \int_{-T}^0 \int_{-R}^R \int_{R_0}^R \left[v_r \partial_r (\Gamma^2 - 1) + v_z \partial_z (\Gamma^2 - 1) + \frac{1}{r} \partial_r (\Gamma^2 - 1) + \partial_t (\Gamma^2 - 1) \right] \phi_2^2 \lambda(r) dr dz dt \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-T}^0 \int_{-R}^R \int_{R_0}^R (v_r \partial_r \phi_2^2 + v_z \partial_z \phi_2^2) (\Gamma^2 - 1) \lambda(r) dr dz dt}_{T_{41}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-T}^0 \int_{-R}^R v_r (\Gamma^2 - 1) \phi_2^2 \lambda(r) |_{r=R_0} dz dt}_{T_{42}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-T}^0 \int_{-R}^R \int_{R_0}^R v_r (\Gamma^2 - 1) \phi_2^2 \left(\lambda'(r) - \frac{\lambda(r)}{r} \right) dr dz dt}_{T_{43}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-T}^0 \int_{-R}^R \int_{R_0}^R (\Gamma^2 - 1) \phi_2^2 \left(\frac{\lambda(r)}{r} \right)' dr dz dt}_{T_{44}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-T}^0 \int_{-R}^R (\Gamma^2 - 1) \phi_2^2 \frac{\lambda(r)}{r} \Big|_{r=R_0} dz dt}_{T_{45}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-T}^0 \int_{-R}^R \int_{R_0}^R (\Gamma^2 - 1) \partial_t \phi_2^2 \lambda(r) dr dz dt}_{T_{46}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-R}^R \int_{R_0}^R (\Gamma^2 - 1) \phi_2^2 \lambda(r) |_{t=-T} dr dz}_{T_{47}} \end{aligned}$$

$$\equiv T_{41} + \cdots + T_{47}. \quad (2.14)$$

注意到 T_{42} 将和 T_{12} 抵消, 另外, $T_{45} \leq 0$,

$$T_{47} \leq - \inf_{r \in [R_0, R]} (1 - \Gamma^2(r, \cdot, -T)) \int_{-R}^R \int_{R_0}^R \phi_2^2(r, z, -T) \lambda(r) dr dz \leq 0. \quad (2.15)$$

所以,

$$T_4 \leq T_{41} + T_{42} + T_{43} + T_{44} + T_{46}.$$

接着, 由于此处 $\lambda(r) = 1$, 因此,

$$\begin{aligned} T_5 &= -\frac{1}{2} \int_{-T}^0 \int_{-R}^R \int_{R_0}^R \partial_r (\Gamma^2 - 1) \partial_r \phi_2^2 \lambda(r) dr dz dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-T}^0 \int_{-R}^R \int_{R_0}^R (\Gamma^2 - 1) \partial_r^2 \phi_2^2 \lambda(r) dr dz dt - \frac{1}{2} \int_{-T}^0 \int_{-R}^R (\Gamma^2 - 1) \partial_r \phi_2^2 \lambda(r) \Big|_{R_0}^R dz dt. \end{aligned} \quad (2.16)$$

最后,

$$T_6 = \frac{1}{2} \int_{-T}^0 \int_{-R}^R \int_{R_0}^R (\Gamma^2 - 1) \partial_z^2 \phi_2^2 \lambda(r) dr dz dt. \quad (2.17)$$

综合 T_i ($i = 1, \dots, 6$) 的估计, 结合边界项 T_{12} 和 T_{42} 的相互抵消, 有

$$\begin{aligned} L &\leq \left[-\frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6} + \frac{r_0 - 1}{3(R_0 - r_0)} \right) \sup_{r=r_0, t \in [-T, 0]} (1 - \Gamma^2) \right] RT \\ &\quad + CR_0 r_0 \|v_z\|_\infty \|\Gamma^2 - 1\|_\infty T + \|\Gamma^2 - 1\|_\infty RR_0 r_0 + C \|\partial_z \Gamma\|_\infty r_0 R_0 T \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-T}^0 \int_{-R}^R \int_0^{R_0} v_r (\Gamma^2 - 1) \phi_1^2(z) \left(\lambda'(r) - \frac{\lambda(r)}{r} \right) dr dz dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-T}^0 \int_{-R}^R \int_{R_0}^R \left[\partial_r^2 \phi_2^2 + \partial_z^2 \phi_2^2 + v_r \partial_r \phi_2^2 + v_z \partial_z \phi_2^2 + 2 \frac{\lambda'(r)}{\lambda(r)} \partial_r \phi_2^2 \right. \\ &\quad \left. + v_r \left(\frac{\lambda'(r)}{\lambda(r)} - \frac{1}{r} \right) \phi_2^2 + \left(\frac{\lambda(r)}{r} \right)' \frac{1}{\lambda(r)} \phi_2^2 + \partial_t \phi_2^2 \right] (\Gamma^2 - 1) \lambda(r) dr dz dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-T}^0 \int_{-R}^R (\Gamma^2 - 1) \partial_r \phi_2^2 \lambda(r) \Big|_{r=R_0} dz dt. \end{aligned}$$

由于 $\Gamma^2 - 1 \leq 0$, 并且 ϕ_2 是 (2.6) 的解, 因此, 上面不等式的倒数第二个积分式是非正的. 从而,

$$\begin{aligned} L &\leq -\frac{1}{6} RT + \left(\frac{1}{6} + \frac{r_0 - 1}{3(R_0 - r_0)} \right) \sup_{r=r_0, t \in [-T, 0]} (1 - \Gamma^2) RT + CR_0 r_0 \|v_z\|_\infty T \|\Gamma^2 - 1\|_\infty \\ &\quad + \|\Gamma^2 - 1\|_\infty RR_0 r_0 + C \|\partial_z \Gamma\|_\infty r_0 R_0 T \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-T}^0 \int_{-R}^R \int_0^{R_0} v_r (\Gamma^2 - 1) \phi_1^2(z) \left(\lambda'(r) - \frac{\lambda(r)}{r} \right) dr dz dt}_{I_1} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-T}^0 \int_{-R}^R (\Gamma^2 - 1) \partial_r \phi_2^2 \lambda(r) \Big|_{r=R_0} dz dt}_{I_2} \\ &\equiv \cdots + I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (2.18)$$

这里最后两个积分分别记作 I_1 和 I_2 .

第 5 步 我们还需要估计 I_1 和 I_2 这两个积分式.

首先考虑 I_2 . 注意到在 D_2 中, 方程 (2.6) 的低阶项系数可以被 $\frac{1}{R_0} + \|v_r\|_\infty + \|v_z\|_\infty$ 控制. ϕ_2 在 $r = R_0$ 处的边界值等于 ϕ_1 , 满足 $0 \leq \phi_1 \leq 1$, $|\partial_z \phi_1| \leq C/R$ 和 $|\partial_t \phi_1| \leq 1/T$. 由抛物方程的梯度估计可知,

$$|\partial_r \phi_2|_{r=R_0} \leq C_1, \quad C_1 = C_1(\|v_r\|_\infty, \|v_z\|_\infty).$$

所以,

$$I_2 \leq C_1 \sup_{r=R_0, t \in [-T, 0]} (1 - \Gamma^2) RT. \quad (2.19)$$

最后,

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{-T}^0 \int_{-R}^R \int_{r_0}^{R_0} v_r (\Gamma^2 - 1) \phi_1^2(z, t) \left(\lambda'(r) - \frac{\lambda(r)}{r} \right) dr dz dt.$$

由直接计算, 当 $R_0 \gg r_0$ 时,

$$\left| \lambda'(r) - \frac{\lambda(r)}{r} \right| \leq 2 \frac{r_0}{r}.$$

从而在定理 1.1 的条件, 也即

$$|\Gamma^2(r, z, t) - 1| \leq \frac{\epsilon}{r}$$

下, 有

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq CRT \sup_{r_0 \leq r \leq R_0} |v_r| r_0 \int_{r_0}^{R_0} \frac{\epsilon}{r^2} dr \leq C\epsilon RT \sup_{r_0 \leq r \leq R_0} |v_r|, \\ |I_1| &\leq C\epsilon RT. \end{aligned} \quad (2.20)$$

现在将 (2.19) 和 (2.20) 代入 (2.18), 得到

$$\begin{aligned} L &\leq -\frac{1}{6}RT + \left(\frac{1}{6} + \frac{r_0 - 1}{3(R_0 - r_0)} \right) \sup_{r=r_0, t \in [-T, 0]} (1 - \Gamma^2) RT + CR_0 r_0 \|v_z\|_\infty T \|\Gamma^2 - 1\|_\infty \\ &\quad + \|\Gamma^2 - 1\|_\infty RR_0 r_0 + C \|\partial_z \Gamma\|_\infty r_0 R_0 T \\ &\quad + C_1 \sup_{r=R_0, t \in [-T, 0]} (1 - \Gamma^2) RT + C\epsilon RT. \end{aligned} \quad (2.21)$$

回顾 (2.7) 中 L 的定义, 并利用 $\Gamma^2 \rightarrow 1$, 得到

$$\begin{aligned} &\int_{-T}^0 \int_{D_1} (|\partial_r \Gamma|^2 + |\partial_z \Gamma|^2) \phi_1^2 d\mu + \int_{-T}^0 \int_{D_2} (|\partial_r \Gamma|^2 + |\partial_z \Gamma|^2) \phi_2^2 d\mu \\ &\leq -\frac{1}{12}RT + C \|\Gamma^2 - 1\|_\infty R_0 r_0 \|v_z\|_\infty T \\ &\quad + \|\Gamma^2 - 1\|_\infty RR_0 r_0 + C \|\partial_z \Gamma\|_\infty r_0 R_0 T + C\epsilon RT \end{aligned} \quad (2.22)$$

当 $R_0 \gg r_0 \gg 1$ 时成立.

第 6 步 由 Γ 满足的抛物方程知 $|\partial_z \Gamma|$ 一致有界. 在定理的条件下, 当取 R 充分大、 $T \gg R_0 r_0$ 和 $R_0 \gg r_0$ 且 ϵ 充分小时, 不等式 (2.22) 不可能成立, 所以 (2.1) 正确, 也即 $\lim_{r \rightarrow \infty} \Gamma = 0$ 一致成立.

正如文献 [15, 定理 1.3 和注 1.4] 所述, 这表明 $v_\theta = 0$ 和 $v = ce_z$. 这样就完成了定理 1.1 的证明.

3 稳态周期解

本节将说明, 对上节中使用的加权能量估计的方法稍加修改即可给出定理 1.2 的一个较初等的证明. 此时假设 v 是轴对称 Navier-Stokes 方程的有界稳态解. 首先回顾下面的一般性事实:

引理 3.1 (Sliding 性质) 设 v 是轴对称 Navier-Stokes 方程的一个有界温和古代解, $|\Gamma| \lesssim 1$. 设 (x_n, t_n) , $x_n = (r_n, 0, z_n)$ 是一点列, 满足 $r_n \rightarrow \infty$. 那么任给 $R > 0$, 在取适当子列后, v 在抛物方体 $Q_R(x_n, t_n) = \{(x, t) \mid |x - x_n| < R, 0 < t_n - t < R^2\}$ 内一致收敛到一个常值向量. 在进一步取适当子列后, Γ 在 $Q_R(x_n, t_n)$ 上也一致收敛到一个常数.

证明 这一结论在相关文献中可以找到, 参见文献 [16, 定理 1.1] 中的证明. 为了完整性, 这里给出一个简单的证明. 定义

$$v^{(n)}(x, t) = v(x_n + x, t_n + t), \quad p^{(n)}(x, t) = p(x_n + x, t_n + t),$$

这里 p 是压强. 显然, $(v^{(n)}, p^{(n)})$ 仍然是 Navier-Stokes 方程的有界古代温和解, 所以其 (取适当子列后的) 弱极限 $(v^{(\infty)}, p^{(\infty)})$ 也是有界古代温和解. 并且, 对任意 $k \geq 0$, $(v^{(n)}, p^{(n)})$ 在 $C_{\text{loc}}^{2k, k}$ 拓扑下强收敛到极限 $(v^{(\infty)}, p^{(\infty)})$.

现在考虑任意抛物方体 $Q_R = B_R(0) \times [-R^2, 0]$. 在取适当子列后, 有

$$\begin{cases} e_r(x + x_n) \rightarrow e_1, & e_\theta(x + x_n) \rightarrow e_2, \\ v^{(n)}(x, t) \cdot e_\theta(x + x_n) = \frac{\sqrt{y_1^2 + y_2^2} v(y, t_n + t) \cdot e_\theta(y)}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \Big|_{y=x_n+x} \rightarrow 0, \end{cases} \quad (x, t) \in Q_R,$$

其中 $y = x_n + x$, e_1 和 e_2 是两个互相垂直的向量. 于是,

$$v^{(\infty)} \cdot e_2 = 0$$

在 Q_R 上成立. 记 $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_z$, $e_z = (0, 0, 1)$. 由于

$$\begin{aligned} \partial_{x_2} v^{(n)}(x, t) &= \partial_{x_2} v(x_n + x, t_n + t) \\ &= \partial_{y_2} v(y, t_n + t) \\ &= \frac{y_2}{r(y)} \partial_r v(y, t_n + t) + \frac{y_1}{r(y)^2} \partial_\theta v(y, t_n + t) \\ &= \frac{y_2}{r(y)} \partial_r v(y, t_n + t) + \frac{y_1}{r(y)^2} v_r(y, t_n + t) e_\theta(y) \\ &\quad - \frac{y_1}{r(y)^2} v_\theta(y, t_n + t) e_r(y) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

在 Q_R 上成立, 我们得到, 在 Q_R 上, $v^{(\infty)}$ 不依赖于变量 x_2 , 这里 $r(y)$ 表示 y 到 z -轴的距离. 因为 R 是任意的, 故

$$(v^{(\infty)} \cdot e_1, v^{(\infty)} \cdot e_z)$$

是 2 维 Navier-Stokes 方程的有界古代温和解. 利用文献 [1] 中的 Liouville 型定理, 可知 $v^{(\infty)}$ 一定是常值向量 (不依赖于时间). 这证明了引理断言的 v 的收敛性.

下面考虑 Γ . 定义

$$\Gamma^{(n)}(x, t) = \Gamma(x_n + x, t_n + t).$$

取适当子列后, 对任意 $k \geq 0$, 在 $C_{\text{loc}}^{k, 2k}$ 拓扑下,

$$\Gamma^{(n)} \rightarrow \Gamma^{(\infty)}, \quad |\Gamma^{(\infty)}| \lesssim 1,$$

并且, 类似地可以得到 $\Gamma^{(\infty)}$ 不依赖于变量 x_2 . 根据方程

$$\partial_t \Gamma + b \cdot \nabla \Gamma + \frac{1}{r} \partial_r \Gamma = (\partial_r^2 + \partial_z^2) \Gamma, \quad (3.1)$$

得到

$$\partial_t \Gamma^{(n)} + v^{(n)} \cdot \nabla \Gamma^{(n)} + \frac{y}{r^2} \Big|_{y=x_n+x} \cdot (\partial_1, \partial_2, 0)^T \Gamma^{(n)} = \Delta \Gamma^{(n)},$$

可以看到

$$\partial_t \Gamma^{(\infty)} + v^{(\infty)} \cdot \nabla \Gamma^{(\infty)} = (\partial_1^2 + \partial_z^2) \Gamma^{(\infty)}.$$

注意到 $v^{(\infty)}$ 是常值向量. 因此可以将上述方程通过坐标变换变为标准的热方程. 利用通常的热方程 Liouville 定理, 可以得出 $\Gamma^{(\infty)}$ 是常数. 引理得证. $\square$

接下来, 对于有界温和古代 z -周期解, 我们来证明 v_r 和 Γ 的一些有用的收敛性质.

引理 3.2 设 v 是轴对称 Navier-Stokes 方程的一个有界温和古代解. 若 v 关于 z 是周期函数, 则 $v_r \rightarrow 0$ 和 $r \rightarrow \infty$ 关于 $(z, t) \in \mathbb{T}^1 \times (-\infty, 0]$ 一致成立. 如果 v 还是稳态解, 则存在常数 c 使得 $\Gamma \rightarrow c$ 对于 $z \in \mathbb{T}^1$ 一致成立. 这里写成 $z \in \mathbb{T}^1$ 是因为假设了 z 方向的周期性.

证明 假若结论不成立, 则存在 $c_0 \neq 0$ 和一系列点 $P_n = (r_n, \theta, z_n, t_n)$, $r_n \rightarrow \infty$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_r(P_n) = c_0,$$

其中 θ 是柱坐标系中的角度变量.

运用引理 3.1 表述的 sliding 性质, 我们知道, 任给 $R > 0$, 在对 $n = 1, 2, 3, \dots$ 取适当子列后, u 在抛物方体 $Q_R(P_n)$ (半径为 R , 中心为点 P_n) 上收敛到常数. 所以, 当 n 充分大时, 在 $Q_R(P_n)$ 上,

$$|v_r| \geq \frac{|c_0|}{2}. \quad (3.2)$$

现在令 L_θ 为流函数, 即由下式确定的 z -周期函数:

$$\nabla \times (L_\theta e_\theta) = v_r e_r + u_z e_z,$$

则

$$v_r = -\partial_z L_\theta.$$

因为 L_θ 关于 z 是周期函数, 故存在 $z = z(r, t)$ 使得

$$v_r(r, z(r, t), t) = 0$$

对任意 r 和 t 成立. 这显然与 (3.2) 矛盾. 从而引理结论成立.

接下来考虑稳态情形, 并证明 Γ 的收敛性. 选择序列 $r_i \rightarrow 0$. 由引理 3.1, 我们可以找到子列, 仍记作 r_i , 使得 $\Gamma(r_i, z)$ 一致收敛到常数 c_0 . 于是对任意 $\epsilon > 0$, 存在整数 $N > 0$, 如果 $i \geq N$, 则 $|\Gamma(r_i, z) - c_0| < \epsilon$ 对任意 z 成立. 选取任意 $r > r_N$, 则存在整数 $i, j > N$ 使得 $r_i \leq r \leq r_j$. 在区域 $(r, z) \in [r_i, r_j] \times [-Z_0, Z_0]$ 中, 由 Γ 满足的极值原理可得

$$c_0 - \epsilon \leq \Gamma(r, z) \leq c_0 + \epsilon.$$

引理得证. $\square$

从现在开始, 考虑 v 是轴对称 Navier-Stokes 方程的有界温和古代解, 并假设 v 在 z 轴方向具有周期性, 且与时间 t 无关. 假设 $\sup |\Gamma| = 1$, 可以像第 2 节中那样进行能量估计. 不同的是, 由于 v 是稳态解, 我们可以直接省去对时间的积分. 依然像第 2 节的取法 (2.5) 一样取权函数 λ . 令 $\phi_1 = \xi_1(z)$, 令 $\phi_2(r, z)$ 是椭圆问题

$$\begin{cases} \partial_r^2 \phi_2 + \partial_z^2 \phi_2 + \frac{2\lambda'(r)}{\lambda(r)} \partial_r \phi_2 + v_r \partial_r \phi_2 + v_z \partial_z \phi_2 \\ + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\lambda'(r)}{\lambda(r)} - \frac{1}{r} \right) v_r + \left(\frac{\lambda(r)}{r} \right)' \frac{1}{\lambda(r)} \right] \phi_2 - A \phi_2 = 0, & (r, z) \in D_2, \\ \phi_2(R_0, z) = \phi_1(z), \quad \phi_2(R, z) = 0, \\ \phi_2 = 0, \quad \text{若 } z = R, -R \end{cases} \quad (3.3)$$

的解. 注意到 ϕ_2 仍然满足边界梯度估计 $|\partial_r \phi_2|_{r=R_0} \leq C_1(\|v\|_{L^\infty})$, 来自时间导数的 4 个积分式 T_{16} 、 T_{17} 、 T_{46} 和 T_{47} 现在不会出现了. 所以得到 (参见 (2.21) 的推导)

$$\begin{aligned} & \int_{D_1} (|\partial_r \Gamma|^2 + |\partial_z \Gamma|^2) \phi_1^2 d\mu + \int_{D_2} (|\partial_r \Gamma|^2 + |\partial_z \Gamma|^2) \phi_2^2 d\mu \\ & \leq -\frac{1}{6}R + \left(\frac{1}{6} + \frac{r_0 - 1}{3(R_0 - r_0)} \right) \sup_{r=r_0} (1 - \Gamma^2)R + C\|\Gamma^2 - 1\|_\infty R_0 r_0 \|v_z\|_\infty \\ & \quad + C\|\partial_z \Gamma\|_\infty r_0 R_0 + C_1 \sup_{r=R_0} (1 - \Gamma^2)R + |I_1|. \end{aligned} \quad (3.4)$$

这里积分 I_1 定义为

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{-R}^R \int_{r_0}^{R_0} v_r (\Gamma^2 - 1) \phi_1^2(z) \left(\lambda'(r) - \frac{\lambda(r)}{r} \right) dr dz.$$

到目前为止的估计是很一般的, 我们还没有使用 z 的周期性或任何 Γ 的收敛速率. 根据引理 3.2 和观察 (2.4), 我们得到 $v_r \rightarrow 0$ 和 $\Gamma \rightarrow 1$, $r \rightarrow \infty$. 接着, 用与第 2 节不同的方式来处理 I_1 . 利用 $v_r = \partial_z L_\theta$ 和分部积分, 有

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{2} \int_{-R}^R \int_{r_0}^{R_0} (L_\theta(r, z) - L_\theta(r, 0)) \partial_z (\Gamma^2 - 1) \phi_1^2(z) \left(\lambda'(r) - \frac{\lambda(r)}{r} \right) dr dz \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{-R}^R \int_{r_0}^{R_0} (L_\theta(r, z) - L_\theta(r, 0)) (\Gamma^2 - 1) \partial_z \phi_1^2(z) \left(\lambda'(r) - \frac{\lambda(r)}{r} \right) dr dz \\ &=: W_1 + W_2. \end{aligned}$$

注意到

$$|L_\theta(r, z) - L_\theta(r, 0)| \leq \sup_z |v_r(r, z)| Z_0 = o(1), \quad \text{当 } r \rightarrow \infty \text{ 时},$$

以及

$$\left| \lambda'(r) - \frac{\lambda(r)}{r} \right| \leq \frac{r_0 - 1}{R_0 - r_0} + 1$$

对于 $r_0 \leq r \leq R_0$ 成立. 由于 $\Gamma \rightarrow 1$ 和 $|\partial_z \phi_1| \lesssim \frac{1}{R}$, 所以,

$$|W_2| \leq o(1)(R_0 - r_0) \left(\frac{r_0 - 1}{R_0 - r_0} + 1 \right) \leq o(1)R_0, \quad (3.5)$$

这里 $o(1)$ 是在 $r_0 \rightarrow \infty$ 意义下的无穷小量. 由 Hölder 不等式知,

$$\begin{aligned}
 |W_1| &\leq \frac{1}{2} \int_{-R}^R \int_{r_0}^{R_0} |\partial_z \Gamma|^2 \phi_1^2 \lambda(r) dr dz \\
 &\quad + 2 \int_{-R}^R \int_{r_0}^{R_0} (L_\theta(r, z) - L_\theta(r, 0))^2 \Gamma^2 \phi_1^2 \left(\lambda'(r) - \frac{\lambda(r)}{r} \right)^2 \frac{1}{\lambda(r)} dr dz \\
 &\leq \frac{1}{2} \int_{-R}^R \int_{r_0}^{R_0} |\partial_z \Gamma|^2 \phi_1^2 \lambda(r) dr dz + o(1) \frac{(r_0 - 1)^2}{R_0 - r_0} R + o(1) R \int_{r_0}^{R_0} \frac{\lambda(r)}{r^2} dr \\
 &\leq \frac{1}{2} \int_{-R}^R \int_{r_0}^{R_0} |\partial_z \Gamma|^2 \phi_1^2 \lambda(r) dr dz + o(1) \frac{(r_0 - 1)^2}{R_0 - r_0} R + o(1) R.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

结合 (3.4)–(3.6), 得到

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \int_{D_1} (|\partial_r \Gamma|^2 + |\partial_z \Gamma|^2) \phi_1^2 d\mu + \int_{D_2} (|\partial_r \Gamma|^2 + |\partial_z \Gamma|^2) \phi_2^2 d\mu \\
 &\leq -\frac{1}{6} R + \left(\frac{1}{6} + \frac{r_0 - 1}{3(R_0 - r_0)} \right) \sup_{r=r_0} (1 - \Gamma^2) R + C \|\Gamma^2 - 1\|_\infty R_0 r_0 \|v_z\|_\infty \\
 &\quad + C \|\partial_z \Gamma\|_\infty r_0 R_0 + C_1 \sup_{r=R_0} (1 - \Gamma^2) R \\
 &\quad + o(1) \frac{(r_0 - 1)^2}{R_0 - r_0} R + o(1) R.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

接下来只需令 $r_0 \gg 1$ 和 $R_0 \gg r_0$ 以得到矛盾. 于是证明了 $\Gamma \equiv 0$, 从而得到稳态 z -周期解的 Liouville 定理, 即定理 1.2.

致谢 第三作者对 Simons Foundation 给予的支持和复旦大学在他到访期间的接待表示感谢.

参考文献

- 1 Koch G, Nadirashvili N, Seregin G A, et al. Liouville theorems for the Navier-Stokes equations and applications. *Acta Math*, 2009, 203: 83–105
- 2 Carrillo B, Pan X, Zhang Q S. Decay and vanishing of some axially symmetric D-solutions of the Navier-Stokes equations. *J Funct Anal*, 2020, 279: 108504
- 3 Seregin G. A Liouville type theorem for steady-state Navier-Stokes equations. *arXiv:1611.01563*, 2016
- 4 Leray J. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta Math*, 1934, 63: 193–248
- 5 Nečas J, Růžička M, Šverák V. On Leray's self-similar solutions of the Navier-Stokes equations. *Acta Math*, 1996, 176: 283–294
- 6 Tsai T P. On Leray's self-similar solutions of the Navier-Stokes equations satisfying local energy estimates. *Arch Ration Mech Anal*, 1998, 143: 29–51
- 7 Escauriaza L, Seregin G A, Šverák V. $L_{3,\infty}$ -solutions of the Navier-Stokes equations and backward uniqueness. *Russian Math Surveys*, 2003, 58: 211–250
- 8 Caffarelli L, Kohn R, Nirenberg L. Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations. *Comm Pure Appl Math*, 1982, 35: 771–831
- 9 Lei Z, Zhang Q S. A Liouville theorem for the axially-symmetric Navier-Stokes equations. *J Funct Anal*, 2011, 261: 2323–2345
- 10 Chen C C, Strain R M, Yau H T, et al. Lower bound on the blow-up rate of the axisymmetric Navier-Stokes equations. *Int Math Res Not IMRN*, 2008, 2008: rnn016
- 11 Chen C C, Strain R M, Tsai T P, et al. Lower bounds on the blow-up rate of the axisymmetric Navier-Stokes equations II. *Comm Partial Differential Equations*, 2009, 34: 203–232
- 12 Seregin G, Šverák V. On type I singularities of the local axis-symmetric solutions of the Navier-Stokes equations. *Comm Partial Differential Equations*, 2009, 34: 171–201

- 13 Seregin G, Zhou D. Regularity of solutions to the Navier-Stokes equations in $\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}$. J Math Sci (N Y), 2020, 244: 1003–1009
- 14 Lei Z, Ren X, Zhang Q S. A Liouville theorem for axi-symmetric Navier-Stokes equations on $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^1$. Math Ann, 2021, doi: 10.1007/s00208-020-02128-9
- 15 Lei Z, Zhang Q, Zhao N. Improved Liouville theorems for axially symmetric Navier-Stokes equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1183–1198 [雷震, 张旗, 赵娜. 轴对称 Navier-Stokes 方程改进的 Liouville 定理. 中国科学: 数学, 2017, 47: 1183–1198]
- 16 Lei Z, Zhang Q S. Structure of solutions of 3D axisymmetric Navier-Stokes equations near maximal points. Pacific J Math, 2011, 254: 335–344

Liouville type theorems for axially symmetric Navier-Stokes equations

Zhen Lei, Xiao Ren & Qi S. Zhang

Abstract It has been an old and challenging problem to classify bounded ancient solutions of the incompressible Navier-Stokes equations, which could play a crucial role in the study of the global regularity theory. In particular, there is an important Liouville type conjecture in the axially symmetric case: for the 3D axially symmetric Navier-Stokes equations, bounded mild ancient solutions are constants. In this paper, we propose a novel weighted energy method, and solve this problem under suitable convergence conditions for the swirl function $\Gamma = rv_\theta$. Moreover, using similar estimates combined with compactness arguments, we prove that bounded mild ancient solutions which are periodic in z must be constants. We do not assume any unverified decay conditions on the velocity field.

Keywords Navier-Stokes equations, ancient solution, axi-symmetric, Liouville theorem

MSC(2020) 35Q30

doi: 10.1360/SSM-2020-0179