分块平方和分解

献给张景中、杨路教授 85 华诞

李昊坤, 夏壁灿*

北京大学数学科学学院, 北京 100871

E-mail: ker@pku.edu.cn, xbc@math.pku.edu.cn

收稿日期: 2019-12-31; 接受日期: 2020-07-08; 网络出版日期: 2020-09-08; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 61732001 和 61532019) 资助项目

摘要 本文定义了分块平方和可分解多项式的概念. 粗略地说, 它是这样一类多项式, 只考虑其支撑集 (不考虑系数) 就可以把它的平方和分解问题等价地转换为较小规模的同类问题 (换句话说, 相应的半正定规划问题的矩阵可以分块对角化). 本文证明了近年文献中提出的两类方法—分离多项式 (split polynomial) 和最小坐标投影 (minimal coordinate projection)—都可以用分块平方和可分解多项式来描述, 证明了分块平方和可分解多项式集在平方和多项式集中为零测集.

关键词 平方和分解 稀疏性 半正定规划

MSC (2010) 主题分类 11E25, 12D15

1 引言

本文中平方和 (sum of squares, SOS) 分解问题是指, 对给定的实系数多元多项式 f , 是否存在实系数多项式 $q_1, \dots, q_s$ 满足 $f = \sum_{i=1}^s q_i^2$. 这是一个非常著名和重要的问题, 源于 Hilbert 的著名工作和演讲 (参见文献 [1, 2]). 众所周知, Artin [3] 对 Hilbert 第 17 问题 “任何半正定多项式是否可以写成有理函数的平方和” 给出了肯定的答案. Artin 的理论和方法 (现称为 Artin-Schreier 理论) 导致了现代实代数和实代数几何的产生和发展. 该领域的两个主要里程碑工作是 Tarski 的实量词消去理论 [4] 与 Krivine [5] 和 Stengle [6] 的正零点理论.

虽然半正定多项式的数量远远多于平方和多项式 [7], 但用平方和约束替换多项式非负约束依然是很多应用的关键步骤 (参见文献 [8–12]). 通过 Gram 矩阵表示 [13], 可以把 SOS 分解问题转换为半定规划 (semi-definite programming, SDP) 问题. 给定多项式 $f \in \mathbb{R}[\bar{x}] = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ 和一组单项式基 $M = \{\bar{x}^{b_1}, \dots, \bar{x}^{b_r}\}$, f 是 SOS 的条件可以转化成存在半正定矩阵 Q (Gram matrix) 满足 $f = M^T Q M$. 这是一个标准的 SDP 问题, 可以通过符号或数值方法求解. 使用数值算法可以处理较大规模的问题,

英文引用格式: Li H K, Xia B C. Block SOS decomposition (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 167–178, doi: 10.1360/SSM-2019-0333

并可用于获得精确结果 (参见文献 [14]). 实际上, 已有一些著名的基于数值 SDP 求解器的平方和分解求解器 (参见文献 [15–17]).

尽管现有的 SDP 数值求解器可以解决一些较大规模的问题, 但其效率和可靠性会随着输入增大而大大降低 (参见文献 [18]). 假设给定的多项式是 $2d$ 次的且有 n 个变量, 不加处理地直接转化为 SDP 问题, 其对应的矩阵一般是 $\binom{n+d}{n}$ 阶的. 很显然, n 和 d 很大时, 矩阵的阶是非常庞大的. 因此, 利用稀疏性减小相应的 SDP 矩阵的大小是改进基于 SDP 的 SOS 分解工具的效率及可靠性以利于求解更大规模 SOS 分解问题的重要途径.

文献中利用稀疏性降低计算量的方法大体可以分为三种. 第一种, 降低单项式基 M 的规模, 如计算 Newton 多面体 (Newton polytope) [19]、使用对角矛盾 (diagonal inconsistency) [20]、迭代消去法 (iterative elimination method) [21] 和面约化 (facial reduction) [22] 等; 第二种, 利用矩阵 Q 的稀疏性, 如变量稀疏性 (sparsity of variables) [23–27]、对称性 (symmetry property) [28]、分离性 (split property) [29]、最小坐标投影 (minimal coordinate projection) [30] 和交叉稀疏性 (cross sparsity) [31] 等; 第三种, 利用约束条件的稀疏性, 如系数匹配条件 (coefficient matching conditions) [32–34] 等.

Dai 和 Xia [29] 定义了分离多项式 (split polynomial) 类. 分离多项式可以被分解为几个较小的子多项式, 使得原始多项式是 SOS 当且仅当每个子多项式都是 SOS. 因此, 原始的 SOS 问题可以等价地分解为较小的子问题. Permenter 和 Parrilo [30] 在给定 SDP 问题上定义了最小坐标投影 (minimal coordinate projection), 并给出了多项式时间算法来计算最小坐标投影. 最小坐标投影可以有效地减少 SOS 分解问题对应的 SDP 问题的规模.

本文定义了分块平方和可分解多项式的概念, 证明了它是文献 [29, 30] 中那些特殊类别多项式的推广. 粗略地说, 它是这样一类多项式, 其 SOS 分解问题可以通过仅考虑其支撑集 (不考虑系数) 而等价地转化为较小规模的同类问题 (换句话说, 相应的半正定规划问题的矩阵可以分块对角化). 进一步, 我们证明了分块平方和可分解多项式在平方和多项式集合中的测度为 0.

本文的其余部分安排如下. 分块平方和分解、(真) 分块平方和支撑、分块平方和可分解多项式的概念在第 2 节中给出. 在该节中还会证明分离多项式是分块平方和可分解多项式 (命题 2.1), 以及证明相应 SDP 问题具有非平凡的最小坐标投影的多项式是分块平方和可分解多项式 (命题 2.3). 第 3 节证明 $\sum_{i=1}^m \sum \mathbb{R}[\bar{x}]_{Q_i}^2$ 在 $\mathbb{R}[\bar{x}]_{2k}$ 中是闭的 (定理 3.1). 第 4 节证明 $\mathbb{R}[\bar{x}]_{2k}$ 中的分块平方和可分解多项式的集合在 $\sum \mathbb{R}[\bar{x}]_k^2$ 中是零测集 (定理 4.2). 第 5 节是本文的总结.

2 分块平方和分解

2.1 记号

本文中, $\bar{x}$ 是 n 维的, 其中 n 是一个固定整数. $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{N}$ 分别表示实数和自然数. 对于映射 φ , 用 $\text{rng}(\varphi)$ 和 $\text{ker}(\varphi)$ 分别表示 φ 的值域和核.

对于多项式 $f \in \mathbb{R}[\bar{x}]$, f 的支撑 (集) 是 f 中出现的项的集合, 定义为

$$S(f) = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid f \text{ 中 } \bar{x}^\alpha \text{ 项的系数不是 } 0\}.$$

f 称为平方和的当且仅当存在多项式 $q_1, \dots, q_s \in \mathbb{R}[\bar{x}]$ 满足 $f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^s q_i^2$.

对于集合 $X \subseteq \mathbb{N}^n$, 令 $\text{conv}(X)$ 表示 X 的凸包. 对于集合 $A \subseteq \mathbb{R}[\bar{x}]$, 令 $A^2 := \{f^2 \mid f \in A\}$ 且

$$\sum A^2 := \left\{ \sum_{i=1}^s f_i^2 \mid s \in \mathbb{N} \text{ 且对任意 } i = 1, \dots, s, f_i \in A \right\}.$$

故 $\sum \mathbb{R}[\bar{x}]^2$ 表示平方和多项式集.

对于向量空间 L_1 和 L_2 , 令

$$L_1 \oplus L_2 := \{(a, b) \mid a \in L_1 \text{ 且 } b \in L_2\},$$

$$\bigoplus_{i=1}^m L_i := L_1 \oplus \cdots \oplus L_m.$$

令 $\mathbb{S}^{n \times n}$ 表示 $n \times n$ 对称矩阵集, $\mathbb{S}_+^{n \times n}$ 表示 $n \times n$ 半正定矩阵集合. 用 $\{0, 1\}^{n \times n}$ 表示元素只有 0 和 1 的 $n \times n$ 矩阵. 对于向量 a 和 b , 令 $\langle a, b \rangle$ 表示 a 和 b 的内积. 对于 $n \times n$ 矩阵 A 和 B , 令 $\langle A, B \rangle := \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij} = \text{Tr}(A^T B)$. 对于给定的 $k \in \mathbb{N}$ 和 $Q \subseteq \mathbb{N}^n$, 令

$$\Lambda(k) := \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i \leq k \right\},$$

$$\mathbb{R}[\bar{x}]_k := \{f \in \mathbb{R}[\bar{x}] \mid \deg(f) \leq k\},$$

$$\mathbb{R}[\bar{x}]_Q := \{f \in \mathbb{R}[\bar{x}] \mid S(f) \subseteq Q\},$$

$$\sigma(Q) := \{a \in Q \mid \forall b, c \in Q, b + c \neq 2a \vee b = c = a\}.$$

故 $\sum \mathbb{R}[\bar{x}]_Q^2$ 表示 $\mathbb{R}[\bar{x}]_Q$ 中多项式的平方和的集合.

2.2 主要概念

定义 2.1 ^[29] 设 $f \in \mathbb{R}[\bar{x}]$, $Q \subseteq \mathbb{N}^n$. 如果

$$f \text{ 是 SOS} \Rightarrow \exists \{f_i\}_{i=1}^s, \text{ 使得 } f = \sum_{i=1}^s f_i^2 \text{ 且 } S(f_i) \subseteq Q,$$

那么称 Q 为 f 的一个平方和支撑且记为 $\text{SOSS}(f, Q)$.

按照定义, 当 f 不是 SOS 时, $\mathbb{N}^n$ 的任意一个子集都是 f 的一个平方和支撑.

定义 2.2 给定 $T \subseteq \mathbb{N}^n$ 和 $Q_i \subseteq \mathbb{N}^n$, 其中 $i = 1, \dots, m$. 如果

- (1) $\{f \mid f \in \sum \mathbb{R}[\bar{x}]^2, S(f) = T\} \subseteq \sum_{i=1}^m \sum \mathbb{R}[\bar{x}]_{Q_i}^2$;
- (2) $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ 只要 $i \neq j$,

那么集合 $\{Q_i\}_{i=1}^m$ 称为 T 的一个分块平方和支撑. 对于 $f \in \mathbb{R}[\bar{x}]$, $S(f)$ 的任何分块平方和支撑也称为 f 的一个分块平方和支撑.

假设 $\{Q_i\}_{i=1}^m$ 是 $T \subseteq \mathbb{N}^n$ 的一个分块平方和支撑, 其中 $m \geq 2$. 如果任何 Q_i 都不是空集而且

$$\exists f \in \mathbb{R}[\bar{x}], \text{ 使得 } S(f) = T \wedge \neg \text{SOSS}(f, Q_i),$$

那么 $\{Q_i\}_{i=1}^m$ 称为 T 的一个真分块平方和支撑且 T 是分块平方和可分解的. 类似地, 对于 $f \in \mathbb{R}[\bar{x}]$, 如果 $\{Q_i\}_{i=1}^m$ 是 $S(f)$ 的一个真分块平方和支撑, 那么 $\{Q_i\}_{i=1}^m$ 也称为 f 的一个真分块平方和支撑且 f 是分块平方和可分解的.

例 2.1 设 $T = \{(0), (4), (8)\}$, 那么 $\{Q_1, Q_2\}$ 是 T 的一个真分块平方和支撑, 其中

$$Q_1 = \{(0), (4)\}, \quad Q_2 = \{(2)\}.$$

证明 对任意满足 $S(f) = T$ 的 $f \in \mathbb{R}[x]$, 记 $f = ax^8 + bx^4 + c$, 其中 $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$. 首先,

$$\begin{aligned} f \text{ 是 SOS} &\Leftrightarrow f \geq 0 \quad (\text{因为 } f \text{ 是一元多项式}) \\ &\Rightarrow a > 0 \wedge c > 0 \wedge f\left(\frac{\sqrt[8]{c}}{\sqrt[8]{a}}\right) \geq 0 \\ &\Rightarrow a > 0 \wedge c > 0 \wedge 2c + b\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \geq 0 \\ &\Rightarrow a > 0 \wedge c > 0 \wedge b \geq -2\sqrt{a}\sqrt{c}. \end{aligned}$$

我们来说明 $\{Q_1, Q_2\}$ 是 T 的一个分块平方和支撑. 如果 $b > 0$ 且 f 是平方和, 那么

$$f = (\sqrt{a}x^4)^2 + \sqrt{c}^2 + (\sqrt{b}x^2)^2 \in \sum \mathbb{R}[x]_{Q_1}^2 + \sum \mathbb{R}[x]_{Q_2}^2.$$

如果 $b < 0$ 且 f 是平方和, 那么存在 a' ($0 \leq a' \leq \sqrt{a}$) 和 c' ($0 \leq c' \leq \sqrt{c}$) 满足 $b = -2a'c'$ 且

$$f = (\sqrt{a - a'^2}x^4)^2 + (\sqrt{c - c'^2})^2 + (a'x^4 + c')^2 \in \sum \mathbb{R}[x]_{Q_1}^2.$$

这证明了 $\{Q_1, Q_2\}$ 是 T 的一个分块平方和支撑. 易知 $x^8 + 4x^4 + 1 \notin \sum \mathbb{R}[x]_{Q_1}^2$ 且 $x^8 + 4x^4 + 1 \notin \sum \mathbb{R}[x]_{Q_2}^2$. 根据定义 2.2 可知, $\{Q_1, Q_2\}$ 是 T 的一个真分块平方和支撑. $\square$

2.3 相关工作

本节的结果表明, 文献 [29, 30] 中的优化方法可以重新定义为找到分块平方和支撑. 为方便读者, 我们在此处简要介绍文献 [29, 30] 的相关概念和结果. 粗略地说, 文献 [29, 30] 中的方法针对的多项式其相应的 SDP 矩阵都可以进行分块对角化, 由定义 2.2 知, 所有这样的多项式都是分块平方和可分解的.

定义 2.3 (参见文献 [29, 定义 6]) 令 $Q, R \subseteq \mathbb{N}^n$. 对任意 $\alpha \in Q + Q$, 递归定义集合 $H_Q(\alpha, R) \subset Q$ 如下:

$$\begin{aligned} \varphi_Q(\alpha) &= \{\beta \in Q \mid \exists \gamma \in Q \text{ 使得 } \beta + \gamma = \alpha\}, \\ H_Q(\alpha, R) &= \begin{cases} \emptyset, & \alpha \in R, \\ \left\{\frac{1}{2}\alpha\right\}, & \alpha \notin R \wedge \varphi_Q(\alpha) = \left\{\frac{1}{2}\alpha\right\}, \\ H'_Q(\alpha, R), & \text{否则,} \end{cases} \end{aligned}$$

其中 $H'_Q(\alpha, R) := \bigcup_{\beta \in \varphi_Q(\alpha) \setminus \{\frac{\alpha}{2}\}} H_Q(2\beta, R \cup \{\alpha\})$. 令 $\psi_Q(\alpha) = H_Q(\alpha, \emptyset)$.

定义 2.4 (参见文献 [29, 定义 8]) 令 Q 是对多项式 p 满足 $\text{SOSS}(p, Q)$ 的有限集合. 如果存在 $\sigma(Q)$ 的两两不交的子集 T_i ($i = 1, \dots, u$) 满足

- (1) 对任意 $i = 1, \dots, u$ 和任意 $\alpha, \beta \in \{\gamma \mid \gamma \in Q, \psi_Q(2\gamma) \subseteq T_i\}$, 有 $\psi_Q(\alpha + \beta) \subseteq T_i$;
- (2) 对任意 $\alpha \in S(p)$, 恰存在一个 T_i 使得 $\psi_Q(\alpha) \subseteq T_i$,

那么 p 称为关于 $T_1, \dots, T_u$ 的分离多项式 (split polynomial).

如果 p 是关于一个非空集合 $T \subseteq \sigma(Q)$ 和它在 $\sigma(Q)$ 的补集的分离多项式, 则称 p 是关于 T 的分离多项式.

定理 2.1 (参见文献 [29, 定理 4]) 假设 $p = \sum c_\alpha x^\alpha$ 是关于 $T_1, \dots, T_u$ 的分离多项式, 则 p 是平方和当且仅当对每个 $i = 1, \dots, u$, $p_i = \sum_{\alpha \in S(p), \psi_Q(\alpha) \subseteq T_i} c_\alpha x^\alpha$ 是平方和.

命题 2.1 令 Q 是对多项式 $p \in \mathbb{R}[\bar{x}]$ 满足 $\text{SOSS}(p, Q)$ 的有限集合. 如果 p 是关于 $T_1, \dots, T_u$ 的分离多项式, 那么 $\{Q_i\}_{i=1}^u$ 是 p 的一个分块平方和支撑, 其中 $Q_i = \{\alpha \in Q \mid \psi_Q(2\alpha) \subseteq T_i\}$.

证明 记号 p_i 如同定理 2.1. 首先, 由文献 [29, 定理 3] 的证明知 $\text{SOSS}(p_i, Q_i)$ 成立. 由定义 2.4 和定理 2.1 可知, 如果 p 是平方和多项式, 则

$$p \in \sum_{i=1}^u \sum \mathbb{R}[\bar{x}]_{Q_i}^2.$$

容易看出这里相关定义和性质都只与 $S(p)$ 有关而与系数无关, 故

$$\left\{ f \in \sum \mathbb{R}[\bar{x}]^2 \mid S(f) = S(p) \right\} \subseteq \sum_{i=1}^u \sum \mathbb{R}[\bar{x}]_{Q_i}^2,$$

且 $\{Q_i\}_{i=1}^u$ 两两不交, 故结论成立. $\square$

定义 2.5 (参见文献 [30, 定义 1]) 令 $A \subseteq \mathbb{S}^{n \times n}$ 和 $C \in \mathbb{S}^{n \times n}$. 对如下半定规划 (SDP):

$$\begin{aligned} \min & C \cdot X \\ \text{s.t.} & X \in A \cap \mathbb{S}_+^{n \times n}, \end{aligned}$$

如果一个线性映射 $P: \mathbb{S}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{S}^{n \times n}$ 满足

- (1) $P(\mathbb{S}_+^{n \times n}) \subseteq \mathbb{S}_+^{n \times n}$;
- (2) $P(A) \subseteq A$;
- (3) $P^*(C) = C$;
- (4) $\exists M \in \mathbb{S}^{n \times n} \cap \{0, 1\}^{n \times n}$ 使得 $P(X) = \langle M, X \rangle$ (如果 $P(X) = \langle M, X \rangle$, 则记 P 为 P_M),

其中 P^* 是 P 的伴随映射, 那么称 P 为一个坐标投影.

如果 $\dim(\text{rng}(P))$ 是坐标投影中最小的, 则称 P 是最小坐标投影.

注意, 根据文献 [30] 可知, 最小坐标投影方法覆盖分离多项式方法.

命题 2.2 (参见文献 [30, 命题 1]) 令 $A \subseteq \mathbb{S}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{S}^{n \times n}$. 对于一个 SDP

$$\begin{aligned} \min & C \cdot X \\ \text{s.t.} & X \in A \cap \mathbb{S}_+^{n \times n}, \end{aligned}$$

如果 P 是此 SDP 的一个坐标投影, 那么此 SDP 等价于

$$\begin{aligned} \min & C \cdot X \\ \text{s.t.} & X \in A \cap \mathbb{S}_+^{n \times n} \cap L, \end{aligned}$$

其中 $L = \text{rng}(P)$.

引理 2.1 (参见文献 [30, 引理 1]) 固定 $M \in \mathbb{S}^{n \times n} \cap \{0, 1\}^{n \times n}$, 则映射 P_M 是正定的, 即 $\forall X \in \mathbb{S}_+^{n \times n}$ ($\langle M, X \rangle \in \mathbb{S}_+^{n \times n}$) 当且仅当 M 是半正定的.

引理 2.2 (参见文献 [30, 引理 2]) 对于 $M \in \mathbb{S}^{n \times n} \cap \{0, 1\}^{n \times n}$, 以下两条等价:

- (1) 矩阵 M 是半正定的;
- (2) 存在 $S_1, \dots, S_p \in \{0, 1\}^n$ 互相正交, 且 $M = \sum_{k=1}^p S_k S_k^T$.

给定多项式 f 和有限集 $Q \subseteq \mathbb{N}^n$ 满足 $\text{SOSS}(f, Q)$. 判断 f 是否是平方和等价于以下 SDP:

$$\begin{aligned} & \min 0 \cdot X \\ & \text{s.t. } X \in \mathbb{S}_+^{\#Q \times \#Q}, \\ & \langle X, (\bar{x}^\alpha)_{\alpha \in Q} (\bar{x}^\alpha)_{\alpha \in Q}^T \rangle = f \end{aligned}$$

是否有可行解. 将这个 SDP 称为 f 和 Q 对应的 SDP.

命题 2.3 给定任意多项式 f 和有限集 $Q \subset \mathbb{N}^n$ 满足 $\text{SOSS}(f, Q)$. 如果 $S_1, \dots, S_p \in \{0, 1\}^{\#Q}$ 两两正交, 且 $M := \sum_{k=1}^p S_k S_k^T$ 是 f 和 Q 对应的 SDP 的最小坐标投影, 那么 $\{Q_k\}_{k=1}^p$ 是 f 的一个分块平方和支撑, 其中 $Q_k = S(\langle S_k, (\bar{x}^\alpha)_{\alpha \in Q} \rangle)$.

证明 由命题 2.2 知此 SDP 是可行的当且仅当它在它的最小坐标投影上也是可行的. 所以, 如果 f 是平方和, 则 $f \in \sum_{k=1}^p \sum \mathbb{R}[\bar{x}]_{Q_k}^2$. 由文献 [30, 定理 2] 知, 最小坐标投影与 f 的系数无关. 因此,

$$\left\{ f' \in \sum \mathbb{R}[\bar{x}]^2 \mid S(f') = S(f) \right\} \subseteq \sum_{k=1}^p \sum \mathbb{R}[\bar{x}]_{Q_k}^2.$$

因 $S_1, \dots, S_p \in \{0, 1\}^{\#Q}$ 两两正交, 故 $\{Q_k\}_{k=1}^p$ 两两不交. 证毕. $\square$

下面的例子说明由文献 [30] 的最小坐标投影算法得到的分块平方和支撑不一定是最小的.

例 2.2 令 $f = x^8 - 2x^4 + 1$. 所以, $S(f) = \{(0), (4), (8)\}$, 且对于

$$Q = \text{conv} \left(\frac{1}{2}(S(f) \cap \mathbb{N}) \right) = \{(0), (1), (2), (3), (4)\},$$

有 $\text{SOSS}(f, Q)$. 由文献 [30] 中的算法知,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

是 f 和 Q 对应的 SDP 的最小坐标投影. 由命题 2.3 的证明, 其对应的真分块平方和支撑是

$$\{\{(0), (2), (4)\}, \{(1), (3)\}\}.$$

由例 2.1 知 $\{\{(0), (4)\}, \{(2)\}\}$ 是 f 的一个更小的真分块平方和支撑.

3 $\sum_{i=1}^m \sum \mathbb{R}[\bar{x}]_{Q_i}^2$ 是闭集

对于任意给定的 $k \in \mathbb{N}$, 本文中 $\mathbb{R}[\bar{x}]_k$ 的拓扑都是指有限维线性空间 $\mathbb{R}^{\Lambda(k)}$ 的拓扑. 同样地, 对于任意给定的有限集合 $Q \subset \mathbb{N}^n$, $\mathbb{R}[\bar{x}]_Q$ 的拓扑是有限维线性空间 $\mathbb{R}^{\#Q}$ 的拓扑.

对于给定的 $k \in \mathbb{N}$ 和任意有限个 $Q_i \subseteq \Lambda(k)$, 本节证明多项式集合 $\sum_{i=1}^m \sum \mathbb{R}[\bar{x}]_{Q_i}^2$ 在 $\mathbb{R}[\bar{x}]_{2k}$ 中是闭的.

引理 3.1 如果 $A \in \mathbb{S}_+^{m \times m}$, 那么存在 $v_i \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ ($i = 1, \dots, m$) 使得 $A = \sum_{i=1}^m v_i v_i^T$.

证明 通过 Cholesky 分解, 有

$$A = LL^T = \sum_{i=1}^m L_i L_i^T,$$

其中 $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$, 且 L_i 是 L 的第 i 列. 令 $v_i = L_i$, 证毕. $\square$

引理 3.2 假设 $Q \subset \mathbb{N}^n$, $m = \#Q < +\infty$, 则

$$\sum \mathbb{R}[\bar{x}]_Q^2 = \{ \langle (\bar{x}^{a+b})_{(a,b) \in Q \times Q}, G \rangle \mid G \in \mathbb{S}_+^{m \times m} \}.$$

证明 对于 $G \in \mathbb{S}_+^{m \times m}$, 由引理 3.1 知, 存在 $\{v_i\}_{i=1}^m$ 使得 $G = \sum_{i=1}^m v_i v_i^T$. 所以,

$$\begin{aligned} \langle (\bar{x}^{a+b})_{(a,b) \in Q \times Q}, G \rangle &= \sum_{i=1}^m \langle (\bar{x}^{a+b})_{(a,b) \in Q \times Q}, v_i v_i^T \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \langle (\bar{x}^a)_{a \in Q}, v_i \rangle^2 \in \sum \mathbb{R}[\bar{x}]_Q^2. \end{aligned}$$

另一方面, 对任意的

$$\sum_{i=1}^k f_i^2 \in \sum \mathbb{R}[\bar{x}]_Q^2,$$

存在 $v_i \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ 使得对任意的 $i = 1, \dots, k$, $f_i = \langle (\bar{x}^a)_{a \in Q}, v_i \rangle$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k f_i^2 &= \sum_{i=1}^k \langle (\bar{x}^a)_{a \in Q}, v_i \rangle^2 = \sum_{i=1}^k \langle (\bar{x}^{a+b})_{(a,b) \in Q \times Q}, v_i v_i^T \rangle \\ &= \left\langle (\bar{x}^{a+b})_{(a,b) \in Q \times Q}, \sum_{i=1}^k v_i v_i^T \right\rangle = \langle (\bar{x}^{a+b})_{(a,b) \in Q \times Q}, LL^T \rangle \\ &\in \{ \langle (\bar{x}^{a+b})_{(a,b) \in Q \times Q}, G \rangle \mid G \in \mathbb{S}_+^{m \times m} \}, \end{aligned}$$

其中 $L = (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^{m \times k}$. $\square$

引理 3.3 假设 $Q \subset \mathbb{N}^n$, $m = \#Q < +\infty$, 则

$$\sum \mathbb{R}[\bar{x}]_Q^2 = \{ f_1^2 + \dots + f_m^2 \mid f_1, \dots, f_m \in \mathbb{R}[\bar{x}]_Q \}.$$

证明 由引理 3.2 知,

$$\sum \mathbb{R}[\bar{x}]_Q^2 = \{ \langle (\bar{x}^{a+b})_{(a,b) \in Q \times Q}, G \rangle \mid G \in \mathbb{S}_+^{m \times m} \}.$$

由引理 3.1 知, 存在 $\{v_i\}_{i=1}^m$ 使得 $G = \sum_{i=1}^m v_i v_i^T$.

令 $f_i := \langle (\bar{x}^a)_{a \in Q}, v_i \rangle$, 其中 $i = 1, \dots, m$, 我们有 $f = \sum_{i=1}^m f_i^2$. $\square$

以下定理的证明使用了文献 [12] 中的类似思路.

定理 3.1 对于给定的 $k \in \mathbb{N}$ 以及 $A(k)$ 的任意有限个子集 $Q_1, \dots, Q_m$, $\sum_{i=1}^m \sum \mathbb{R}[\bar{x}]_{Q_i}^2$ 在 $\mathbb{R}[\bar{x}]_{2k}$ 中闭.

证明 令 φ 是一个连续映射,

$$\begin{aligned} \varphi: \bigoplus_{\#Q_1} \mathbb{R}[\bar{x}]_{Q_1} \times \cdots \times \bigoplus_{\#Q_m} \mathbb{R}[\bar{x}]_{Q_m} &\rightarrow \mathbb{R}[\bar{x}]_{2k}, \\ ((f_{1,j})_{j \in Q_1}, \dots, (f_{m,j})_{j \in Q_m}) &\mapsto \sum_{i=1}^m \sum_{j \in Q_i} f_{i,j}^2. \end{aligned}$$

由引理 3.3 知 $\sum_{i=1}^m \sum \mathbb{R}[\bar{x}]_{Q_i}^2 = \text{rng}(\varphi)$ 和 $\ker(\varphi) = 0$.

令 V 为

$$\bigoplus_{\#Q_1} \mathbb{R}[\bar{x}]_{Q_1} \times \cdots \times \bigoplus_{\#Q_m} \mathbb{R}[\bar{x}]_{Q_m}$$

中的单位球面在 φ 下的像. 显然, V 是紧的且 $0 \notin V$. 因为对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$ 有 $\varphi(\lambda z) = \lambda^2 \varphi(z)$, 所以有 $\sum_{i=1}^m \sum \mathbb{R}[\bar{x}]_{Q_i}^2 = \sum_{\lambda \in [0, \infty)} \lambda V$.

给定无限序列 $\{\lambda_i v_i\}_{i=1,2,\dots}$, 其中 $\lambda_i \in [0, \infty)$ 且 $v_i \in V$, 假设 $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i v_i = p$. 因为 V 是紧的, 存在收敛子序列 $\{v_{i_j}\} \subseteq \{v_i\}$ 使得 $v = \lim_{j \rightarrow \infty} v_{i_j} \in V$, 所以 $v \neq 0$. 那么,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_{i_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_{i_j} v_{i_j}|}{|v_{i_j}|} = \frac{|p|}{|v|} \geq 0,$$

其中 $|\cdot|$ 代表 $\|\cdot\|_2$. 最后,

$$\begin{aligned} p &= \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_{i_j} v_{i_j} = \left(\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_{i_j} \right) \left(\lim_{j \rightarrow \infty} v_{i_j} \right) = \frac{|p|}{|v|} v \\ &\in \sum_{\lambda \in [0, \infty)} \lambda V = \sum_{i=1}^m \sum \mathbb{R}[\bar{x}]_{Q_i}^2. \end{aligned}$$

所以, $\sum_{i=1}^m \sum \mathbb{R}[\bar{x}]_{Q_i}^2$ 是闭的. □

4 主要定理

首先用以下两个引理说明一类多项式中的 SOS 分解是唯一的.

引理 4.1 对于任意有限集 $Q \subset \mathbb{N}^n$, 有

$$\text{conv}(Q) = \text{conv}(\sigma(Q)).$$

证明 不失一般性, 假设 $Q \neq \sigma(Q)$. 令 $Q \setminus \sigma(Q) = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$, 记

$$Q_0 = Q, \quad Q_i = Q_{i-1} \setminus \{a_i\}, \quad i = 1, \dots, r.$$

从而 $Q_r = \sigma(Q)$. 通过对 i 做归纳, 我们来证明断言

$$\text{conv}(Q_i) = \text{conv}(Q), \quad i = 0, \dots, r.$$

当 $i = 0$, 断言显然成立. 假设断言对 $i - 1$ 成立. 显然, 我们只需要证明 $a_i \in \text{conv}(Q_i)$.

由 $a_i \in Q \setminus \sigma(Q)$ 知, 存在 $b, c \in Q$ 满足

$$b \neq a_i, \quad c \neq a_i, \quad b + c = 2a_i.$$

因为 $b, c \in Q \subseteq \text{conv}(Q) = \text{conv}(Q_{i-1})$, 所以对任意 $\alpha \in Q_{i-1}$, 存在 $\lambda_{b,\alpha}, \lambda_{c,\alpha} \in [0, 1]$ 使得

$$\begin{aligned} b &= \sum_{\alpha \in Q_{i-1}} \lambda_{b,\alpha} \alpha, & \sum_{\alpha \in Q_{i-1}} \lambda_{b,\alpha} &= 1, \\ c &= \sum_{\alpha \in Q_{i-1}} \lambda_{c,\alpha} \alpha, & \sum_{\alpha \in Q_{i-1}} \lambda_{c,\alpha} &= 1. \end{aligned}$$

因为 $b \neq a_i$ 且 $c \neq a_i$, 所以有 $\lambda_{b,a_i} + \lambda_{c,a_i} < 2$.

因为 $b + c = 2a_i$, 故有 $2a_i = \sum_{\alpha \in Q_{i-1}} \lambda_{b,\alpha} \alpha + \sum_{\alpha \in Q_{i-1}} \lambda_{c,\alpha} \alpha$. 所以,

$$\begin{aligned} a_i &= \sum_{\alpha \in Q_{i-1} \setminus \{a_i\}} \frac{\lambda_{b,\alpha} + \lambda_{c,\alpha}}{2 - \lambda_{b,a_i} - \lambda_{c,a_i}} \alpha \\ &= \sum_{\alpha \in Q_i} \frac{\lambda_{b,\alpha} + \lambda_{c,\alpha}}{2 - \lambda_{b,a_i} - \lambda_{c,a_i}} \alpha. \end{aligned}$$

容易看出

$$\frac{\lambda_{b,\alpha} + \lambda_{c,\alpha}}{2 - \lambda_{b,a_i} - \lambda_{c,a_i}} \geq 0 \quad \text{且} \quad \sum_{\alpha \in Q_i} \frac{\lambda_{b,\alpha} + \lambda_{c,\alpha}}{2 - \lambda_{b,a_i} - \lambda_{c,a_i}} = 1.$$

这意味着 $a_i \in \text{conv}(Q_i)$, 证毕. $\square$

引理 4.2 令 $a, b \in \mathbb{N}^n$ 且 $a \neq b$. 如果 $a - b \in \{-1, 0, 1\}^n$, 那么 $\bar{x}^{2a} + 2\bar{x}^{a+b} + \bar{x}^{2b}$ 的任意平方和分解都具有 $\sum_{i=1}^m (\lambda_{i1}\bar{x}^a + \lambda_{i2}\bar{x}^b)^2$ 的形式, 并且存在 i 使得 $\lambda_{i1}\lambda_{i2} \neq 0$.

证明 假设 $\{f_i\}_{i=1}^m$ 满足 $(\bar{x}^a + \bar{x}^b)^2 = \sum_{i=1}^m f_i^2$. 令 $Q = \bigcup_{i=1}^m S(f_i)$. 由 $\sigma(Q)$ 的定义, 可以看出 $\sigma(Q)$ 中的元素的平方必然在 $\sum_{i=1}^m f_i^2$ 中出现 (因为它们不可被抵消). 因此, $\sigma(Q) \subseteq \{a, b\}$. 由引理 4.1 可知,

$$Q \subseteq \text{conv}(Q) = \text{conv}(\sigma(Q)) \subseteq \text{conv}(\{a, b\}) = \{a, b\}.$$

最后一个等式成立是因为 $a - b \in \{-1, 0, 1\}^n$. 从而, $f_i = \lambda_{i1}\bar{x}^a + \lambda_{i2}\bar{x}^b$. 因为 $\bar{x}^{a+b}$ 出现在 $\sum_{i=1}^m f_i^2$ 中, 那么存在 i 使得 $\lambda_{i1}\lambda_{i2} \neq 0$. $\square$

引理 4.3 设 $k \in \mathbb{N}$, $S_1 \subset S_2 \subseteq \Lambda(2k)$. 如果

$$\left\{ f \in \sum \mathbb{R}[\bar{x}]_k^2 \mid S(f) = S_2 \right\} \neq \emptyset$$

并且 $\{Q_i\}_{i=1}^m$ 是 S_2 的一个分块平方和支撑, 那么 $\{Q_i\}_{i=1}^m$ 也是 S_1 的一个分块平方和支撑.

证明 选取 $f_2 \in \{f \in \sum \mathbb{R}[\bar{x}]_k^2 \mid S(f) = S_2\}$. 对任意 $f_1 \in \{f \in \sum \mathbb{R}[\bar{x}]_k^2 \mid S(f) = S_1\}$, 不失一般性, 假设 f_2 的系数的绝对值小于 f_1 . 对任意正整数 j , 令 $g_j = \frac{f_2}{j} + f_1$. 那么 $S(g_j) = S_2$ 且 $\lim_{j \rightarrow \infty} g_j = f_1$.

因为 $\{Q_i\}_{i=1}^m$ 是 S_2 的一个分块平方和支撑, 所以,

$$\left\{ f \in \sum \mathbb{R}[\bar{x}]_k^2 \mid S(f) = S_2 \right\} \subseteq \sum_{i=1}^m \sum \mathbb{R}[\bar{x}]_{Q_i}^2.$$

由定理 3.1 知, $f_1 \in \sum_{i=1}^m \sum \mathbb{R}[\bar{x}]_{Q_i}^2$. 所以,

$$\left\{ f \in \sum \mathbb{R}[\bar{x}]_k^2 \mid S(f) = S_1 \right\} \subseteq \sum_{i=1}^m \sum \mathbb{R}[\bar{x}]_{Q_i}^2.$$

因此, $\{Q_i\}_{i=1}^m$ 是 S_1 的一个分块平方和支撑. $\square$

根据以上两个引理, 我们将证明任意给定的次数为 $2k$ 的满多项式, 即含有所有次数不超过 $2k$ 的单项的多项式, 不是分块平方和可分解的.

定理 4.1 对任意 $k \in \mathbb{N}$, $\Lambda(2k)$ 不是分块平方和可分解的.

证明 假设 $\{Q_i\}_{i=1}^m$ 是 $\Lambda(2k)$ 的一个真分块平方和支撑, 那么对于任意的 Q_i ($i = 1, \dots, m$), 有 $\Lambda(k) \not\subseteq Q_i$ 且 $Q_i \neq \emptyset$.

首先证明存在相异的 $a, b \in \Lambda(k)$, 满足 $a - b \in \{-1, 0, 1\}^n$ 且 $a \notin Q_i \vee b \notin Q_i$, $i = 1, \dots, m$. 为此记 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 为 $\mathbb{N}^n$ 中的全部单位向量.

令 $Q' = Q_1$. 因为 $\Lambda(k) \not\subseteq Q'$, 所以存在 $\alpha, \beta \in \Lambda(k)$ 使得 $\alpha \in Q'$ 且 $\beta \notin Q'$. 令 $\{r_j\}_{j=1}^u \subset \Lambda(k)$ 是 $\Lambda(k)$ 中从 $\alpha (= r_1)$ 到 $\beta (= r_u)$ 的连通路程, 并且满足对任意的 $j \in \{1, \dots, u\}$ 存在 $i \in \{1, \dots, n\}$ 使得 $r_{j+1} - r_j = \pm e_i$, 则存在 $j_0 \in \{1, \dots, u-1\}$ 使得 $r_{j_0} \in Q'$ 且 $r_{j_0+1} \notin Q'$. 令 $a = r_{j_0}, b = r_{j_0+1}$. 因为 Q_i ($i = 1, \dots, m$) 两两不交, 故对所有 $i = 1, \dots, m$ 有 $a \notin Q_i \vee b \notin Q_i$.

由引理 4.3 知, $\{Q_i\}_{i=1}^m$ 也是 $\{2a, a+b, 2b\}$ 的一个分块平方和支撑. 所以,

$$(\bar{x}^a + \bar{x}^b)^2 \in \sum_{i=1}^m \sum \mathbb{R}[\bar{x}]_{Q_i}^2.$$

但由引理 4.2 可知, $(\bar{x}^a + \bar{x}^b)^2 = \sum_{i=1}^s (\lambda_{i1}\bar{x}^a + \lambda_{i2}\bar{x}^b)^2$ 且存在 i 使得 $\lambda_{i1}\lambda_{i2} \neq 0$. 这与断言 (对任意 $i \in \{1, \dots, m\}$ 有 $a \notin Q_i \vee b \notin Q_i$) 矛盾.

所以, $\Lambda(k)$ 是 $\Lambda(2k)$ 唯一的分块平方和支撑. □

定理 4.2 对任意的 $k \in \mathbb{N}$, 分块平方和可分解多项式在 $\sum \mathbb{R}[\bar{x}]_k^2$ 中是零测的.

证明 由定理 4.1 知, $\mathbb{R}[\bar{x}]_{2k}$ 中的分块平方和可分解多项式属于

$$\{f \in \mathbb{R}[\bar{x}]_{2k} \mid S(f) \neq \Lambda(2k)\},$$

因此在 $\mathbb{R}[\bar{x}]_{2k}$ 中测度为 0. 同时知道 $\sum \mathbb{R}[\bar{x}]_k^2$ 在 $\mathbb{R}[\bar{x}]_{2k}$ 中是非零测的, 因为锥 $\sum \mathbb{R}[\bar{x}]_k^2$ 是 $\mathbb{R}[\bar{x}]_{2k}$ 中的一个全维凸锥, 即

$$\sum \mathbb{R}[\bar{x}]_k^2 - \sum \mathbb{R}[\bar{x}]_k^2 = \mathbb{R}[\bar{x}]_{2k}.$$

从而分块平方和可分解多项式在 $\sum \mathbb{R}[\bar{x}]_k^2$ 中是零测的. □

根据多项式分块平方和可分解的定义, 定理 4.1 和 4.2 指出那些 Gram 矩阵可分块对角化的多项式在平方和多项式中是极少的.

5 结论

寻找分离多项式或者最小坐标投影^[29, 30]是近年文献中提出的两种检测分块平方和可分解的方法, 如果成功就可以对 Gram 矩阵分块对角化, 大大提高了基于 SDP 的平方和分解方法的效率和可靠性. 本文定义了一个多项式类, 称作分块平方和可分解多项式, 证明了这个类是对满足文献 [29, 30] 中性质的多项式的推广. 本文的主要结果是证明了分块平方和可分解多项式在 SOS 多项式的集合中为零测集.

分块平方和可分解多项式的定义要求具有某个支撑的 SOS 多项式一定可以由一些具有较小支撑的多项式的平方和来表示. 这意味着相应的 SDP 矩阵可对角化当且仅当它可分块对角化. 最新的利

用稀疏性试探分块对角化的高效方法 (如文献 [31] 中的方法) 并不具有这种性质. 这是值得进一步研究的问题.

参考文献

- 1 Hilbert D. Ueber die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten. *Math Ann*, 1888, 32: 342–350
- 2 Hilbert D. Mathematische Probleme. *Arch Math Phys*, 1901, 1: 44–63 and 213–237
- 3 Artin E. Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate. *Abh Math Sem Univ Hamburg*, 1927, 5: 100–115
- 4 Tarski A. *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*. Berkeley: University of California Press, 1951
- 5 Krivine J L. Anneaux préordonnés. *J Anal Math*, 1964, 12: 307–326
- 6 Stengle G. A nullstellensatz and a positivstellensatz in semialgebraic geometry. *Math Ann*, 1974, 207: 87–97
- 7 Blekherman G. There are significantly more nonnegative polynomials than sums of squares. *Israel J Math*, 2006, 153: 355–380
- 8 Vandenberghe L, Boyd S. Semidefinite programming. *SIAM Rev*, 1996, 38: 49–95
- 9 Lasserre J B. Global optimization with polynomials and the problem of moments. *SIAM J Optim*, 2001, 11: 796–817
- 10 Parrilo P A. Semidefinite programming relaxations for semialgebraic problems. *Math Program*, 2003, 96: 293–320
- 11 Kim S, Kojima M, Waki H. Generalized Lagrangian duals and sums of squares relaxations of sparse polynomial optimization problems. *SIAM J Optim*, 2005, 15: 697–719
- 12 Schweighofer M. Optimization of polynomials on compact semialgebraic sets. *SIAM J Optim*, 2005, 15: 805–825
- 13 Choi M, Lam T Y, Reznick B. Sums of squares of real polynomials. In: *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. 58. Providence: Amer Math Soc, 1995, 103–126
- 14 Kaltofen E, Li B, Yang Z, et al. Exact certification of global optimality of approximate factorizations via rationalizing sums-of-squares with floating point scalars. In: *Proceedings of the 21st International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*. New York: Association for Computing Machinery, 2008, 155–164
- 15 Lofberg J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. New Orleans: IEEE, 2004, 284–289
- 16 Papachristodoulou A, Anderson J, Valmorbida G, et al. SOSTOOLS version 3.00: Sum of squares optimization toolbox for MATLAB. *arXiv:1310.4716*, 2013
- 17 Seiler P. SOSOPT: A toolbox for polynomial optimization. *arXiv:1308.1889*, 2013
- 18 Dai L, Gan T, Xia B, et al. Barrier certificates revisited. *J Symbolic Comput*, 2017, 80: 62–86
- 19 Reznick B. Extremal PSD forms with few terms. *Duke Math J*, 1978, 45: 363–374
- 20 Lofberg J. Pre- and post-processing sum-of-squares programs in practice. *IEEE Trans Automat Control*, 2009, 54: 1007–1011
- 21 Kojima M, Kim S, Waki H. Sparsity in sums of squares of polynomials. *Math Program*, 2005, 103: 45–62
- 22 Permenter F, Parrilo P A. Basis selection for SOS programs via facial reduction and polyhedral approximations. In: *Proceedings of the 53rd IEEE Conference on Decision and Control*. Piscataway: IEEE, 2014, 6615–6620
- 23 Campos J S, Parpas P. A multigrid approach to SDP relaxations of sparse polynomial optimization problems. *SIAM J Optim*, 2018, 28: 1–29
- 24 Marandi A, de Klerk E, Dahl J. Solving sparse polynomial optimization problems with chordal structure using the sparse bounded-degree sum-of-squares hierarchy. *Discrete Appl Math*, 2020, 275: 95–110
- 25 Nie J, Demmel J. Sparse SOS relaxations for minimizing functions that are summations of small polynomials. *SIAM J Optim*, 2009, 19: 1534–1558
- 26 Waki H, Kim S, Kojima M, et al. Sums of squares and semidefinite program relaxations for polynomial optimization problems with structured sparsity. *SIAM J Optim*, 2006, 17: 218–242
- 27 Weisser T, Lasserre J B, Toh K C. Sparse-BSOS: A bounded degree SOS hierarchy for large scale polynomial optimization with sparsity. *Math Prog Comp*, 2018, 10: 1–32
- 28 Gatermann K, Parrilo P A. Symmetry groups, semidefinite programs, and sums of squares. *J Pure Appl Algebra*, 2004, 192: 95–128
- 29 Dai L, Xia B. Smaller SDP for SOS decomposition. *J Global Optim*, 2015, 63: 343–361
- 30 Permenter F, Parrilo P A. Finding sparse, equivalent SDPs using minimal coordinate projections. In: *Proceedings of the 54th IEEE Conference on Decision and Control*. Piscataway: IEEE, 2015, 7274–7279
- 31 Wang J, Li H K, Xia B C. A new sparse SOS decomposition algorithm based on term sparsity. In: *Proceedings of*

- the 2019 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. New York: Association for Computing Machinery, 2019, 347–354
- 32 Bertsimas D, Freund R M, Sun X A. An accelerated first-order method for solving SOS relaxations of unconstrained polynomial optimization problems. *Optim Methods Softw*, 2013, 28: 424–441
- 33 Henrion D, Malick J. Projection methods in conic optimization. In: *Handbook on Semidefinite, Conic and Polynomial Optimization*. Boston: Springer, 2012, 565–600
- 34 Zheng Y, Fantuzzi G, Papachristodoulou A. Exploiting sparsity in the coefficient matching conditions in sum-of-squares programming using ADMM. *IEEE Control Syst Lett*, 2017, 1: 80–85

Block SOS decomposition

Haokun Li & Bican Xia

Abstract In this paper, we define a concept of block SOS (sum of squares) decomposable polynomials which is a generalization of some special classes of polynomials in the literature. Roughly speaking, it is a class of polynomials whose SOS decomposition problem can be transformed equivalently into smaller ones (in other words, the corresponding semi-definite programming matrices can be block-diagonalized) by considering their supports only (coefficients are not considered). Then we prove that two recently proposed methods in the literature, the split polynomial and the minimal coordinate projection, can be described using the concept of block SOS decomposable polynomial. Also, we prove that the set of block SOS decomposable polynomials has measure zero in the set of SOS polynomials.

Keywords SOS decomposition, sparsity, SDP

MSC(2010) 11E25, 12D15

doi: 10.1360/SSM-2019-0333