强间歇干扰下基于黎曼平均的稀疏DOA估计方法

蓝晓宇[①②] 胡吉彦*[①] 梁明珅[①②] 马 爽[①②]

[①](沈阳航空航天大学电子信息工程学院 沈阳 110136)

[②](辽宁省空天信息感知与智能处理重点实验室 沈阳 110136)

摘要：针对复杂电磁环境下雷达干扰增多且靠近强干扰信号的目标信号难以准确估计的问题，该文提出了一种强间歇干扰下基于黎曼平均的稀疏波达方向(DOA)估计方法。首先，在扩展互质阵列接收数据模型下，利用在整个采样周期内目标信号持续活动而强干扰信号间歇性活动的特性，引入黎曼平均对干扰信号进行抑制；然后，将经过处理的数据协方差矩阵向量化，得到虚拟阵列接收数据；最后，在虚拟域中运用稀疏迭代协方差估计(SPICE)算法对稀疏信号进行重构，得到目标信号的DOA估计。仿真结果表明，在信号源数目未知的情况下，该方法可以对角度与强干扰信号紧密相邻的弱目标信号进行高精度的DOA估计。与现有子空间算法和稀疏重构类算法相比，所提算法在较小快拍数和低信噪比下具有更高的估计精度和角度分辨力。

关键词：波达方向估计；互质阵列；黎曼平均；干扰抑制；稀疏迭代协方差估计

中图分类号：TN911.7 **文献标识码**：A **文章编号**：2095-283X(2025)02-0280-13

DOI: 10.12000/JR24175 **CSTR**: 32380.14.JR24175

引用格式：蓝晓宇, 胡吉彦, 梁明珅, 等. 强间歇干扰下基于黎曼平均的稀疏DOA估计方法[J]. 雷达学报(中英文), 2025, 14(2): 280–292. doi: 10.12000/JR24175.

Reference format: LAN Xiaoyu, HU Jiyan, LIANG Mingshen, *et al*. Sparse DOA estimation method based on Riemann averaging under strong intermittent jamming[J]. *Journal of Radars*, 2025, 14(2): 280–292. doi: 10.12000/JR24175.

Sparse DOA Estimation Method Based on Riemann Averaging under Strong Intermittent Jamming

LAN Xiaoyu[①②] HU Jiyan*[①] LIANG Mingshen[①②] MA Shuang[①②]

[①](*College of Electronic Information Engineering*, *Shenyang Aerospace University*, *Shenyang* 110136, *China*)

[②](*Liaoning Provincial Key Laboratory of Aerospace Information Perception and Intelligent Processing*, *Shenyang* 110136, *China*)

Abstract: Aiming to address the problem of increased radar jamming in complex electromagnetic environments and the difficulty of accurately estimating the target signal close to a strong jamming signal, this paper proposes a sparse Direction of Arrival (DOA) estimation method based on Riemann averaging under strong intermittent jamming. First, under the extended coprime array data model, the Riemann averaging is introduced to suppress the jamming signal by leveraging the property that the target signal is continuously

收稿日期：2024-08-31；改回日期：2024-11-08；网络出版：2024-12-11

*通信作者： 胡吉彦 1534018950@qq.com *Corresponding Author: HU Jiyan, 1534018950@qq.com

基金项目：国家青年科学基金(61801308)，航空科学基金(2020Z017054001)，辽宁省教育厅面上项目(LJKMZ20220535)，辽宁省自然科学基金(2024-MS-135)

Foundation Items: National Science Foundation for Young Scientists of China (61801308), Aeronautical Science Foundation (2020Z017054001), General Program of the Education Department of Liaoning Province (LJKMZ20220535), Natural Science Foundation of Liaoning Province of China (2024-MS-135)

责任主编：廖桂生 Corresponding Editor: LIAO Guisheng

©The Author(s) 2024. This is an open access article under the CC-BY 4.0 License (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

active while the strong jamming signal is intermittently active. Then, the covariance matrix of the processed data is vectorized to obtain virtual array reception data. Finally, the sparse iterative covariance-based estimation method, which is used for estimating the DOA under strong intermittent interference, is employed in the virtual domain to reconstruct the sparse signal and estimate the DOA of the target signal. The simulation results show that the method can provide highly accurate DOA estimation for weak target signals whose angles are closely adjacent to strong interference signals when the number of signal sources is unknown. Compared with existing subspace algorithms and sparse reconstruction class algorithms, the proposed algorithm has higher estimation accuracy and angular resolution at a smaller number of snapshots, as well as a lower signal-to-noise ratio.

Key words: Direction of Arrival (DOA) estimation; Coprime array; Riemann averaging; Jamming suppression; Sparse Iterative Covariance-based Estimation (SPICE)

1　引言

波达方向(Direction of Arrival, DOA)估计技术在声呐、电子侦察、5G通信、导航及车辆辅助驾驶等广泛领域展现出重要应用价值，促使了相关算法的深入研究[1−4]。其中，均匀线阵(Uniform Linear Array, ULA)作为经典阵列结构，在DOA估计算法中占据核心地位，众多超分辨率算法均以其为基础构建。然而，ULA的阵列孔径受限于物理阵元数量，导致其在处理超过此数量的DOA时面临挑战，限制了其在实际复杂环境中的广泛应用。近年来，稀疏阵列(Sparse Array, SA)由于其布阵灵活、成本降低且具有较高的估计精度等优点受到越来越多研究人员的关注，最小冗余阵列(Minimum Redundant Array, MRA)、嵌套阵列(Nested Sensor Array, NSA)、互质阵列(Coprime Sensor Array, CSA)等稀疏阵列相继被提出[5−7]。这几种阵列中，MRA虽然可以提供最大的自由度，但这种阵列在给定阵元数的情况下其阵元位置和自由度的闭合表达式均无法给出，因此很难对其进行研究分析。相对而言，NSA和CSA的阵元位置具有闭式解，但NSA由于子阵阵元间距密集导致阵元间存在较高的互耦。扩展互质阵列作为一种改进的互质阵列，其通过特殊的排布方式，在能够减小阵元间相互耦合影响的同时，拥有更大的阵列自由度和更高的分辨力，在对多信源DOA估计时具有更优越的性能[8]。然而，目前多数基于ULA或者SA的DOA估计算法都是在入射信号均为等功率信源的前提下设计的，在现代电磁环境越来越复杂的情况下，入射到阵列的信号不仅在数量上对阵列提出挑战，而且在很多场景中，干扰信号的功率往往很强，这会对功率较弱的目标信号产生严重干扰。因此，如何在入射信号数目未知情况下，从强弱混合信号中准确而高效地估计出弱小目标信号角度信息具有重要的研究意义[9]。

针对上述问题，多数强干扰下弱信号的DOA估计主要有两种思路，一种思路是先抑制强干扰信号，再对目标信号进行估计。对于这种思路，文献[10]提出了一种干扰阻塞(Jamming Jam Method, JJM)算法，这种算法利用强干扰的先验知识，在阵列流形矩阵中对强干扰的导向矢量进行消除，之后用经过处理的阵列流形来对目标信号DOA估计，但这种处理会造成阵列孔径损失。文献[11]提出通过将强干扰信号子空间与噪声子空间合并，再在扩展之后的噪声子空间利用常规MUSIC算法来对弱信号进行DOA估计，但是当强弱信号间隔较小时该算法在抑制强干扰的同时会对弱信号造成衰减。此外，文献[12]提出一种基于固定投影阻塞的方法，通过构建与干扰导向矢量正交的投影矩阵作为干扰阻塞矩阵，然后对接收信号进行预处理之后得到了消除强干扰的协方差矩阵。另一种针对强干扰下弱信号DOA估计的思路是同时估计出强弱信号后从中挑选出弱目标信号。文献[13]根据参考信号和雷达回波信号的强相干特性以及回波信号和干扰信号的非相关特性，推导出了三阶互累积量矩阵，然后利用子空间方法获得二维空间谱，有效在强干扰下实现目标DOA估计。文献[14]利用噪声子空间不变的特性(Invariant Property of Noise Subspace, IPNS)并加入对角加载处理，证明了经过对角加载的算法在近距离时估计强弱信号非常有效。以上子空间类算法虽然在干扰抑制方面有不错的表现，但往往需要知道信源数等先验条件，在很多场景下，先验知识的获得并不容易，这就限制了这类方法的应用范围。

自2011年以来，稀疏重构类方法获得了极大关注[15−17]，与子空间类算法相比，稀疏重构类算法不仅能在信源个数未知情况下实现高精度DOA估计，还可以在小快拍数和低信噪比下拥有更出色的性能。文献[18]首先采用功率倒置的并行自适应波束成形算

法来抑制干扰形成新的阵列数据，然后通过加权l_1范数来对新的阵列数据进行DOA估计，该方法并不需要干扰方向作为先验条件，也能有效抑制强干扰。文献[19]提出了一种高效的基于稀疏迭代协方差(Sparse Iterative Covariance-based Estimation, SPICE)算法的DOA估计方法，通过构造一个功率归一化的输入矩阵，显著降低了强弱信号的功率差，从而减小了强干扰对目标DOA估计的影响，然而由于该方法使用了特征分解，导致其会对相干信源失效。

上述算法多是基于持续活动的强干扰信号背景下提出来的，忽视了干扰信号间歇性活动的情况[20]。尽管强间歇干扰下的DOA估计在理论上和实践中都具有重大意义，但在公开的文献中受到的关注十分有限。在雷达阵列处理方面，雷达接收机收到的阵列数据采样快拍中有一部分被干扰机污染，而另一部分没有被污染的情况时有发生，这会对目标信号的DOA估计造成严重影响[21]。分布式间歇干扰也是一种典型的强间歇干扰，其表现为多个高功率的干扰信号在空间中从不同方向入射，在时间上断续存在，这种干扰由于信号的突变性，是当前全球导航卫星系统(Global Navigation Satellite System, GNSS)所面临的一种重要威胁，特别是对基于递推算法的阵列处理影响颇大，会使得滤波器收敛速度下降甚至无法收敛[22]。针对这个问题，文献[23]利用黎曼几何设计了一种波束形成方法，并从理论上证明了将黎曼平均引入常规波束形成算法可以有效抑制间歇性干扰源。文献[22]提出了一种在间歇干扰下的最大似然估计方法，然而这类算法的高复杂性使得其在实际应用中受到限制。上述算法都是针对均匀线阵设计的，在复杂的电磁环境中充斥着大量的干扰信号，而均匀线阵只能测得少于阵列阵元数的信号数量，这就使得算法可能出现无法估计出全部信号的情况，因此如何在有效抑制强间歇性干扰的同时，实现对弱目标信号高分辨率和高精度的估计成为阵列信号处理中亟需解决的问题。

针对以上分析，本文提出了一种强间歇干扰下基于黎曼平均的稀疏DOA估计方法。首先，在扩展互质阵列下构造了强间歇干扰信号下弱期望信号的雷达信号模型；然后，利用在采样周期内强干扰信号不连续活动和期望信号持续活动的特点，通过将接收信号划分成若干个数据块并求出各个数据块协方差矩阵的黎曼均值，达到了有效抑制强间歇干扰信号的目的；接着，将经过黎曼平均的协方差矩阵向量化，得到在虚拟域的虚拟阵列接收信号；最后，将SPICE算法引入虚拟域，经过稀疏重构得到入射信号的DOA估计。仿真结果表明，所提算法在强间歇干扰下具有优越的性能，特别是在低信噪比和较低快拍数下也能实现高精度的弱目标DOA估计。

2 扩展互质阵列模型和接收信号模型

2.1 扩展互质阵列模型

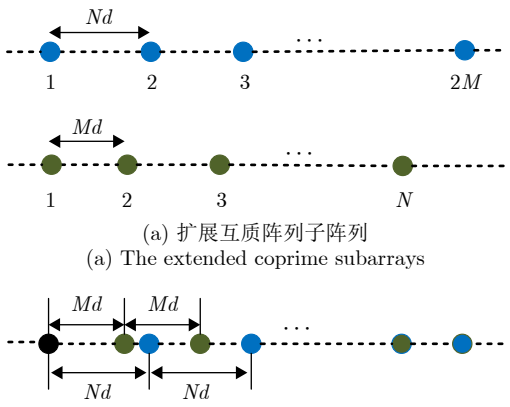
为了提高阵列自由度，本文考虑使用扩展互质阵列。扩展互质阵列能够在同等数量的真实阵元的情况下，产生比普通互质阵列更多的虚拟阵元。如图1(a)所示，2个稀疏均匀线性子阵列分别由N个和$2M$个物理阵元构成，且阵元间距分别为Md和Nd。在这里，M和N是互质自然数并且M小于N，单位阵元间距d取为信号波长的一半。如图1(b)所示，本文所采用的扩展互质阵列就是把上述2个子阵列以首阵元重叠且沿着相同的方向进行线性组合而成。

由于图1(b)中M, N互质，除重叠的第1个阵元外，两个子阵再不会出现其余阵元重叠的情况，因此线性叠加后的扩展互质阵列的总物理阵元个数为$G=2M+N-1$，并且扩展互质阵列的物理阵元位置集$\mathbb{S}_{\mathrm{CO}}$可以表示为

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_{\mathrm{CO}}=&\{mN\,|0\le m\le 2M-1\}\\&\cup\{nM\,|0\le n\le N-1\}\end{aligned}\tag{1}$$

2.2 强间歇干扰下的阵列接收信号模型

如图2所示，本文假设在整个采样周期T内，目标源样本是连续的，而干扰源样本是间歇性的，源的数量、位置和活动时间都是未知的，不同源的功率也未知。因此，在存在多个同时活跃的干扰源的情况下，特别是当期望信号的波达方向强干扰信号较近时，弱信号可能会受到干扰从旁瓣泄露的影响而被淹没。在这种情况下，如何实现目标信号的高精度DOA估计，是本文需要解决的关键问题。



(a) 扩展互质阵列子阵列
(a) The extended coprime subarrays

(b) 扩展互质阵列
(b) The extended coprime array

图 1 扩展互质阵列结构示意图

Fig. 1 Illustration of the extended coprime array structure

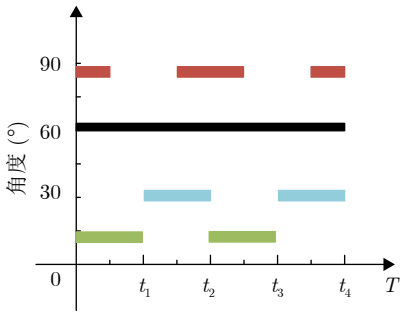


图 2 连续信号和间歇性干扰信号活动示意图

Fig. 2 Schematic diagram of continuous and intermittent interfering signal activity

为了简便地描述接收信号的模型，本文假设入射信号为远场窄带信号，入射波近似视为平面波，那么各阵元的接收信号可由波程差造成的相位差进行区分，而且阵列接收的噪声与信号相互独立，将其建模成独立同分布的零均值加性高斯白噪声。假设在空间中有K个远场窄带信号$s_k(t)(k=1,2,\cdots,K)$入射到如图1所示的扩展互质阵列当中($K<G$)，其中包含K_{D}个目标信号和K_{I}个干扰信号，则在t时刻扩展互质阵列的接收信号可建模为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(t)&=\sum_{k=1}^{K_{\mathrm{D}}}\boldsymbol{a}(\theta_k)s_k(t)+\alpha\sum_{i=1}^{K_{\mathrm{I}}}\boldsymbol{a}(\theta_i)s_i(t)+\boldsymbol{v}(t)\\&=\boldsymbol{A}(\theta)\boldsymbol{s}(t)+\boldsymbol{v}(t)\end{aligned}\tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{y}(t)=[y_1(t),y_2(t),\cdots,y_G(t)]^{\mathrm{T}}$是一个$G\times1$的矢量，矢量$\boldsymbol{y}(t)$由目标信号、干扰信号和噪声3部分组成。$s_k(t)$和$s_i(t)$分别是第$k$个目标信号和第$i$个干扰信号的复包络，假设所有目标信号和干扰信号是相互独立的复值零均值高斯随机信号且功率为$\varepsilon\left\{|s_k(t)|^2\right\}=p_k$(其中$\varepsilon\left\{|s_k(t)|^2\right\}$表示第$k$个信号的功率，$k=1,2,\cdots,K$)。$\alpha=\{0,1\}$是取值为0和1的随机变量，当$\alpha=1$时表示干扰信号活跃，当$\alpha=0$时表示干扰信号消失。$\boldsymbol{v}(t)$表示方差为$\sigma_v^2$的零均值加性高斯白噪声。$\boldsymbol{A}(\theta)=[\boldsymbol{a}(\theta_1),\boldsymbol{a}(\theta_2),\cdots,\boldsymbol{a}(\theta_K)]\in\mathbb{C}^{G\times K}$为信源信号的阵列流形矩阵，$\boldsymbol{a}(\theta_k)$表示阵列中第$k$个信号的导向矢量，表示为

$$\boldsymbol{a}(\theta_k)=\left[1,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi u_2/\lambda\sin\theta_k},\cdots,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi u_G/\lambda\sin\theta_k}\right]^{\mathrm{T}}\tag{3}$$

其中，$(\cdot)^{\mathrm{T}}$表示转置运算。$\mathrm{j}=\sqrt{-1}$为虚部单元，λ是波长，$u_g=x_gd(g=1,2,\cdots,G)$表示扩展互质阵列中第g个物理阵元的位置，$x_g\in\mathbb{S}_{\mathrm{CO}}$，把第1个阵元当作参考阵元，即$u_1=0$。

假设用于DOA估计的快拍数为L，将式(2)进行离散采样得到矩阵形式为

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AS}+\boldsymbol{V}\tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{Y}=[\boldsymbol{y}(1),\boldsymbol{y}(2),\cdots,\boldsymbol{y}(L)]\in\mathbb{C}^{G\times L}$表示阵元接收数据矩阵，$\boldsymbol{S}=[\boldsymbol{s}(1),\boldsymbol{s}(2),\cdots,\boldsymbol{s}(L)]\in\mathbb{C}^{K\times L}$表示信源信号矩阵，$\boldsymbol{V}\in\mathbb{C}^{G\times L}$表示噪声矩阵。将接收数据矩阵$\boldsymbol{Y}$分割为$L_{\mathrm{X}}$段互不重叠且长度相等的分段，每一段均包含$L_{\mathrm{S}}$个连续采样点，则可以将$\boldsymbol{Y}$表示为

$$\boldsymbol{Y}=[\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2,\cdots,\boldsymbol{Y}_{L_{\mathrm{X}}}]\tag{5}$$

其中，$\boldsymbol{Y}_i=\boldsymbol{AS}_i+\boldsymbol{V}_i(i=1,2,\cdots,L_{\mathrm{X}})$表示第$i$段接收数据矩阵，$\boldsymbol{S}_i=[\boldsymbol{S}_{\mathrm{D}}(i)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{S}_{\mathrm{I}}(i)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^{K\times L_{\mathrm{S}}}$表示第$i$段信源矩阵，其中$\boldsymbol{S}_{\mathrm{D}}(i)=[\boldsymbol{s}_1(i),\boldsymbol{s}_2(i),\cdots,\boldsymbol{s}_{K_{\mathrm{D}}}(i)]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^{K_{\mathrm{D}}\times L_{\mathrm{S}}}$为目标信号矩阵，第$i$段干扰信号矩阵表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{\mathrm{D}}(i)=\ &[\boldsymbol{s}_1(i)\cdot\alpha_i\in\mathfrak{L}_1,\boldsymbol{s}_2(i)\cdot\alpha_i\in\mathfrak{L}_2,\cdots,\\&\boldsymbol{s}_{K_{\mathrm{D}}}(i)\cdot\alpha_i\in\mathfrak{L}_{K_{\mathrm{I}}}]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^{K_{\mathrm{I}}\times L_{\mathrm{S}}}\end{aligned}\tag{6}$$

其中，$\mathfrak{L}_j$表示第j个信号处于活动状态的分段集合，$j=1,2,\cdots,K_{\mathrm{I}}$。当第$j$个干扰信号在第$i$个片段中处于活跃状态时，$\alpha_i=1$；否则$\alpha_i=0$。

理论上，阵列接收信号$\boldsymbol{y}(t)$的协方差矩阵可以写为

$$\boldsymbol{R}_y=\mathrm{E}\left[\boldsymbol{y}(t)\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}(t)\right]=\sum_{k=1}^{K}p_k\boldsymbol{a}(\theta_k)\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\theta_k)+\sigma_v^2\boldsymbol{I}\tag{7}$$

其中，$(\cdot)^{\mathrm{H}}$表示共轭转置操作，$\boldsymbol{I}\in\mathbb{C}^{G\times G}$定义为单位矩阵，通常情况下假设各天线收到的噪声方差相同，即$\left\{\sigma_v^2\right\}_{v=1}^{G}=\sigma_n^2$。令$\boldsymbol{P}_0=\mathrm{diag}([p_1,p_2,\cdots,p_K]^{\mathrm{T}})$表示信源信号的功率对角矩阵，$\boldsymbol{P}_n=\mathrm{diag}([\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_G]^{\mathrm{T}})$表示噪声的方差对角矩阵，则式(7)中$\boldsymbol{R}_y$可以进一步写为

$$\boldsymbol{R}_y=\boldsymbol{AP}_0\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{P}_n\tag{8}$$

由于实际应用中采样快拍数并不是无限大的，一般用L个快拍的统计平均来近似代替数学期望，采样协方差矩阵由式(9)表示为

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{Y}}=\frac{1}{L}\sum_{t=1}^{L}\boldsymbol{y}(t)\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}(t)\tag{9}$$

3　强间歇干扰下的高精度稀疏DOA估计

3.1　基于黎曼平均的协方差矩阵重构

在对入射信号的DOA估计过程中，大多算法都会用到接收数据的样本协方差矩阵，但他们对样本协方差矩阵的施密特正定特性并没有得到充分的利用。根据文献[23]所述，将黎曼平均引入传统波束形成算法可以在抑制间歇性干扰源的同时，增强期望信号。

将接收数据矩阵$\boldsymbol{Y}$分割为L_{X}段互不重叠且长度相等的小块，每一段均包含L_{S}个连续采样点。接着，计算每个独立小块上的样本协方差矩阵$\hat{\boldsymbol{R}}_i$，其定义为

$$\hat{\boldsymbol{R}}_i = \frac{1}{L_{\mathrm{X}}} \sum_{t=(i-1)\cdot L_{\mathrm{S}}+1}^{i\cdot L_{\mathrm{S}}} \boldsymbol{y}(t)\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}(t) \tag{10}$$

其中，$i = 1, 2, \cdots, L_{\mathrm{X}}$表示接收数据分段个数，且$L = L_{\mathrm{S}} \times L_{\mathrm{X}}$。为了使得每个接收数据分块所求得的协方差矩阵满秩，必须保证每个分段的接收信号采样点个数要大于阵元个数，即$L_{\mathrm{S}} > G$。

不难看出，由式(10)求得的每个$\hat{\boldsymbol{R}}_i$都是埃尔米特正定(Hermitian Positive Definite, HPD)矩阵，将HPD矩阵空间与仿射不变度量联系起来就构成了一个黎曼流形$\boldsymbol{\mathcal{M}}$[24]。把每个$\hat{\boldsymbol{R}}_i$视为黎曼流形$\boldsymbol{\mathcal{M}}$上的一个点，对这些协方差矩阵求黎曼平均，其黎曼均值可以表示为

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{R}} = \underset{\boldsymbol{R}\in\boldsymbol{\mathcal{M}}}{\arg\min} \sum_{i=1}^{L_{\mathrm{X}}} d_R^2\left(\boldsymbol{R}, \hat{\boldsymbol{R}}_i\right) \tag{11}$$

其中，$d_R^2(\boldsymbol{R}, \hat{\boldsymbol{R}}_i) = \|\log(\hat{\boldsymbol{R}}_i^{-1/2}\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{R}}_i^{-1/2})\|_{\mathrm{F}}^2$表示由仿射不变度量诱导的两个矩阵之间的黎曼距离，$\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$表示矩阵的Frobenius范数。事实上，对于两个以上的矩阵用式(11)无法得到其黎曼均值的闭式解，根据文献[25]，可以通过迭代的方式来求解多个矩阵的黎曼均值。

下面通过推导来说明黎曼平均对间歇性干扰的抑制作用，为了便于分析，假设有一个目标信号和K_{I}个间歇性干扰信号，定义目标信号的导向矢量为$\boldsymbol{a}_0$，干扰信号导向矢量为$\boldsymbol{a}_j (j = 1, 2, \cdots, K_{\mathrm{I}})$，可以将式(10)中的$\hat{\boldsymbol{R}}_i$表示为

$$\hat{\boldsymbol{R}}_i = \sigma_0^2\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{a}_0^{\mathrm{H}} + \boldsymbol{A}_J\boldsymbol{\Lambda}_i\boldsymbol{A}_J^{\mathrm{H}} + \sigma_n^2\boldsymbol{I} \tag{12}$$

其中，σ_0^2表示目标信号功率，$\boldsymbol{A}_J = [\boldsymbol{a}_1^j, \boldsymbol{a}_2^j, \cdots, \boldsymbol{a}_{K_{\mathrm{I}}}^j]$表示干扰信号的阵列流形矩阵，对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}_i$表示干扰信号的功率，由式(13)给出

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Lambda}_i = \mathrm{diag}\big(&\sigma_1^2(i)\cdot\alpha_i \in \mathfrak{L}_1, \sigma_2^2(i)\cdot\alpha_i \in \mathfrak{L}_2, \cdots,\\ &\sigma_{K_{\mathrm{I}}}^2(i)\cdot\alpha_i \in \mathfrak{L}_{K_{\mathrm{I}}}\big)\end{aligned} \tag{13}$$

其中，$\sigma_j^2(i) = \varepsilon\left\{|\boldsymbol{s}_j(n)|^2\right\} | n \in i\cdot L_{\mathrm{S}}$表示第$i$个片段中第$j$个干扰信号的预期信号功率，在这里定义$\tau_j = |\mathfrak{L}_j|/L_{\mathrm{X}}$为第$j$个干扰信号为活跃状态的分段的相对数量。假设区间内的每个干扰信号期望功率在所有分段中相同，即对所有的$j = 1, 2, \cdots, K_{\mathrm{I}}$和$i = 1, 2, \cdots, L_{\mathrm{X}}$，$\sigma_j^2(i) = \sigma_j^2$。

对式(12)中的$\hat{\boldsymbol{R}}_i$求黎曼均值或欧氏均值后也可以用相同的参数形式表示为

$$\boldsymbol{R} = \sigma_0^2\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{a}_0^{\mathrm{H}} + \sum_{j=1}^{K_{\mathrm{I}}}\mu_j^2\boldsymbol{a}_j\boldsymbol{a}_j^{\mathrm{H}} + \sigma_n^2\boldsymbol{I} \tag{14}$$

其中，μ_j^2是一个反映干扰功率的参数，由式(14)可知，黎曼均值和欧氏均值的区别取决于参数μ_j^2，根据文献[23]，在黎曼均值$\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{R}}$中和欧氏均值$\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{Y}}$中，参数$\mu_j^2$分别为

$$\mu_j^2(\mathrm{R}) = \frac{\left(\sigma_j^2\|\boldsymbol{a}_j\|^2 + \sigma_n^2\right)^{\tau_j}\left(\sigma_n^2\right)^{1-\tau_j} - \sigma_n^2}{\|\boldsymbol{a}_j\|^2} \tag{15}$$

$$\mu_j^2(\mathrm{E}) = \sigma_j^2\tau_j \tag{16}$$

假设对接收数据求黎曼均值对间歇性干扰能起到抑制作用，则不等式$\mu_j^2(\mathrm{R}) \le \mu_j^2(\mathrm{E})$成立，即

$$\begin{aligned}&\frac{\left(\sigma_j^2\|\boldsymbol{a}_j\|^2 + \sigma_n^2\right)^{\tau_j}\left(\sigma_n^2\right)^{1-\tau_j} - \sigma_n^2}{\|\boldsymbol{a}_j\|^2} \le \sigma_j^2\tau_j,\\ &\left(\sigma_j^2\|\boldsymbol{a}_j\|^2 + \sigma_n^2\right)^{\tau_j}\left(\sigma_n^2\right)^{1-\tau_j} - \sigma_n^2 \le \tau_j\sigma_j^2\|\boldsymbol{a}_j\|^2,\\ &\left(\sigma_j^2\|\boldsymbol{a}_j\|^2 + \sigma_n^2\right)^{\tau_j}\left(\sigma_n^2\right)^{1-\tau_j} \le \tau_j\sigma_j^2\|\boldsymbol{a}_j\|^2 + \sigma_n^2,\\ &\left(\sigma_j^2\|\boldsymbol{a}_j\|^2 + \sigma_n^2\right)^{\tau_j}\left(\sigma_n^2\right)^{1-\tau_j} \le \tau_j\left(\sigma_j^2\|\boldsymbol{a}_j\|^2 + \sigma_n^2\right)\\ &\quad + (1-\tau_j)\sigma_n^2\end{aligned} \tag{17}$$

由算术-几何平均值不等式[26]可知，式(17)成立，当且仅当$|\mathfrak{L}_j| = L_{\mathrm{X}}, \forall j$时，等式成立。式(17)表明，当干扰信号为间歇性信号时，对接收数据进行黎曼平均处理能有效对干扰信号进行抑制。根据文献[23]引理2，$\boldsymbol{a}_0$也是$\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{R}}$和$\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{Y}}$的特征向量，且其对应的两个特征值相同，即$\lambda_0(\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{R}}) = \lambda_0(\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{Y}})$，其中$\lambda_i(\boldsymbol{R})$表示协方差矩阵$\boldsymbol{R}$的第$i$个特征值。黎曼平均有如下性质[27]：

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{R}} \le \hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{Y}} \tag{18}$$

由于式(18)中的黎曼均值$\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{R}}$和欧氏均值$\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{Y}}$是HPD矩阵，因此根据上述假设和式(18)可得

$$\frac{\lambda_0(\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{R}})}{\sum_{i=1}^{G-1}\lambda_i(\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{R}})} \ge \frac{\lambda_0(\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{Y}})}{\sum_{i=1}^{G-1}\lambda_i(\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{Y}})} \tag{19}$$

其中，$\sum_{i=1}^{G-1}\lambda_i(\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{R}})$表示经过黎曼平均的协方差矩阵的所有特征值之和，$\sum_{i=1}^{G-1}\lambda_i(\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{Y}})$表示未经黎曼平均的协方差矩阵所有特征值之和。由式(18)可知，$\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{R}}$的特征值之和小于$\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{Y}}$的特征值之和，因此在式(19)中，左式分子所占分母的比例比右式要大。通过上述推导，证明了对接收数据进行黎曼平均处理与直接求协方差矩阵相比，目标信号子空间

相对于干扰和噪声子空间更占优势，通过黎曼平均能够有效抑制入射到阵列中的间歇性干扰信号。

3.2 扩展互质阵列下改进的SPICE算法

图1所示的扩展互质阵列的差集数组(Difference Coarray, DC)可以表示为

$$\mathbb{D}(m,n)=Mn-Nm \tag{20}$$

其中，$0\le m\le 2M-1,\ 0\le n\le N-1$。根据这个差集数组，相应的包含全部虚拟阵元的增广虚拟阵列可以表示为

$$\mathbb{S}=\{(Mn-Nm)\,d\,|0\le m\le 2M-1,0\le n\le N-1\} \tag{21}$$

上述互质阵列的虚拟等价信号可以通过对协方差矩阵$\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{R}}$向量化求得，具体形式为

$$\boldsymbol{r}=\mathrm{vec}\left(\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{R}}\right)=\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{p}+\sigma_n^2\boldsymbol{i} \tag{22}$$

其中，$\mathrm{vec}(\boldsymbol{I})$表示矩阵向量化算子，$\boldsymbol{r}\in\mathbb{C}^{G^2\times 1}$，$\hat{\boldsymbol{A}}=[\hat{\boldsymbol{a}}(\theta_1),\hat{\boldsymbol{a}}(\theta_2),\cdots,\hat{\boldsymbol{a}}(\theta_K)]\in\mathbb{C}^{G^2\times K}$表示虚拟阵列的阵列流形矩阵，其中$\hat{\boldsymbol{a}}(\theta_k)=\boldsymbol{a}^*(\theta_k)\otimes\boldsymbol{a}(\theta_k)$表示虚拟阵列的导向矢量，$\hat{\boldsymbol{a}}(\theta_k)\in\mathbb{C}^{G^2\times 1}$, $\otimes$表示Kronecker积。$\boldsymbol{p}=[p_1,p_2,\cdots,p_K]^{\mathrm{T}}$表示信源信号的信号功率，$\boldsymbol{i}=\mathrm{vec}(\boldsymbol{I})$，不难看出，向量化得到的二阶统计量与初始的阵列接收数据有着相似的信号结构，因此可以将二阶统计量视为增广虚拟阵列的等价虚拟域阵元接收信号。

上面得到的虚拟阵元接收信号在各个虚拟阵元处存在数目不等的重复元素，通常需要对这些重复元素进行处理。为提高算法效率，本文采用冗余删除法，即只选用每个虚拟阵元第1个接收信息。经过删除和排序后的虚拟等价信号$\tilde{\boldsymbol{r}}$表示为

$$\tilde{\boldsymbol{r}}=\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{p}+\sigma_n^2\tilde{\boldsymbol{i}} \tag{23}$$

其中，$\tilde{\boldsymbol{r}}\in\mathbb{C}^{(3MN-1)\times 1}$，$\tilde{\boldsymbol{A}}\in\mathbb{C}^{(3MN-1)\times K}$表示具有$3MN-1$个虚拟阵元的虚拟阵列的方向矩阵，$\tilde{\boldsymbol{i}}$表示对$\boldsymbol{i}$进行同样删除排序后的噪声向量[8]。

SPICE算法是在压缩感知框架下提出来的一种非参数化算法，这种算法在小快拍和低信噪比的背景下具有比子空间类算法更优越的性能，并且全局收敛[15]。本文将把SPICE算法引入虚拟域中来实现对目标的高效稀疏恢复。

在稀疏恢复的背景下，需要将来波方向用空间网格过完备表示，本文把空间均匀地划分成了C个空间网格，其中$C\gg K$，这组网格点对应的来波角度定义为$\boldsymbol{\Theta}=[\Theta_1,\Theta_2,\cdots,\Theta_C]$，式(9)的协方差矩阵可以重新写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}=&[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\Theta}_1),\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\Theta}_2),\cdots,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\Theta}_C)]\\&\times\begin{bmatrix}p_1&0&\cdots&0\\0&p_2&\cdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\0&\cdots&0&p_C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\Theta}_1)^{\mathrm{H}}\\\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\Theta}_2)^{\mathrm{H}}\\\vdots\\\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\Theta}_C)^{\mathrm{H}}\end{bmatrix}\\&+\begin{bmatrix}\sigma_1&0&\cdots&0\\0&\sigma_2&\cdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\0&\cdots&0&\sigma_G\end{bmatrix}\\=&\left[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\Theta}_1),\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\Theta}_2),\cdots,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\Theta}_C),\tilde{\boldsymbol{i}}\right]\\&\times\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{\mathrm{grid}}&0\\0&\boldsymbol{P}_n\end{bmatrix}\\&\times\left[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\Theta}_1),\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\Theta}_2),\cdots,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\Theta}_C),\tilde{\boldsymbol{i}}\right]^{\mathrm{H}}\triangleq\boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\end{aligned} \tag{24}$$

其中

$$\boldsymbol{B}\triangleq\left[\boldsymbol{a}(\Theta_1),\boldsymbol{a}(\Theta_2),\cdots,\boldsymbol{a}(\Theta_C),\tilde{\boldsymbol{i}}\right]\triangleq[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_{C+1}] \tag{25}$$

$$\tilde{\boldsymbol{P}}\triangleq\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{\mathrm{grid}}&0\\0&p_{C+1}\end{bmatrix}\triangleq\begin{bmatrix}p_1&0&\cdots&\cdots&0\\0&p_2&\cdots&\cdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\cdots&\vdots\\\vdots&\cdots&\cdots&p_C&0\\0&\cdots&\cdots&0&\sigma_n^2\end{bmatrix} \tag{26}$$

其中，$\boldsymbol{B}=[\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{i}}]\in\mathbb{C}^{(3MN-1)\times(C+1)}$，$\tilde{\boldsymbol{A}}=[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\Theta}_1),\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\Theta}_2),\cdots,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\Theta}_C)]\in\mathbb{C}^{(3MN-1)\times C}$表示稀疏后的虚拟阵列流形字典矩阵，在这里$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\Theta}_c)\in\mathbb{C}^{(3MN-1)\times 1}$$(c=1,2,\cdots,C)$表示第$c$个网格处的导向矢量。$p_c(c=1,2,\cdots,C+1)$定义为$\tilde{\boldsymbol{P}}$的第$c$个对角元素，其中$p_{C+1}=\sigma_n^2$表示噪声功率。

SPICE算法基于如下的协方差拟合准则[28]：

$$f\left(\boldsymbol{\Theta},\tilde{\boldsymbol{P}}\right)=\left\|\boldsymbol{R}^{-1/2}\left(\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{v}}-\boldsymbol{R}\right)\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{v}}^{-1/2}\right\|_{\mathrm{F}}^2 \tag{27}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{v}}=\tilde{\boldsymbol{r}}\tilde{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{H}}$, $\boldsymbol{R}^{-1/2}$, $\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{v}}^{-1/2}$分别是$\boldsymbol{R}^{-1}$和$\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{v}}^{-1}$的正定平方根。由于用虚拟信号求得的样本协方差矩阵是不满秩的，导致样本协方差矩阵无法求逆，把式(27)的协方差拟合准则经过调制得到

$$f\left(\boldsymbol{\Theta},\tilde{\boldsymbol{P}}\right)=\left\|\boldsymbol{R}^{-1/2}\left(\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{v}}-\boldsymbol{R}\right)\right\|_{\mathrm{F}}^2 \tag{28}$$

经过化简计算，式(28)可以表示为[15]

$$f=\mathrm{tr}\left(\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{v}}\boldsymbol{R}^{-1}\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{v}}\right)+\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{R}\right)-2G \tag{29}$$

其中

$$\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{R}\right)=\sum_{c=1}^{C+1}\left\|\boldsymbol{b}_c\right\|^2 p_c \tag{30}$$

SPICE算法通过最小化式(29)所述的协方差拟合准则可以无限接近最佳的$\{\boldsymbol{p}_c\}_{c=1}^{C}$和$\sigma_n^2$。式(30)可以用式(31)的约束极小化来代替。

$$\min_{p_c\geq 0}\mathrm{tr}\left(\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{v}}\boldsymbol{R}^{-1}\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{v}}\right)\ \text{s.t.}\ \sum_{c=1}^{C+G}\mu_c p_c=1 \tag{31}$$

其中，$\mu_c=\left\|\boldsymbol{b}_c\right\|^2/\mathrm{tr}\left(\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{v}}\right)$。$\mathrm{tr}\left(\cdot\right)$表示矩阵的迹。式(31)所示的优化问题不仅是一个凸优化问题，而且是一个半正定规划(Semi-Definite Programing, SDP)问题，但是直接对SDP问题的求解非常耗时，因此SPICE算法通过迭代的方式来寻找全局最优解。下面给出迭代公式为

$$p_c^{(i+1)}=p_c^{(i)}\frac{\left\|\boldsymbol{b}_c^{\mathrm{H}}\left[\boldsymbol{R}^{(i)}\right]^{-1}\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{v}}^{1/2}\right\|_2}{u_c^{1/2}\rho^{(i)}} \tag{32}$$

$$\sigma_n^{(i+1)}=\sigma_n^{(i)}\frac{\left\|\left[\boldsymbol{R}^{(i)}\right]^{-1}\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{v}}^{1/2}\right\|_2}{\eta^{1/2}\rho^{(i)}} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}\rho^{(i)}=&\sum_{c=1}^{C}u_c^{1/2}p_c^{(i)}\left\|\boldsymbol{b}_c^{\mathrm{H}}\left[\boldsymbol{R}^{(i)}\right]^{-1}\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{v}}^{1/2}\right\|_2\\&+\eta^{1/2}\sigma_n^{(i)}\left\|\left[\boldsymbol{R}^{(i)}\right]^{-1}\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{v}}^{1/2}\right\|_2\end{aligned} \tag{34}$$

其中，$\eta=\mu_{C+1}$，$\left\|\cdot\right\|_2$表示矩阵的2范数，$\boldsymbol{R}^{(i)}$可以由式(24)来更新，i用来表示算法的第i次迭代。

算法启动时，需要先进行初始化，p_c的初始化由式(35)给出：

$$p_c^{(0)}=\boldsymbol{b}_c^{\mathrm{H}}\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{v}}\boldsymbol{b}_c/\left\|\boldsymbol{b}_c\right\|_{\mathrm{F}}^4 \tag{35}$$

$\sigma_n^{(0)}$的初始值可用$p_c^{(0)}$的最小值来表示。经过迭代，最后的功率谱由式(36)给出：

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{S}}^{(i)}=\left[p_1^{(i)},p_2^{(i)},\cdots,p_C^{(i)}\right] \tag{36}$$

在迭代步骤中，为了防止算法一直迭代，需要设置最大迭代次数和迭代阈值，当算法在更新过程中满足迭代停止条件时，算法将停止迭代。根据文献[29]，算法的迭代阈值δ定义为

$$\delta=\left\|\boldsymbol{P}_{\mathrm{S}}^{(i)}-\boldsymbol{P}_{\mathrm{S}}^{(i-1)}\right\|_{\mathrm{F}}\Big/\left\|\boldsymbol{P}_{\mathrm{S}}^{(i)}\right\|_{\mathrm{F}} \tag{37}$$

基于以上分析，本文所提算法详细流程如算法1所示。

3.3 算法复杂度分析

如表1所示，根据上面的算法介绍和总结，本文所提算法的计算复杂度主要包括3部分：协方差矩阵求解，复杂度为$O(LG^2)$；黎曼均值求解，复杂度为$O(G^3+G^2)$；SPICE算法的更新迭代，复杂度为$O(G^3CQ+GC^2Q)$；所以本文算法的计算复杂度为：$O(G^3CQ+GC^2Q+LG^2+G^3+G^2)$，其中$L$表示快拍数，$G=2M+N-1$表示阵元个数，$C$为谱峰搜索网格数，$Q$定义为SPICE算法迭代次数($Q'\leq Q$)。表1给出了SS-MUSIC算法[8]、SS-SPICE

算法 1 基于黎曼平均的虚拟域SPICE算法

Alg. 1 A virtual domain SPICE algorithm based on Riemann averaging

输入：协方差矩阵的黎曼均值$\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{R}}$，过完备网格点$\boldsymbol{\Theta}$，迭代终止阈值$\delta_{\min}$，最大迭代次数$Q$；

输出：空间谱$\boldsymbol{P}_{\mathrm{S}}^{(i)}$

1 根据式(22)得到虚拟阵列数据$\boldsymbol{r}$并通过式(23)剔除$\boldsymbol{r}$中重复元素得到$\tilde{\boldsymbol{r}}$；

2 初始化：初始迭代次数$i=1$，初始阈值$\delta_0=1$，分别根据式(35)、式(36)、式(24)和式(34)依次初始化$p_c^{(0)}$，$\boldsymbol{P}_{\mathrm{S}}^{(i)}$，$\boldsymbol{R}$和$\rho^0$，$\sigma_n^2$初始化为$\sigma_n^2=\min\left\{p_c^{(0)}\right\}$；

3 迭代开始：根据式(32)和式(33)更新$p_c^{(i+1)}$和$\sigma_n^{(i+1)}$；

4 根据式(36)、式(24)和式(34)依次更新$\boldsymbol{P}_{\mathrm{S}}^{(i)}$，$\boldsymbol{R}^{(i)}$和$\rho^{(i)}$；

5 根据式(37)更新δ，如果$\delta>\delta_{\min}$且$i<Q$，则返回步骤3；

迭代结束

表 1 算法计算复杂度对比表

Tab. 1 Comparison table of computational complexity of algorithms

算法	复杂度
SS-MUSIC算法	$O(LG^2+2(MN+1)^3+C(MN+1)^2-CK(MN+1))$
SS-SPICE算法	$O(G^3CQ+GC^2Q+LG^2)$
SS-EQSPICE算法	$O(G^3CQ'+GC^2Q'+LG^2)$
本文所提算法	$O(G^3CQ+GC^2Q+LG^2+G^3+G^2)$

算法[30]、SS-EQSPICE算法[31]和本文所提算法4种算法的计算复杂度对比：

如表1所示，SS-SPICE算法、SS-EQSPICE算法和本文所提算法由于需要迭代，算法复杂度均高于SS-MUSIC算法。本文算法由于需要对接受数据协方差矩阵进行黎曼平均，计算复杂度略高于SS-SPICE和SS-EQSPICE这两种算法，但是由于$Q \geq Q' \gg G$，相比于SPICE算法的反复迭代和更新，求黎曼均值的复杂度并不高。因此，本文所提算法在仅增加了可忽略不计的额外计算成本的同时提升了算法的性能。

4　仿真结果与分析

本节用仿真实验来评估和验证所提算法的有效性，并与其他算法进行比较。本文采用$M=3$, $N=4$的扩展互质阵列，子阵1的位置为$[0,4,8,12,16,20]d$，子阵2的位置为$[0,3,6,9]d$。算法最大迭代次数设置为100次，迭代阈值设为1×10^{-3}，将在$-90°$到$90°$的网格空间进行稀疏重构，相邻网格间距为$1°$。在高斯白噪声下，第k个信号源的信噪比或干噪比(Interference to Noise Ratio, INR)定义为

$$\text{SNR or INR} = 10\lg\left(\frac{\mathrm{E}\left[\left|s_k(t)\right|^2\right]}{\sigma_n}\right), k=1,2,\cdots,K \tag{38}$$

4.1　空间谱分析

仿真实验1：算法空间谱图。

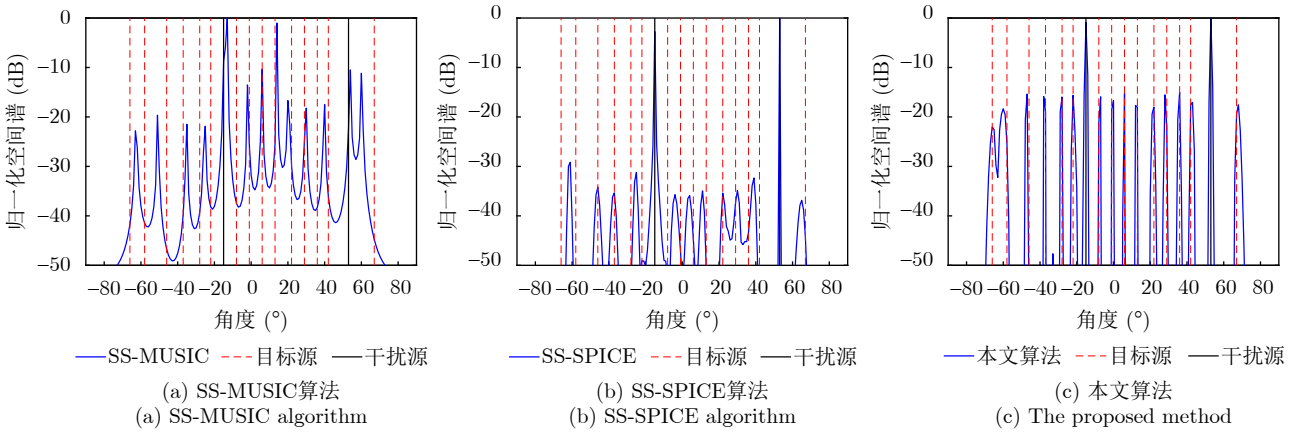
在本次仿真实验中，假设在$-70°$到$70°$的空间中有17个信号入射到阵列中，信号之间相互独立且为窄带信号，其中有2个强间歇干扰信号分别位于$-15°$和$53°$，为了方便起见，假设2个干扰源交替活动，其余信号为目标信号。信噪比SNR和干噪比INR分别为10 dB和30 dB，快拍数设置为500。图3给出了SS-MUSIC算法、SS-SPICE算法和本文所提算法3种算法的空间谱。

如图3(a)、图3(b)所示，SS-MUSIC算法和SS-SPICE算法无法估计出所有信号源的DOA而且估计不准。这是由于利用上述的扩展互质阵列得到的连续虚拟阵元分布在$-14d$到$14d$，由于空间平滑算法的局限性，只能利用连续虚拟阵元，因此只能测出14个信源，再加上强干扰信号的影响，导致算法对强干扰附近的目标信号的DOA估计几乎失效。如图3(c)所示，本文算法能够准确估计出全部信号源的DOA。这是因为本文算法通过稀疏重构充分利用了全部的虚拟阵元，所以可以在只有9个实际阵元的条件下，至多可测出17个信号源，并且由于本文算法引入了黎曼平均对强干扰进行有效抑制，因此对于在强干扰附近的目标信号也能给出精确清晰的谱峰，充分体现了本文算法在强干扰下对多目标信号DOA估计的优势。

仿真实验2：不同算法分辨性能对比。

本次实验考虑空间中存在2个弱目标信号和2个强干扰信号入射到本文采用的扩展互质阵列上，2个弱目标信号来波方向分别为$\theta_1=-15°$和$\theta_2=15°$，2个强间歇性干扰信号分别位于$\theta_3=-20°$和$\theta_4=60°$。4个远场窄带信号之间相互独立，快拍数设为200，SNR为0 dB，其余参数与实验1相同。在上述条件下，将本文算法与SS-MUSIC算法、SS-SPICE算法和SS-EQSPICE算法[28]性能进行对比。

如图4所示，各个算法对两个强干扰信号和方向为$15°$的弱目标信号均可以体现出不错的检测性能。但对于位于$-15°$的目标信号，由于其更靠近强干扰信号，受到了干扰信号很强的影响，SS-MUSIC算法对其已经失效。SS-SPICE算法虽然能



(a) SS-MUSIC算法　(b) SS-SPICE算法　(c) 本文算法
(a) SS-MUSIC algorithm　(b) SS-SPICE algorithm　(c) The proposed method

图 3 3种算法的空间谱图

Fig. 3 Spatial spectrum of the three algorithms

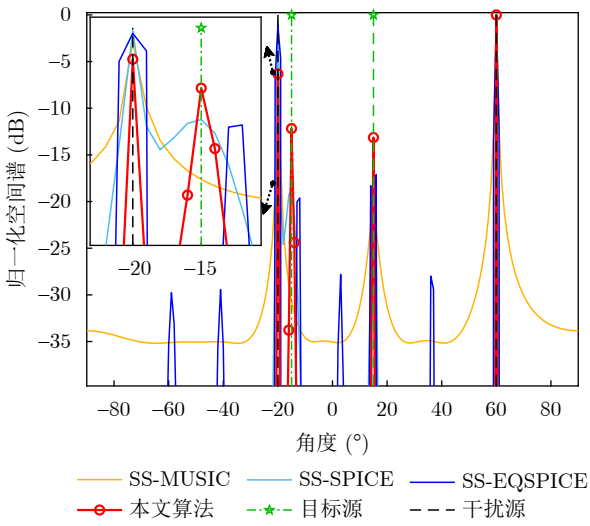


图 4 不同算法分辨性能对比

Fig. 4 Comparison of the resolution performance of different algorithms

检测出来，但谱峰很不明显。SS-EQSPICE算法虽然可以测出谱峰，但目标信号谱峰估计已出现偏离，并且还出现了很多伪峰。而本文所提算法由于引入黎曼平均对强干扰信号进行了有效抑制，因此不仅可以测出离干扰较远的目标信号，对于和强干扰信号角度差只有5°的目标信号，本文算法也能给出尖锐且准确的谱峰，实现了在强干扰情况下对目标信号的精准检测，体现了本文算法的高分辨性能。

仿真实验3：不同算法对相干信号分辨性能对比。

本实验假设空间中存在3个弱目标信号为相干信号，3个弱目标信号来波方向分别为$-10°$, $0°$和$30°$，2个强间歇性干扰信号分别位于$\theta_4=-20°$和$\theta_5=60°$，其余参数设置均与仿真实验2相同。4种算法空间谱对比如图5所示。从图5可以看出，这4种算法均能对相干目标信号进行有效估计，但由于强干扰信号旁瓣的影响，SS-MUSIC算法的空间谱中出现了一些尖锐的虚假谱峰，相比于其他算法，本文所提算法的空间谱在相干目标处的谱峰更加尖锐，峰值也更大。本次实验表明本文所提算法在信号为相干信号的情况下也具有很好的DOA估计效果。

4.2 估计精度和分辨率分析

仿真实验4：估计精度与信噪比和角度间隔的关系。

本节主要对比算法的估计精度，估计精度用均方根误差(Root Mean Squared Errors, RMSE)来衡量，其定义为

$$\mathrm{RMSE}=\sqrt{\frac{1}{KZ}\sum_{k=1}^{K}\sum_{z=1}^{Z}\left(\hat{\theta}_k^z-\theta_k^z\right)^2} \tag{39}$$

其中，k表示目标个数，$Z\in\mathbb{R}_+$表示蒙特卡罗实验次数，$\hat{\theta}_k^z$表示第z次蒙特卡罗实验中第k个目标信号DOA估计值，θ_k^z表示对应的第k个信号真实值。在实验中假设目标个数已知并选取最大的k个谱峰的位置作为DOA估计。

本次实验所选取的目标来波方向和其余参数与实验2一致。图6(a)表示快拍数为100的情况下，上述4种算法的DOA估计RMSE随信噪比的变化曲线。其中信噪比范围取为–20 dB到10 dB，间隔为5 dB。每个信噪比下的蒙特卡罗实验次数Z取300次。图6(b)表示在SNR=0 dB并且快拍数为100的条件下，4种算法的DOA估计RMSE随角度间隔的变化曲线。其中，保持其他信源来波方向不变，θ_1变化范围为$-18°\sim-8°$，步长为$1°$。

根据图6(a)可以看出，随着信噪比的增大，4种算法估计精度都逐渐增加。然而，受限于子空间算法的固有缺陷，SS-MUSIC算法在低信噪比下的估计精度表现一般。SS-SPICE算法具有全局收敛的特点，在低信噪比下也能表现良好，但强干扰信号的存在对其估计精度造成很大影响，SS-EQSPICE算法也不例外。相比之下，本文所提算法在低信噪比下效果最好。如图6(b)可以看出，在强弱信号角度间隔大于6°时，所有算法的估计精度都很好，但当角度间隔越近，弱目标信号受强干扰信号的影响就越强，估计精度越低。相比而言，本文算法在强弱信号间隔较近时表现最好。

仿真实验5：分辨率与信噪比和角度间隔的关系。

本文采用成功检测概率来衡量算法对信号的分辨性能。在这里定义当$\left|\hat{\theta}_k-\theta_k\right|<3°$时，目标分辨

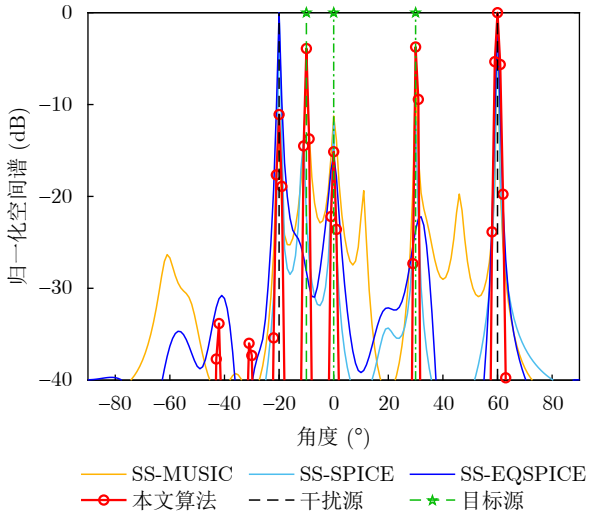


图 5 不同算法下相干信号空间谱对比

Fig. 5 Comparison of spatial spectrum of coherent signals under different algorithms

成功。图7(a)表示快拍数为100时4种算法成功检测概率随信噪比的变化。和实验4一样，信噪比变化范围设置为–20～10 dB。图7(b)表示当SNR=0 dB并且快拍数为100的条件下，4种算法的成功检测概率随角度间隔的变化曲线。

从图7(a)可以看出，随着信噪比的增大，各个算法的成功检测概率都有所提高，而本文算法的表现要优于其他几种算法，特别是在低信噪比下，仍有着比其他算法更高的成功检测率。由图7(b)可知，随着强弱信号角度间隔增大，所有算法都能得到不错的成功分辨率。在同一角度间隔下，本文所提算法对DOA估计的成功分辨率更高，进一步表明了所提算法的有效性。

仿真实验6：快拍数与算法估计精度和分辨率的关系。

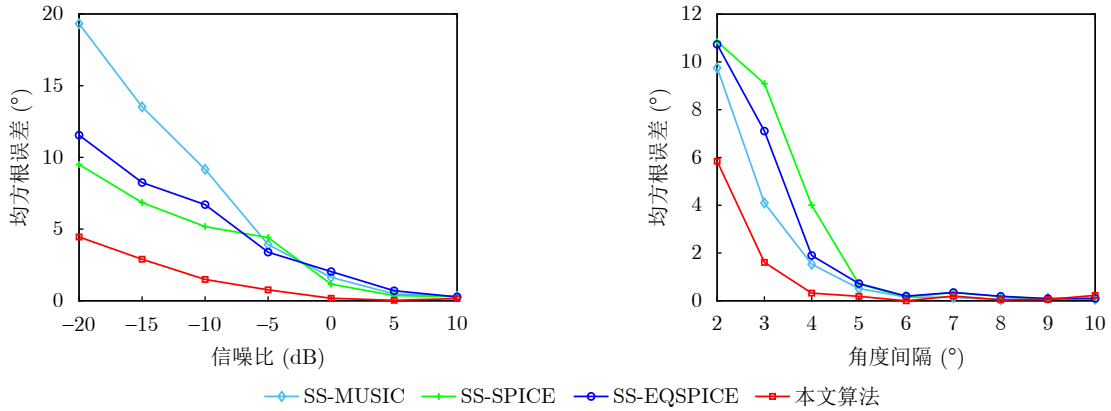
为了探究快拍数对算法估计精度和分辨率的影响，本次实验所选取的目标来波方向和其余参数与实验2一致，信噪比SNR和干噪比INR分别为0 dB和30 dB，快拍数的变化范围在20～200。图8(a)展示了4种算法均方根误差随快拍数的变化关系，图8(b)展示了4种算法成功检测概率随快拍数的变化关系。从图8(a)和图8(b)可以看出，算法估计精度和成功检测概率都会受到快拍数的影响，随着快拍数的增加，4种算法的估计精度和相邻信号成功检测概率均得到了提升，本文所提算法相比于其他算法具有更高的估计精度和成功检测概率，这就证明了所提算法在较低快拍数下的有效性能。

仿真实验7：幅相误差下算法的估计精度分析。

在现实情况下，互质阵列中幅相误差的存在不容忽视[32]。幅相误差会影响到阵列接收信号的导向矢量，可以表示为

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathrm{diag}\left[\eta_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_1}, \eta_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_2}, \cdots, \eta_G \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_G}\right] \tag{40}$$

其中，η_g为第g个阵元处的幅度误差，ϕ_g为第g个阵

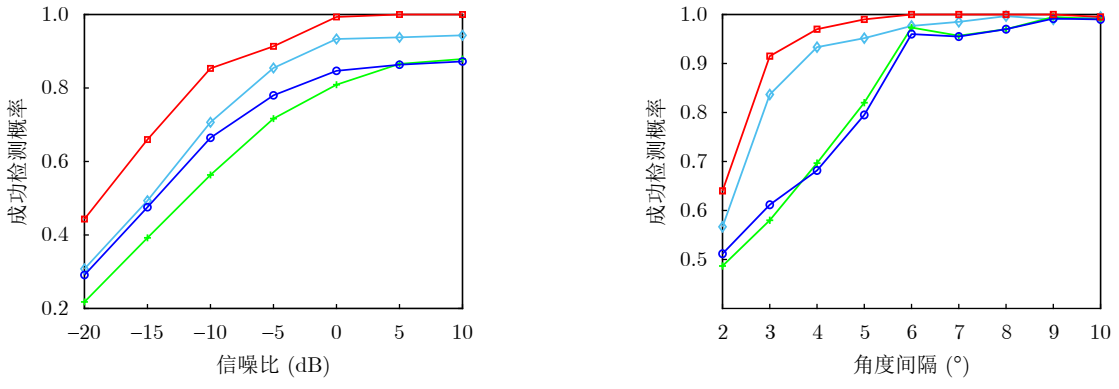


(a) DOA估计精度随信噪比变化曲线　(b) DOA估计精度随角度间隔变化曲线

(a) Curve of DOA estimation accuracy with SNR　(b) Curve of DOA estimation accuracy versus angular interval

图 6 不同参数条件下的DOA估计精度

Fig. 6 Accuracy of DOA estimation under different parameter conditions



(a) DOA估计成功检测率随信噪比变化曲线　(b) DOA估计成功检测率随角度间隔变化曲线

(a) Curve of DOA estimation successful resolution with SNR　(b) Curve of DOA estimated successful resolution with angle interval

图 7 不同参数条件下的成功检测概率

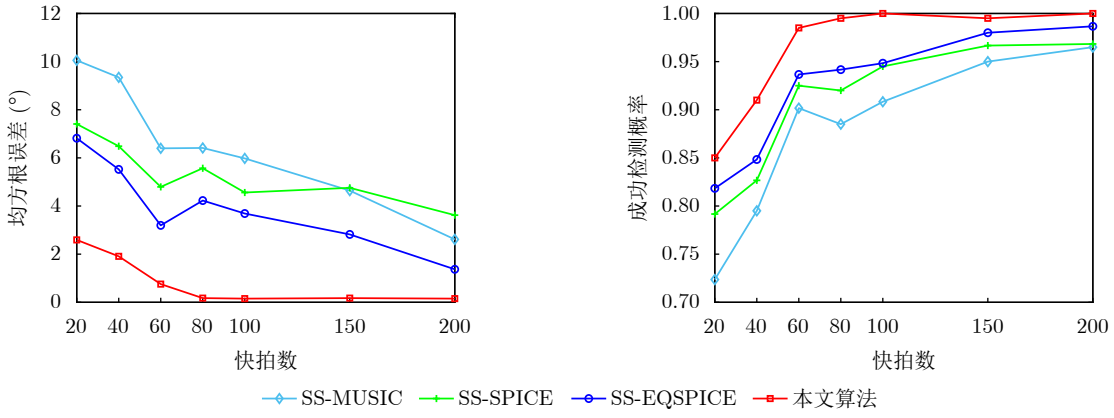
Fig. 7 Successful resolution under different parameter conditions

元处的幅度误差。假设幅度误差和相位误差均满足均匀分布，幅度误差为$U_\eta=[-0.1,0.1]$，相位误差为$U_\phi=[-10^\circ,10^\circ]$。

本实验假设空间中存在1个弱目标信号和2个强干扰信号，弱目标信号位于$\theta_1=-15^\circ$，2个强间歇性干扰信号分别位于$\theta_2=-20^\circ$和$\theta_3=60^\circ$，干噪比INR为30 dB。图9(a)展示了本文所提算法分别在理想情况以及存在幅相误差的条件下，DOA估计均方根误差(RMSE)随信噪比的变化曲线。信噪比的取值范围设定为–10～20 dB，间隔为5 dB，同时快拍数取为100。图9(b)表示本文所提算法分别在理想情况以及存在幅相误差的条件下，DOA估计均方根误差(RMSE)随快拍数的变化曲线。快拍数的变化范围在50～600，同时SNR=0 dB。从图9(a)和图9(b)可以明显看出，本文所提算法的估计精度会受到通道幅相误差的影响，尤其是在低信噪比和较低快拍数下，幅相误差的存在导致算法估计精度显著下降。鉴于此，如何在存在阵列通道幅相误差的情况下，提高本文所提算法的DOA估计性能，将会成为下一步研究的重点方向。

5 结语

本文针对雷达易受到强干扰信号影响的问题，结合黎曼平均特性和压缩感知方法，提出了一种强间歇干扰下基于黎曼平均的稀疏DOA估计方法。首先，在扩展互质阵列接收数据模型下，利用目标信号持续活动而强干扰信号间歇活动的特性，引入黎曼平均对干扰信号进行抑制；然后，将经过处理的数据协方差矩阵向量化，得到虚拟阵列接收数据；最后，在虚拟域中运用SPICE算法对稀疏信号进行重构，得到目标信号的DOA估计。在抑制强干扰的同时，还能在目标个数大于阵元数的情况下实现对多目标信号的准确估计。仿真结果表明，相比于其他算法，本文算法在少量阵元的情况下具有

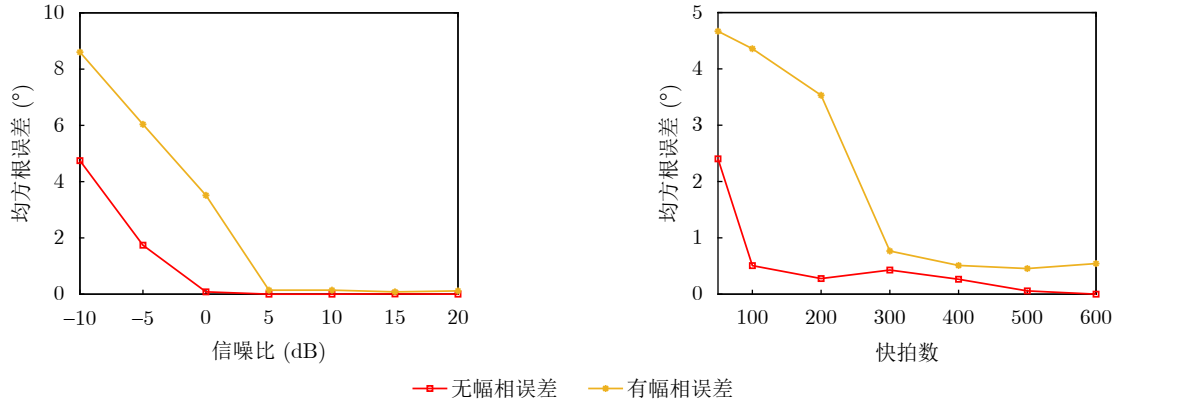


(a) DOA估计精度随快拍数变化曲线
(a) Curve of DOA estimation accuracy with snap number

(b) DOA估计成功检测概率率随快拍数变化曲线
(b) Curve of DOA estimated successful resolution with snap number

图 8 算法估计精度和分辨率随快拍数的变化

Fig. 8 Algorithmic estimation of accuracy and resolution as a function of number of snapshots



(a) DOA估计精度随信噪比变化曲线
(a) Curve of DOA estimation accuracy with SNR

(b) DOA估计精度随快拍数变化曲线
(b) Curve of DOA estimation accuracy with snap number

图 9 所提算法在不同参数条件下的DOA估计精度

Fig. 9 Accuracy of DOA estimation of the proposed algorithm under different parameter conditions

更高的DOA估计精度；且能够在弱目标信号离强干扰信号相近时，准确估计出目标信号波达方向。

利益冲突 所有作者均声明不存在利益冲突

Conflict of Interests The authors declare that there is no conflict of interests

参 考 文 献

[1] MERKOFER J P, REVACH G, SHLEZINGER N, *et al*. DA-MUSIC: Data-driven DOA estimation via deep augmented MUSIC algorithm[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2024, 73(2): 2771–2785. doi: 10.1109/TVT.2023.3320360.

[2] MAO Zihuan, LIU Shengheng, ZHANG Y D, *et al*. Joint DoA-range estimation using space-frequency virtual difference coarray[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2022, 70: 2576–2592. doi: 10.1109/TSP.2022.3173150.

[3] CHEN Feng, YANG Desen, and MO Shiqi. A DOA estimation algorithm based on eigenvalues ranking problem[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2023, 72: 9501315. doi: 10.1109/TIM.2022.3232095.

[4] OSMAN A, MOUSSA M M E, TAMAZIN M, *et al*. DOA elevation and azimuth angles estimation of GPS jamming signals using fast orthogonal search[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2020, 56(5): 3812–3821. doi: 10.1109/TAES.2020.2988424.

[5] MOFFET A. Minimum-redundancy linear arrays[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1968, 16(2): 172–175. doi: 10.1109/TAP.1968.1139138.

[6] PAL P and VAIDYANATHAN P P. Nested arrays: A novel approach to array processing with enhanced degrees of freedom[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(8): 4167–4181. doi: 10.1109/TSP.2010.2049264.

[7] 周成伟, 郑航, 顾宇杰, 等. 互质阵列信号处理研究进展: 波达方向估计与自适应波束成形[J]. 雷达学报, 2019, 8(5): 558–577. doi: 10.12000/JR19068.
ZHOU Chengwei, ZHENG Hang, GU Yujie, *et al*. Research progress on coprime array signal processing: Direction-of-arrival estimation and adaptive beamforming[J]. *Journal of Radars*, 2019, 8(5): 558–577. doi: 10.12000/JR19068.

[8] QIN Si, ZHANG Y D, and AMIN M G. Generalized coprime array configurations for direction-of-arrival estimation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(6): 1377–1390. doi: 10.1109/TSP.2015.2393838.

[9] 陈小龙, 关键, 何友, 等. 高分辨稀疏表示及其在雷达动目标检测中的应用[J]. 雷达学报, 2017, 6(3): 239–251. doi: 10.12000/JR16110.
CHEN Xiaolong, GUAN Jian, HE You, *et al*. High-resolution sparse representation and its applications in radar moving target detection[J]. *Journal of Radars*, 2017, 6(3): 239–251. doi: 10.12000/JR16110.

[10] 陈辉, 苏海军. 强干扰/信号背景下的DOA估计新方法[J]. 电子学报, 2006, 34(3): 530–534. doi: 10.3321/j.issn:0372-2112.2006.03.033.
CHEN Hui and SU Haijun. A new approach to estimate DOA in presence of strong jamming/signal suppression[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2006, 34(3): 530–534. doi: 10.3321/j.issn:0372-2112.2006.03.033.

[11] 张静, 廖桂生, 张洁. 强信号背景下基于噪声子空间扩充的弱信号DOA估计方法[J]. 系统工程与电子技术, 2009, 31(6): 1279–1283. doi: 10.3321/j.issn:1001-506X.2009.06.003.
ZHANG Jing, LIAO Guisheng, and ZHANG Jie. DOA estimation based on extended noise subspace in the presence of strong signals[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2009, 31(6): 1279–1283. doi: 10.3321/j.issn:1001-506X.2009.06.003.

[12] LIN Bin, HU Guoping, ZHOU Hao, *et al*. Coherent signal DOA estimation for MIMO radar under composite background of strong interference and non-uniform noise[J]. *Sensors*, 2022, 22(24): 9833. doi: 10.3390/s22249833.

[13] 夏楠, 马昕昕, 王思琦. 强干扰下基于三阶互累积量的FMCW雷达信号DOA估计算法[J]. 电子学报, 2024, 52(2): 510–517. doi: 10.12263/DZXB.20230258.
XIA Nan, MA Xinxin, and WANG Siqi. FMCW radar signal DOA estimation method based on the third-order cross cumulant under high interference[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2024, 52(2): 510–517. doi: 10.12263/DZXB.20230258.

[14] FANG Qingyuan, JIN Mengzhe, LIU Weidong, *et al*. DOA estimation for sources with large power differences[J]. *International Journal of Antennas and Propagation*, 2021, 2021: 8862789. doi: 10.1155/2021/8862789.

[15] STOICA P, BABU P, and LI Jian. SPICE: A sparse covariance-based estimation method for array processing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(2): 629–638. doi: 10.1109/TSP.2010.2090525.

[16] 张赫, 陈华伟. 一种强干扰环境下的离格稀疏贝叶斯DOA估计方法[J]. 数据采集与处理, 2019, 34(6): 1019–1029. doi: 10.16337/j.1004-9037.2019.06.008.
ZHANG He and CHEN Huawei. Off-grid sparse Bayesian DOA estimation method in strong interference environment[J]. *Journal of Data Acquisition & Processing*, 2019, 34(6): 1019–1029. doi: 10.16337/j.1004-9037.2019.06.008.

[17] GENG Jiwen, YU Ze, and LI Chunsheng. Synthetic aperture radar increment imaging based on compressed sensing[J]. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2022, 19: 4013705. doi: 10.1109/LGRS.2021.3076451.

[18] ZUO Ming and XIE Shuguo. A novel DOA estimation

method for an antenna array under strong interference[J]. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2022, 2022(1): 111. doi: 10.1186/s13634-022-00930-y.

[19] LI Chenmu, LIANG Guolong, QIU Longhao, *et al*. An efficient sparse method for direction-of-arrival estimation in the presence of strong interference[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2023, 153(2): 1257–1271. doi: 10.1121/10.0017256.

[20] BESSON O, STOICA P, and KAMIYA Y. Direction finding in the presence of an intermittent interference[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, 50(7): 1554–1564. doi: 10.1109/TSP.2002.1011196.

[21] 王解, 刘文祥, 陈飞强, 等. 分布式间歇干扰下基于SMI的GNSS空时自适应处理器性能分析[J]. 国防科技大学学报, 2023, 45(6): 90–99. doi: 10.11887/j.cn.202306013.
WANG Jie, LIU Wenxiang, CHEN Feiqiang, *et al*. Performance analysis of SMI based GNSS space-time adaptive processing under distributed intermittent interferences[J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2023, 45(6): 90–99. doi: 10.11887/j.cn.202306013.

[22] AKDEMIR Ş B and CANDAN Ç. Maximum-likelihood direction of arrival estimation under intermittent jamming[J]. *Digital Signal Processing*, 2021, 113: 103028. doi: 10.1016/j.dsp.2021.103028.

[23] BAR A and TALMON R. On interference-rejection using riemannian geometry for direction of arrival estimation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2024, 72: 260–274. doi: 10.1109/TSP.2023.3322779.

[24] HIAI F and PETZ D. Riemannian metrics on positive definite matrices related to means[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2009, 430(11/12): 3105–3130. doi: 10.1016/j.laa.2009.01.025.

[25] BARACHANT A, BONNET S, CONGEDO M, *et al*. Classification of covariance matrices using a Riemannian-based kernel for BCI applications[J]. *Neurocomputing*, 2013, 112: 172–178. doi: 10.1016/j.neucom.2012.12.039.

[26] LI Yongtao, GU Xianming, and ZHAO Jianxing. The weighted arithmetic mean–geometric mean inequality is equivalent to the hölder inequality[J]. *Symmetry*, 2018, 10(9): 380. doi: 10.3390/sym10090380.

[27] LIM Y and PÁLFIA M. Matrix power means and the Karcher mean[J]. *Journal of Functional Analysis*, 2012, 262(4): 1498–1514. doi: 10.1016/j.jfa.2011.11.012.

[28] YANG Zai, XIE Lihua, and ZHANG Cishen. A discretization-free sparse and parametric approach for linear array signal processing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(19): 4959–4973. doi: 10.1109/TSP.2014.2339792.

[29] CHEN Peng, CAO Zhenxin, CHEN Zhimin, *et al*. Off-grid DOA estimation using sparse Bayesian learning in MIMO radar with unknown mutual coupling[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2019, 67(1): 208–220. doi: 10.1109/TSP.2018.2881663.

[30] DONG Feibiao, JIANG Ye, LIU Jian, *et al*. Experimental study on the performance of DOA estimation algorithm using a coprime acoustic sensor array without a *priori* knowledge of the source number[J]. *Applied Acoustics*, 2022, 186: 108502. doi: 10.1016/j.apacoust.2021.108502.

[31] LIU Lutao, XIAO Yue, and WU Yanan. An iterative Lq-norm based optimization algorithm for generalized SPICE[J]. *Digital Signal Processing*, 2022, 123: 103389. doi: 10.1016/j.dsp.2022.103389.

[32] 孙兵, 阮怀林, 吴晨曦, 等. 幅度相位误差条件下的互质阵列DOA估计方法[J]. 系统工程与电子技术, 2021, 43(12): 3488–3494. doi: 10.12305/j.issn.1001-506X.2021.12.09.
SUN Bing, RUAN Huailin, WU Chenxi, *et al*. DOA estimation method for coprime array under gain and phase error[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2021, 43(12): 3488–3494. doi: 10.12305/j.issn.1001-506X.2021.12.09.

作 者 简 介

蓝晓宇，博士，副教授，主要研究方向为雷达阵列信号处理。

胡吉彦，硕士生，主要研究方向为雷达阵列信号处理。

梁明珅，博士，讲师，主要研究方向为雷达阵列信号处理。

马 爽，博士，副教授，主要研究方向为阵列天线设计，阵列信号处理。

(责任编辑：于青)