中国科学(E 辑)
第 32 卷 第 1 期　SCIENCE IN CHINA (Series E)　2002 年 2 月

形式系统 $\mathscr{L}^*$ 的完备性及其应用*

裴道武
(四川大学数学学院,成都 610064)

王国俊
(陕西师范大学数学研究所,西安 710062)

摘要　研究了 R_0 代数类的性质与结构,并用这些结果证明了 R_0 区间[0,1]上的每个重言式在任一 R_0 代数上仍是重言式,进而基于 $\mathscr{L}^*$-Lindenbaum 代数的特殊结构证明了系统 $\mathscr{L}^*$ 的完备性与强完备性. 还讨论了形式系统 $\mathscr{L}^*$ 在模糊推理中的应用,所得结果和例子表明系统 $\mathscr{L}^*$ 优于其他一些常用的模糊逻辑系统.

关键词　模糊逻辑　形式系统 $\mathscr{L}^*$　R_0 代数　完备性　模糊推理　三 I 算法

自从 Zadeh[1] 于 1965 年建立了模糊集理论以后,一种初始形态的模糊逻辑[2]也被提出,并随即引起了广泛的关注,并被许多学者成功地应用于模糊控制领域. 然而,模糊逻辑的理论远不完善,模糊推理的方法还没有严格的逻辑基础,这表现于多年来模糊逻辑与模糊推理一直未能很好地结合上,这种状况既限制了模糊逻辑的进一步发展,又不可避免地会受到怀疑与批评[3].

近年来,对模糊逻辑与模糊推理进行结合研究方面已取得了若干有意义的成果[3~14]. 1997 年,一种新的模糊命题逻辑的形式演绎系统 $\mathscr{L}^*$ 被建立[6];1998 年,模糊逻辑中的广义重言式理论被提出[7];1999 年,模糊推理的全蕴涵三 I 方法问世[8],这种方法有效地弥补了模糊控制中通用的合成推理方法(CRI)的不足,并可基于部分赋值方法为模糊推理从语义上奠定一种逻辑基础[10,11].

系统 $\mathscr{L}^*$ 的完备性问题一直是未解决的问题[10,11],而完备性对于一个形式系统来说至关重要,因为它反映了一个系统在语法与语义两个方面的和谐性. 正是有了这种和谐性,经典逻辑系统才成为数学、计算机科学以及其他学科严格的逻辑基础. 同样地,这种和谐性也是非经典逻辑形式系统研究所追求的目标. 长期以来,许多学者就此进行了坚持不懈的研究,并取得了一系列重要的研究成果. 对 Lukasiewicz 公理系统完备性的研究就持续了大半个世纪[15,16]. 有些研究则持续的时间更长,如追求 IPC 完备语义的工作至今仍未结束,不过已取得了一些有意义的副产品,如 Gödel 逻辑形式系统的完备性等[15]. 另一方面,系统 $\mathscr{L}^*$ 的完备性问题也直接关系到能否在系统 $\mathscr{L}^*$ 的框架中为模糊推理从语构上奠定严格的逻辑基础. 因此,研究和解决形式系统 $\mathscr{L}^*$ 的完备性问题是十分必要的,这也正是本文的目的.

1　形式系统 $\mathscr{L}^*$ 的构成及主要定理

首先给出系统 $\mathscr{L}^*$ 的形式结构.

2001-02-28 收稿
* 国家自然科学基金重点资助项目(批准号: 19831040)

定义 1[11]　形式系统 $\mathscr{L}^*$ 由以下几部分构成：

(ⅰ) 公式集 $F(S)$.

$S=\{p_1,p_2,\cdots\}$为原子公式集，$F(S)$是由 S 生成的$(\neg,\vee,\rightarrow)$型自由代数，其中 $\neg$(非)为一元联结词，$\vee$(析取)和$\rightarrow$(蕴涵)为二元联结词.

在 $F(S)$中，我们还采用习惯上的括号省略的规定和以下的简写记号 $\wedge$(合取)与$\leftrightarrow$(等价)，$\otimes$(圈乘)以及关于圈乘运算的幂运算：

$$A\wedge B=\neg(\neg A\vee\neg B),\qquad A\leftrightarrow B=(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A),$$
$$A\otimes B=\neg(A\rightarrow\neg B),\qquad A^1=A,\qquad A^{k+1}=A^k\otimes A,\qquad k\in\mathbb{N}.$$

(ⅱ) 公理集 $\mathrm{Axm}(\mathscr{L}^*)$. $\mathrm{Axm}(\mathscr{L}^*)$由以下形式的公式组成：

(L^*1)　$A\rightarrow(B\rightarrow A)$,

(L^*2)　$(\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow(B\rightarrow A)$,

(L^*3)　$(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow(B\rightarrow(A\rightarrow C))$,

(L^*4)　$(B\rightarrow C)\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$,

(L^*5)　$A\rightarrow\neg\neg A$,

(L^*6)　$A\rightarrow A\vee B$,

(L^*7)　$A\vee B\rightarrow B\vee A$,

(L^*8)　$(A\rightarrow C)\wedge(B\rightarrow C)\rightarrow(A\vee B\rightarrow C)$,

(L^*9)　$(A\wedge B\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow C)\vee(B\rightarrow C)$,

(L^*10)　$(A\rightarrow B)\vee((A\rightarrow B)\rightarrow\neg A\vee B)$,

(L^*11)　$A\rightarrow(B\rightarrow A\wedge B)$,

(L^*12)　$(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow B\wedge C)$.

(ⅲ) 推理规则 MP. MP 指分离规则：由 A 和$A\rightarrow B$ 推得B.

可采用通常的做法，在系统 $\mathscr{L}^*$ 中引入证明、定理、从公式集 Γ 出发的推演以及Γ-推论等概念，分别使用记号$\vdash A$ 和$\Gamma\vdash A$ 表示公式A 为系统 $\mathscr{L}^*$ 的定理及 Γ-推论，并约定

$$\mathrm{Thm}(\mathscr{L}^*)=\{A\in F(S)\mid\ \vdash A\};\qquad \mathrm{Ded}(\Gamma)=\{A\in F(S)\mid\Gamma\vdash A\}.$$

注 1　本文定义 1 建立的形式系统 $\mathscr{L}^*$ 与文献[11]中相应的系统(称之为原系统)略有不同，新系统中增加了两条公理(L^*11,L^*12)，并省略了交推理规则. 通过以下的命题 1 和 3 可知，这两个系统是等价的，即它们具有相同的定理集，因此，为简便计，我们仍用记号 $\mathscr{L}^*$ 表示新系统.

可以证明以下命题成立：

命题 1　在新系统 $\mathscr{L}^*$ 中，交推理规则(Ⅱ)和三段论推理规则(HS)都成立，即

$$\{A\rightarrow B,A\rightarrow C\}\vdash A\rightarrow B\wedge C,\qquad\{A\rightarrow B,B\rightarrow C\}\vdash A\rightarrow C.$$

由命题 1 知，原系统中的定理在新系统中仍是定理.

命题 2[6,10,11]　以下形式的公式都是原系统的定理，因而也都是新系统 $\mathscr{L}^*$ 的定理：

(D1)　$A\rightarrow A$,

(D2)　$A\leftrightarrow\neg\neg A$,

(D3)　$(\neg A\rightarrow\neg B)\leftrightarrow(B\rightarrow A)$,

(D4)　$A\wedge B\rightarrow A$, $A\wedge B\rightarrow B$,

(D5)　$A\wedge B\rightarrow B\wedge A$,

(D6)　$\neg(A\vee B)\leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$, $\neg(A\wedge B)\leftrightarrow\neg A\vee\neg B$,

(D7)　$A\vee A\leftrightarrow A$, $A\wedge A\leftrightarrow A$,

(D8)　$A\vee(B\vee C)\leftrightarrow(A\vee B)\vee C$, $A\wedge(B\wedge C)\leftrightarrow(A\wedge B)\wedge C$,

(D9)　$A\wedge(B\vee C)\leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$, $A\vee(B\wedge C)\leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$,

(D10)　$(A\rightarrow C)\wedge(B\rightarrow C)\leftrightarrow(A\vee B\rightarrow C)$, $(A\rightarrow C)\vee(B\rightarrow C)\leftrightarrow(A\wedge B\rightarrow C)$, (D11) $(A\to B)\wedge(A\to C)\leftrightarrow(A\to B\wedge C)$, $(A\to B)\vee(A\to C)\leftrightarrow(A\to B\vee C)$,

(D12) $(A\to\neg B)\leftrightarrow(B\to\neg A)$, $(\neg A\to B)\leftrightarrow(\neg B\to A)$,

(D13) $\neg A\to(A\to B)$,

(D14) $(A\to B)\vee(B\to A)$,

(D15) $A\wedge\neg A\to B\vee\neg B$.

命题 3 在原系统中，$\vdash L^*11$，$\vdash L^*12$.

定义 2[6] $F(S)$上的二元关系称为～可证等价关系，这里

$$A\sim B \quad 当且仅当 \quad \vdash A\to B \quad 且 \quad \vdash B\to A.$$

容易证明，关系～是 $F(S)$上的同余关系.

2 R_0 代数的性质与结构

在文献[6,7,10,11]中，将系统 $\mathscr{L}^*$ 的语义取为全体从 $F(S)$到$[0,1]$的$(\neg,\vee,\to)$型代数同态（赋值）之集 Ω. 为了证明系统 $\mathscr{L}^*$ 关于语义 Ω 的完备性，将相应的语义概念推广到一般的 R_0 代数上.

定义 3[11] 设 M 是$(\neg,\vee,\to)$型代数，$|M|\geqslant 2$. 如果 M 上存在偏序$\leqslant$，使得$(M,\leqslant)$是有界分配格，$\vee$是关于$\leqslant$的上确界运算，$\neg$是关于$\leqslant$的逆序对合对应，且以下条件成立，则称 M 为 R_0 代数：

(R1) $\neg a\to\neg b=b\to a$,

(R2) $1\to a=a$,

(R3) $(b\to c)\vee((a\to b)\to(a\to c))=(a\to b)\to(a\to c)$,

(R4) $a\to(b\to c)=b\to(a\to c)$,

(R5) $a\to b\vee c=(a\to b)\vee(a\to c)$,

(R6) $(a\to b)\vee((a\to b)\to\neg a\vee b)=1$.

如果 M 还是一个链，则称 M 为 R_0 链. 全体 R_0 代数之集记为 $\mathscr{R}_0$. 全体 R_0 链之集记为 $\mathscr{R}_0^c$. 作为代数系统，可以自然地引入子 R_0 代数，R_0 代数同态，同态像，R_0 代数同构以及 R_0 代数族的直积等概念[11]. 以下例子给出了两个重要的 R_0 代数.

例 1[6,10,11] 区间$[0,1]$关于以下的运算$\neg,\vee,\to$构成 R_0 代数，这个 R_0 代数叫 R_0 区间，简记为$[0,1]$，

$$\neg a=1-a,\qquad a\vee b=\max(a,b),$$

$$a\to b=R_0(a,b)，即当\ a\leqslant b\ 时\ a\to b=1，否则\ a\to b=\neg a\vee b. \tag{1}$$

其中的算子 $R_0:[0,1]^2\to[0,1]$叫 R_0 蕴涵算子，具有许多优良的性质.

例 2[6,10,11] 系统 $\mathscr{L}^*$ 的公式集 $F(S)$关于可证等价关系～的商代数$[F]=F(S)/\sim=\{[A]\mid A\in F(S)\}$关于以下的序关系构成 R_0 代数，这个代数又称为 $\mathscr{L}^*$-Lindenbaum 代数：

$$[A]\leqslant[B] \qquad 当且仅当 \qquad \vdash A\to B.$$

可以证明以下结论成立.

定理 1 设 M 是有界分配格，$\neg$是 M 上的一元运算，$\to$是 M 上的二元运算，则 M 成为 R_0 代数的充要条件是 R1～R7 成立，其中

(R7)　$\neg a = a \to 0$.

因此，全体 R_0 代数之集 R_0 构成一个代数簇，即一个等式代数类，这个代数类由有界分配格的等式集加上(R1)～(R7)所确定．因此，$\mathscr{R}_0$ 关于子代数、同态像以及直积封闭[17]．

以下两个命题列出了 R_0 代数的主要性质：

命题 4　若 $M \in \mathscr{R}_0$，则 $\forall a, b, c \in M$，

(P1)　$a \leqslant b$　当且仅当　$a \to b = 1$，

(P2)　$a \to b \wedge c = (a \to b) \wedge (a \to c)$，

(P3)　$b \leqslant a \to c$　当且仅当　$a \leqslant b \to c$，

(P4)　当 $b \leqslant c$ 时，$a \to b \leqslant a \to c$，

(P5)　当 $a \leqslant b$ 时，$b \to c \leqslant a \to c$，

(P6)　$a \to (b \to a) = 1$，

(P7)　$\neg a \to (a \to b) = 1$，

(P8)　$a \vee b \to c = (a \to c) \wedge (b \to c)$，
$a \wedge b \to c = (a \to c) \vee (b \to c)$，

(P9)　$(a \to b) \vee (b \to a) = 1$，

(P10)　$\neg a \vee b \leqslant a \to b$，

(P11)　$a \wedge \neg a \leqslant b \vee \neg b$.

命题 5　设 $M \in \mathscr{R}_0$，定义 $\otimes: M^2 \to M$ 如下：

$$a \otimes b = \neg(a \to \neg b), \quad a, b \in M. \tag{2}$$

那么，$\forall a, b, c \in M$，

(P12)　当 $a \leqslant b$ 时，　$a \otimes c \leqslant b \otimes c$，

(P13)　$(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$，

(P14)　$a \otimes b = b \otimes a$，

(P15)　$1 \otimes a = a$，

(P16)　$a \otimes b \leqslant c$ 当且仅当 $a \leqslant b \to c$，

(P17)　$a \to (b \to a \otimes b) = 1$，

(P18)　$a \otimes \neg a = 0$，

(P19)　$a \otimes b \leqslant a \wedge b$，

(P20)　$a \otimes b \to c = a \to (b \to c)$，

(P21)　$a \to (a \to \neg a) = a \to \neg a$，

(P22)　$a^n = a^2$，$\forall n \geqslant 2$，

(P23)　$(a \vee b)^n = a^n \vee b^n, n \in \mathbb{N}$，

其中，a^n 归纳地定义为：$a^1 = a$，$a^{k+1} = a^k \otimes a$，$k \in \mathbb{N}$.

限于篇幅，将以上两个命题的证明略去．

推论　设 $M \in \mathscr{R}_0$，则 $(M, \otimes, \to)$ 是剩余格[12～14]．

设 L 是格，F 是 L 的非空子集．F 称为 L 的滤子[17]，如果 F 关于 $\wedge$ 封闭，且 F 是上集，即当 $x \leqslant y$ 且 $x \in F$ 时，有 $y \in F$.

在 R_0 代数中，引入 MP 滤子的概念如下：

定义 4　设 $M \in \mathscr{R}_0$，$\varnothing \neq F \subseteq M$.

(ⅰ) 如果 $1 \in F$，且当 $a, a \to b \in F$ 时有 $b \in F$，则称 F 是 M 的 MP 滤子．

(ⅱ) 如果 F 是 M 的 MP 滤子，且 $\forall a, b \in M$，有 $a \to b \in F$，或 $b \to a \in F$，则称 F 为 M 的素 MP 滤子．

以下命题给出了 MP 滤子的一个等价条件：

命题 6　设 $M \in \mathscr{R}_0$，$\varnothing \neq F \subseteq M$．则 F 是 M 的 MP 滤子的充要条件是：

(ⅰ) F 是上集，(ⅱ) F 关于 $\otimes$ 封闭．

事实上，由(P1)及(P17)知必要性成立，充分性可由不等式 $a \otimes (a \to b) \leqslant b$ 得到，而这个不等式可由(P16)导出．

命题 7　设 $M \in \mathscr{R}_0$．如果 F 是 M 的 MP 滤子，则 F 是 M 的滤子．

事实上，由命题 6 以及 R_0 代数的性质(P19)可知此命题成立．

值得注意的是,命题7的逆命题不成立. 例如,在 R_0 区间[0,1]中,$F=[0.5,1]$是[0,1]的滤子,但不是[0,1]的 MP 滤子,因为 $0.5\otimes 0.5=0\notin F$. 这表明,在滤子与 MP 滤子之间加以区别是必要的,这也正是添加前缀“MP”的原因.

以下命题给出了 MP 滤子是素 MP 滤子的条件:

命题8 设 F 是 R_0 代数 M 的 MP 滤子,则 F 是 M 的素 MP 滤子的充要条件是当 $a\vee b\in F$ 时有 $a\in F$ 或 $b\in F$.

命题9 设 $M\in\mathscr{R}_0$, $\varnothing\neq X\subseteq M$,记

$$[X)=\{a\in M\mid \exists\, n\in\mathbb{N}, \exists\, x_i\in X, i=1,\cdots,n,\text{使得 } a\geqslant x_1\otimes\cdots\otimes x_n\},$$

则$[X)$是包含 X 的最小 MP 滤子,称之为由 X 生成的 MP 滤子.

事实上,$[X)$显然是非空子集,且关于$\otimes$封闭,因此,$[X)$必是包含 X 的 MP 滤子. 又任意包含 X 的 MP 滤子 F 必含形如 $x_1\otimes\cdots\otimes x_n$ 的元,其中 $x_i\in X$. 从而必有$[X)\subseteq F$. 因而$[X)$是包含 X 的最小 MP 滤子.

命题10 设 $M\in\mathscr{R}_0$,F 是 M 的 MP 滤子,在 M 上定义二元关系 $\sim_F$ 为

$$a\sim_F b \text{ 当且仅当 } a\to b\in F, b\to a\in F,$$

那么

(i) $\sim_F$ 是 M 上的同余关系,$M/\sim_F=\{[a]_F\mid a\in M\}$ (以后记为 M/F)关于商运算也是 R_0 代数,其中的偏序为

$$[a]_F\leqslant[b]_F \text{ 当且仅当 } a\to b\in F.$$

(ii) 若 F 是 M 的素 MP 滤子,则 M/F 是 R_0 链.

事实上,$\sim_F$ 显然是 M 上的等价关系,且在$\neg,\vee,\to$下保持,故(i)成立.

又,$\forall\, a,b\in M$,由(P9)知,如果 F 是 M 的素 MP 滤子,则 $a\to b\in F$ 或 $b\to a\in F$,即$[a]_F\leqslant[b]_F$ 或$[b]_F\leqslant[a]_F$. 这就证明了(ii).

命题11 设 $M\in\mathscr{R}_0$,$a\in M\setminus\{1\}$,则 M 中存在素 MP 滤子 F,使得 $a\notin F$.

证 以 $\mathscr{F}$ 表示 M 的所有不含 a 的 MP 滤子之集. 由$\{1\}\in\mathscr{F}$ 知,$\mathscr{F}\neq\varnothing$. 又,$(\mathscr{F},\subseteq)$是偏序集,且 $\mathscr{F}$ 中任一个链$\{F_t\}_{t\in I}$在 $\mathscr{F}$ 中以$\bigcup_{t\in I}F_t$ 为上界. 因此,由 Zorn 引理,$\mathscr{F}$ 中存在极大元 F,下证 F 是 M 的素 MP 滤子.

如果存在 $b,c\in M$,使得 $b\to c\notin F$,且 $c\to b\notin F$. 令

$$F_1=\{x\in M\mid \exists\, y\in F, \exists\, n\in\mathbb{N},\text{使得 } y\otimes(b\to c)^n\leqslant x\},$$

$$F_2=\{u\in M\mid \exists\, v\in F, \exists\, m\in\mathbb{N},\text{使得 } v\otimes(c\to b)^m\leqslant u\}.$$

容易证明,F_1,F_2 都是 M 的 MP 滤子,$b\to c\in F_1$,$F\subseteq F_1$,$c\to b\in F_2$,$F\subseteq F_2$. 为了完成证明,只需再证 F_1,F_2 至少有一个在 $\mathscr{F}$ 中,即,$a\notin F_1$ 与 $a\notin F_2$ 至少有一个成立.

事实上,如果 $a\in F_1$,且 $a\in F_2$,则$\exists\, y,v\in F$,$\exists\, n,m\in\mathbb{N}$,使得

$$a\geqslant y\otimes(b\to c)^n,\qquad a\geqslant v\otimes(c\to b)^m.$$

不妨设 $n\geqslant m$,则有 $a\geqslant v\otimes(c\to b)^n$. 于是,

$$\begin{aligned} a &\geqslant (y\otimes(b\to c)^n)\vee(v\otimes(c\to b)^n)\\ &\geqslant y\otimes v\otimes((b\to c)^n\vee(c\to b)^n)=y\otimes v. \end{aligned}$$

但是，$y\otimes v\in F$，因此有 $a\in F$，这与假设矛盾.

定理 2　若 $M\in\mathscr{R}_0^c$，则 M 中的蕴涵→必为形如(1)的 R_0 蕴涵算子.

证　由(P10)知，在任意 R_0 代数中，总有 $\neg a\vee b\leqslant a\to b$，且当 $a\leqslant b$ 时，$a\to b=1=R_0(a,b)$；如果 M 是 R_0 链，则当 $a>b$ 时，有 $a\to b\neq 1$，但由(R6)知，$(a\to b)\vee((a\to b)\to\neg a\vee b)=1$，根据链条件可得，$(a\to b)\to\neg a\vee b=1$，即 $a\to b\leqslant\neg a\vee b$.

注 2　由定理 2 可知，R_0 链 M 的非空子集 X 是 M 的子代数当且仅当 $\{0,1\}\subseteq X$，且 X 关于 $\neg$ 封闭.

命题 12　若 $M_1,M_2\in\mathscr{R}_0^c$，且 $|M_1|=|M_2|<\infty$，则 $M_1\cong M_2$.

定理 3　设 $M\in\mathscr{R}_0$，则 $\exists\{M_t\}_{t\in I}\subseteq\mathscr{R}_0^c$，使得 M 可同构嵌入 $\{M_t\}_{t\in I}$ 的直积 $M^*=\prod_{t\in I}M_t$.

证　设 $\mathscr{U}=\{F\mid F$ 是 M 的素 MP 滤子$\}$，则 $\mathscr{U}\neq\varnothing$，且由命题 10 知，$\forall F\in\mathscr{U}$，$M/F\in\mathscr{R}_0^c$. 可以证明，映射

$$i:M\to M^*,\quad x\mapsto([x]_F)_{F\in\mathscr{U}}$$

是从 M 到 M^* 的嵌入映射，即从 M 到 M^* 的单同态.

事实上，i 显然是同态映射. 又，$\forall a,b\in M$，若 $a\neq b$，不妨设 $a\nleq b$，则 $a\to b\neq 1$. 从而由命题 11 知，M 有素 MP 滤子 F，使得 $a\to b\notin F$. 于是，在 M/F 中，$[a]_F\nleq[b]_F$，因此，$[a]_F\neq[b]_F$，即 $i(a)\neq i(b)$.

3　系统 $\mathscr{L}^*$ 的语义及完备性

现在在一般的 R_0 代数上引入系统 $\mathscr{L}^*$ 的语义.

定义 5　设 $M\in\mathscr{R}_0$，从系统 $\mathscr{L}^*$ 的公式集 $F(S)$ 到 M 的$(\neg,\vee,\to)$型同态称为系统 $\mathscr{L}^*$ 的一个 M 赋值.

系统 $\mathscr{L}^*$ 的全体 M 赋值之集 $\Omega(M)$ 称为系统 $\mathscr{L}^*$ 的 M 语义. 特别地，$\Omega=\Omega([0,1])$，其中 $[0,1]$ 为 R_0 区间.

定义 6　设 $M\in\mathscr{R}_0$，$A\in F(S)$. A 称为 M-重言式，记作 $\models_M A$，如果 $\forall v\in\Omega(M)$，$v(A)=1$.

全体 M-重言式之集记为 $T(M)$. 特别地，当 M 是 R_0 区间 $[0,1]$ 时，$\models_M A$ 简记成 $\models A$.

定义 7　设 $M\in\mathscr{R}_0$，$\Gamma\subseteq F(S)$，$A\in F(S)$，A 称为 Γ 的 M-语义结论，记作 $\Gamma\models_M A$，如果 $\forall v\in\Omega(M)$，当 $v(\Gamma)\subseteq\{1\}$ 时，有 $v(A)=1$.

特别地，如果 M 是 R_0 区间 $[0,1]$，则 $\Gamma\models_M A$ 简记为 $\Gamma\models A$，$\varnothing\models A$ 就是 $\models A$.

容易验证以下结论成立：

命题 13　$\forall M\in\mathscr{R}_0$，$\mathrm{Axm}(\mathscr{L}^*)\subseteq T(M)$，即 $\mathscr{L}^*$ 中任一条公理是任一个 R_0 代数中的重言式.

事实上，$\forall A\in\mathrm{Axm}(\mathscr{L}^*)$，$\forall v\in\Omega(M)$，总有 $v(A)=1$(由 R_0 代数的定义及性质可知).

命题 14　若 $M,M_1\in\mathscr{R}_0$，且 M_1 是 M 的子代数，则 $T(M)\subseteq T(M_1)$.

实际上，每个 M_1 赋值可看作一个 M 赋值. 因此，$\Omega(M_1)\subseteq\Omega(M)$.

由以下命题不难看出，若命题 14 中的 M_1 可同构嵌入 M，则结论仍成立.

命题 15　若 $M_1,M_2\in\mathscr{R}_0$，且 $M_1\cong M_2$，则 $T(M_1)=T(M_2)$.

证　设 $A\in T(M_1)$，且 $\varphi:M_1\to M_2$ 是同构映射，则 $\forall v\in\Omega(M_2)$，$\varphi^{-1}\circ v\in\Omega(M_1)$，从而

$\varphi^{-1}\circ v(A)=1$. 但 φ^{-1}是保序双射,故 $v(A)=1$. 因此,$A\in T(M_2)$,即 $T(M_1)\subseteq T(M_2)$. 类似可证相反的包含关系也成立.

定理 4 若 $A\in T([0,1])$,则 $\forall M\in\mathscr{R}_0^c, A\in T(M)$.

证 设公式 A 中全体原子公式之集为$\{p_1,\cdots,p_n\}$. 若存在 $M\in\mathscr{R}_0^c$,使得 $A\notin T(M)$,则存在 $v\in\Omega(M)$,使得 $v(A)<1$. 设 M_1 是由$\{v(p_1),\cdots,v(p_n)\}$生成的 M 的子代数,则 $A\notin T(M_1)$. 又由注 2 可知,$M_1=\{0,1,v(p_1),\neg v(p_1),\cdots,v(p_n),\neg v(p_n)\}$. 因此,$|M_1|<\infty$. 设$|M_1|=m$,并取 R_0 区间$[0,1]$的 m 元子代数 $W_m=\left\{\frac{i}{m-1}\,\middle|\, i=0,1,\cdots,m-1\right\}$,则由命题 12 知,$M_1\cong W_m$. 再由命题 15 知,$A\notin T(W_m)$,这与命题 14 矛盾. 因此定理的结论成立.

定理 5 若 $A\in T([0,1])$,则 $\forall M\in\mathscr{R}_0, A\in T(M)$.

证 由定理 4, $\forall M\in\mathscr{R}_0^c, A\in T(M)$. 根据定理 3 和命题 14,只需再证 $\forall\{M_t\}_{t\in I}\subseteq\mathscr{R}_0^c$, $A\in T(M^*)$,其中 $M^*=\prod_{t\in I}M_t$.

事实上,$\forall v\in\Omega(M^*)$,有 $\varphi_t\circ v\in\Omega(M_t)$,其中 $\varphi_t: M^*\to M_t$ 为投影映射. 若 $v(A)=(a_t)_{t\in I}\neq 1$,则 $\exists t\in I$,使得 $a_t\neq 1$,即 $\varphi_t\circ v(A)=\varphi_t(v(A))\neq 1$,这与 $A\in T(M_t)$矛盾.

有了以上的准备工作,现在可以陈述并证明本文的几个主要结论.

定理 6(M-可靠性) 设 $A\in F(S)$,若 $\vdash A$,则 $\forall M\in\mathscr{R}_0, \models_M A$.

证 由命题 13 知,系统 $\mathscr{L}^*$ 的每一条公理都是 M-重言式. 又 MP 规则保 M-重言式,即当 $A, A\to B\in T(M)$时,$B\in T(M)$.

事实上,由(P16)知,$\forall v\in\Omega(M)$,当 $v(A)=1$,且 $v(A\to B)=1$ 时,$v(A)\otimes v(A\to B)=1$. 但有 $v(B)\geqslant v(A)\otimes v(A\to B)$,于是,$v(B)=1$.

因此,$\forall A\in \mathrm{Thm}(\mathscr{L}^*)$,必有 $A\in T(M)$.

以下是关于赋值中介$[F]$的完备性定理:

定理 A($[F]$完备性)[11] 设 $A\in F(S)$,则 $\vdash A$ 当且仅当$A\in T([F])$.

本文的主要结论是下面的定理 7,它解决了系统 $\mathscr{L}^*$ 的完备性问题:

定理 7(完备性) 系统 $\mathscr{L}^*$ 是完备的,即$\forall A\in F(S)$, $\vdash A$ 当且仅当$\models A$.

证 由定理 6 知,系统 $\mathscr{L}^*$ 是可靠的,即定理 7 的必要性成立. 对于充分性,如果$\models A$,则由定理 5 可知,$\forall M\in\mathscr{R}_0, A\in T(M)$. 特别地,$A\in T([F])$. 这样,由定理 A 得到$\vdash A$.

作为本节的结束,讨论一般的 $\Gamma\vdash A$ 与$\Gamma\models A$ 的关系.

定义 8 设 $\Gamma\subseteq F(S)$, $M\in\mathscr{R}_0$,若 $\Gamma\subseteq T(M)$,则称 M 为Γ-R_0 代数,其全体记为 $\mathscr{R}_0^\Gamma$,特别地,$\mathscr{R}_0=\mathscr{R}_0^\varnothing$.

与 $F(S)$上的可证等价关系 ~ 类似,可以在 $F(S)$上引入如下的 Γ-可证等价关系 $\sim_\Gamma$:

$$A\sim_\Gamma B \quad \text{当且仅当} \quad \Gamma\vdash A\to B,\text{且 } \Gamma\vdash B\to A.$$

容易验证,$\sim_\Gamma$ 是$F(S)$上的同余关系,而且商代数$[F]_\Gamma=F(S)/\sim_\Gamma\in\mathscr{R}_0^\Gamma$.

定理 8(强完备性) 设 $\Gamma\subseteq F(S)$, $A\in F(S)$,则 $\Gamma\vdash A$ 当且仅当$\Gamma\models A$.

证 仿定理 6 可证必要性成立,即,若 $\Gamma\vdash A$,则 $\Gamma\models A$.

对于充分性,由 $\Gamma\models A$ 可以证明,$\forall M\in\mathscr{R}_0^\Gamma$,有 $A\in T(M)$. 特别地,$A\in T([F]_\Gamma)$,下证 $\Gamma\vdash A$.

在 $[F]_\Gamma$ 中，$[A]_\Gamma \leqslant [B]_\Gamma$ 当且仅当 $\Gamma \vdash A \to B$．若 $B \in \mathrm{Ded}(\Gamma)$，则 $\forall A \in F(S)$，总有 $\Gamma \vdash A \to B$．因此，B 所在的等价类 $[B]_\Gamma$ 就是 $[F]_\Gamma$ 的最大元 1，且 $\forall A \in [B]_\Gamma$，$A \sim_\Gamma B$．因此，$A \in \mathrm{Ded}(\Gamma)$．这表明 $1 = [B]_\Gamma = \mathrm{Ded}(\Gamma)$．

若 $A \in T([F]_\Gamma)$，则 $\forall v \in \Omega([F]_\Gamma)$，有 $v(A) = 1$．特别地，当 v 是典型映射

$$v: F(S) \to [F]_\Gamma, \qquad v(A) = [A]_\Gamma$$

时，应有 $v(A) = 1$，即 $[A]_\Gamma = 1$．因此，$A \in \mathrm{Ded}(\Gamma)$，即 $\Gamma \vdash A$．

这就完成了定理的证明．

4　形式系统 $\mathscr{L}^*$ 在模糊推理中的应用

在模糊推理中，最基本的两个问题是以下的 GMP 和 GMT 问题：

(GMP)　由公式 $A \to B$ 和 A^* 推得 B^*；

(GMT)　由公式 $A \to B$ 和 B^* 推得 A^*，

这里，公式 A, B, A^* 和 B^* 均代表模糊命题，即它们的真值是区间 $[0,1]$ 中的某个实数，而且 A 与 A^*，B 与 B^* 不必相同．

根据模糊推理的三 I 原则[8]，GMP 问题的解 B^* 应是满足以下条件的公式：

(GMP1)　$\vdash (A \to B) \to (A^* \to B^*)$，

(GMP2)　如果公式 C 满足 $\vdash (A \to B) \to (A^* \to C)$，则有 $\vdash B^* \to C$．

如果这样的解存在，我们称之为 GMP 问题的 TI 解，相应的算法叫做 TI 算法．根据系统 $\mathscr{L}^*$ 的完备性，以上条件就是要求 B^* 为满足(GMP1)的“最小”公式．

不难证明以下的定理成立：

定理 9　若 $A, B, A^* \in F(S)$，则在系统 $\mathscr{L}^*$ 中 GMP 问题的 TI 解在可证等价意义下是惟一的，且由下式给出：

$$B^* = A^* \otimes (A \to B). \tag{3}$$

定理 10　在系统 $\mathscr{L}^*$ 中，GMP 问题的 TI 算法是还原的，即当 $A^* = A \in \mathrm{Thm}(\mathscr{L}^*)$ 时，有 $B^* \sim B$．

值得指出的是，GMP 问题的 CRI 解为

$$B^* = A^* \wedge (A \to B). \tag{4}$$

这是由模糊数学的创始人 Zadeh 提出的，并且被广泛地运用于模糊系统的研究之中．显然，GMP 问题的 TI 解优于 CRI 解．

对于 GMT 问题，可以利用换质位对称性将其转化为以下的 GMP 问题：

(GMP′)　从 $\neg B \to \neg A$ 和 B^* 推得 A^*．

根据定理 9 和 10，可以证明以下结论成立：

定理 11　若 $A, B, B^* \in F(S)$，则在系统 $\mathscr{L}^*$ 中，GMT 问题的 TI 解在可证等价意义下是惟一的，且由下式给出：

$$A^* = B^* \otimes (A \to B). \tag{5}$$

进一步，GMT 问题的 TI 算法是还原的，即当 $B^* = \neg B \in \mathrm{Thm}(\mathscr{L}^*)$ 时，$A^* \sim \neg A$．

在当代模糊逻辑的理论和应用领域，使用最多的当数 Lukasiewicz 公理系统和 Gödel 公理系统，但是以下的例子表明，在模糊推理过程中，系统 $\mathscr{L}^*$ 优于以上两个系统：

例3 假设公式 A 表示"西红柿红了",公式 B 表示"西红柿熟了",A^* 表示"某西红柿相当红了",已知 $A \to B$ 的真值为 0.7,而 A^* 的真值也为 0.7.

在系统 $\mathscr{L}^*$ 中,由以上条件可推知 $B^* = A^* \otimes (A \to B)$ 的真值为 0.7,这表明"该西红柿相当熟了",这与常识是一致的.

但在 Lukasiewicz 系统中,相应问题的 TI 解 $B^* = A^* \otimes (A \to B)$ 的真值只有 0.4,这表明"该西红柿不熟",这与常识相矛盾.

其实,文献[11]指出,Lukasiewicz 系统在推理过程中公式的真值传递性较差,这常常导致不理想的推理结果,无法进行较长的链式推理. 但是,系统 $\mathscr{L}^*$ 可较好地弥补这一缺陷.

例4 假设公式 A 表示"病人患了感冒",B 表示"病人发烧",$B^* = \neg B$ 表示"病人没有发烧". 已知 A 的真值为 0.2,B 的真值为 0,从而 $A \to B$ 的真值为 0.8,B^* 的真值为 1,且相应的 GMT 问题的 TI 解 $A^* \sim \neg A$,其真值为 0.8,这表示"该病人大致未患感冒",这与常识是一致的.

但是,在 Gödel 逻辑系统中,以上问题的 TI 解 $A^* = B^* \otimes (A \to B)$ 的真值为 0,若以 A^* 作为 $\neg A$ 的近似,则表明"该病人确实患了感冒",这明显是不合常理的.

其实,由于 R_0 蕴涵满足换质位对称性(R1),而 Gödel 蕴涵不满足这一性质,而且该系统中 GMT 问题的 TI 算法不具有还原性. 因此,在涉及 GMT 问题的推理中,系统 $\mathscr{L}^*$ 优于 Gödel 系统.

鉴于以上分析,建议在模糊系统的理论和应用研究中采用系统 $\mathscr{L}^*$,这将有力地促进这一领域的发展.

关于系统 $\mathscr{L}^*$ 在求解 FMP 和 FMT 问题中的应用,已在另一工作中将系统 $\mathscr{L}^*$ 推进到谓词领域,建立了相应的一阶系统 K^*,在该系统中可将 FMP 和 FMT 问题的 TI 解及其还原性形式化,从而使得模糊推理过程转化为系统 K^* 中的形式演算,这就为模糊推理奠定了严格的逻辑基础.

参考文献

1 Zadeh L A. Fuzzy sets. Inform Contr, 1965, 8: 338 ~ 353

2 Zadeh L A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. IEEE Trans SMC, 1973, 1: 28 ~ 44

3 李洪兴. 从模糊控制的数学本质看模糊逻辑的成功. 模糊系统与数学, 1995, 9(4): 1 ~ 14

4 Ying Mingsheng. A logic for approximate reasoning. J Symbolic Logic, 1994, 59: 830 ~ 837

5 Xu Y, Qin K Y, Liu J, et al. L-valued propositional logic L_{vpl}. Inform Sci, 1999, 114: 205 ~ 235

6 王国俊. Fuzzy 命题演算的一种形式演绎系统. 科学通报, 1997, 42(10): 1041 ~ 1045

7 王国俊. 修正的 Kleene 系统中的 Σ-(α-重言式)理论. 中国科学, E辑, 1998, 28(2): 146 ~ 152

8 王国俊. 模糊推理的全蕴涵三 I 算法. 中国科学, E辑, 1999, 29(1): 43 ~ 53

9 王国俊. 三 I 方法与区间值模糊推理. 中国科学, E辑, 2000, 30(4): 331 ~ 340

10 Wang G J. On the logic foundation of fuzzy reasoning. Inform Sci, 1999, 117(1): 47 ~ 88

11 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理. 北京: 科学出版社, 2000

12 Pavelka J. On fuzzy logic, Ⅰ. Z Math Logik Grund Math, 1979, 25: 45 ~ 52

13 Pavelka J. On fuzzy logic, Ⅱ. Z Math Logik Grund Math, 1979, 25: 119 ~ 134

14 Pavelka J. On fuzzy logic, Ⅲ. Z Math Logik Grund Math, 1979, 25: 447 ~ 464

15 Hajek P. Metamathematics of Fuzzy Logic. London: Klüwer Academic Publishers, 1998

16 Hamilton A G. Logic for Mathematicians. London: Cambridge Univ Press, 1978

17 Balbes R, Dwinger P. Distributive Lattices. Columbia: Univ of Missouri Press, 1974