

改进的最小包围球随机增量算法

李世林, 李红军

(北京林业大学理学院, 北京 100083)

摘 要: 三维空间中离散点集的最小包围球, 在碰撞检测、计算几何和模式识别等领域都有广泛应用。为了更好地理解和构造最小包围球算法, 首先对最小包围球的性质进行分析。然后, 基于对随机增量算法的分析, 提出了构造较大初始包围球和减少迭代过程中最小包围球更新次数两种策略。依据后一种策略提出的方法称为随机点组-重算最远点算法。计算机随机生成数据和现实三维模型采样数据的多组实验结果表明, 随机点组-重算最远点算法相比于之前的经典算法能够有效地提高时间效率。

关 键 词: 最小包围球; 随机增量算法; 随机点组-重算最远点算法

中图分类号: TP 391

DOI: 10.11996/JGJ.2095-302X.2016020166

文献标识码: A

文 章 编 号: 2095-302X(2016)02-0166-06

An Improved Randomized Incremental Algorithm for Generating Minimum Enclosing Ball of Discrete Point Set

Li Shilin, Li Hongjun

(College of Science, Beijing Forestry University, Beijing 100083, China)

Abstract: The minimum enclosing ball (MEB) of discrete point set in the 3D space has been widely used in many fields, such as collision detection, computational geometry, pattern recognition and so on. In order to better understand and construct MEB, its character is analyzed firstly. After analyzing the classical randomized incremental algorithm, we propose two strategies to improve time efficiency. One strategy is to construct a bigger initial enclosing ball and another strategy is to decrease the number of updating MEB. Based on the second strategy, a new algorithm called random point group-recalculation farthest point is proposed. Multi-group experimental results, whose data are both randomly generated by computer and realistic 3D model sampling, show that the random point group-recalculation farthest point algorithm can effectively improve the time efficiency compared with the classical algorithms.

Keywords: minimum enclosing ball; randomized incremental algorithm; random point group-recalculation farthest point

对于三维空间中的离散点集 P , 求解其最小包围球(minimum enclosing ball, MEB)以寻找一个半径最小的球, 其包含 P 中所有的点, 球体有许多良好的性质^[1], 因此在计算机图形学和计算几何中,

与离散点集的凸包围多面体^[2]相比, 包围球常作为边界, 可以更快地进行近似的碰撞检测、范围界定和形状分析。在空间数据库中, MEB 的求解可用于建立空间数据索引, 以便提高查询速度^[3]。同时

收稿日期: 2015-09-24; 定稿日期: 2015-10-03

基金项目: 国家自然科学基金项目(61372190)

作者简介: 李世林(1992-), 男, 山东青岛人, 硕士研究生。主要研究方向为计算几何。E-mail: lishilin_2015@bjfu.edu.cn

通讯作者: 李红军(1969-), 男, 湖南郴州人, 副教授, 博士。主要研究方向为计算机图形学和计算几何等。E-mail: lihongjun69@bjfu.edu.cn

MEB 问题在模式识别^[4]、计算几何^[5]、机器学习^[6]等领域也有广泛应用。模型局部的包围球可以用于模型裁剪^[7]或者重采样, 因这些领域处理的数据集通常都是大规模的, 所以提高 MEB 算法运行效率是很有必要的。

MEB 问题可以追溯到 19 世纪中期, Sylvester^[8]在 1857 年提出了最小包围圆问题, 并在 1860 年, 给出了求解该问题的一种近似线性算法^[9]。之后人们开始系统地研究该问题, 比如最近的基于 α -壳的最小包围圆求解算法^[10], 并研究从二维平面到三维空间再到更高维空间的算法; 1982 年, Megiddo^[11]首次给出了一种理论上的线性时间算法, 其时间复杂度是最小的, 但算法本身的实现却很复杂; 1991 年, Welzl^[12]提出了一种简单快捷的随机算法, 其时间复杂度是线性级的, 并指出该算法易于推广到高维空间的 MEB 和最小包围椭球(minimum enclosing ellipsoid)中。后来, Berg 等^[5]对该方法进行了进一步的改进, 称之为随机增量算法(randomized incremental algorithm, RIA), 该算法是求解 MEB 问题有代表性的经典算法。分析该算法可看出, 影响求解的时间效率主要因素是 MEB 更新的次数, 因此提高算法效率的策略有 2 种: ①构造较大的初始 MEB; ②修改迭代过程中的选点规则。在给出这两种策略对应的具体算法之前, 为便于理解和构造算法, 先概述 MEB 的性质。

1 离散点集的最小包围球及其性质

定义 1. 点集 P 的 MEB 定义为:

$$\text{MEB}(P) = B_{o^*, r^*} = \{x \in R^3 : \|x - o^*\| \leq r^*\} \quad (1)$$

其中, o^* 为最优球心, r^* 为最优半径, $\|\cdot\|$ 表示 Euclidean 范数。

2012 年, 文献[13]给出一系列有关最小包围圆的性质, 这里对应给出三维空间中 MEB 的有关性质, 这将有助于 RIA 的理解和实现。

性质 1. 三维空间中, 有限离散点集的 MEB 是唯一的。

此性质的证明见文献[12]。

若 P 中只有一个点 p_1 , 则 MEB 是退化的, 半径为 0, 球心为点 p_1 。

性质 2. 非退化的 MEB 可以由 2~4 个边界点定义。

证明. 点集 P 的 MEB 的构成有 3 种情况:

(1) 点集 P 中距离最远的两个点(p_1, p_2)作为边界点, p_1, p_2 两点之间距离的一半作为球半径,

两点连线段的中点作为球心。

(2) 点集 P 中任意 3 个点求其最小包围圆, 其中最大的圆半径为 r , 圆心为 o , 确定该圆的那 3 个点(p_1, p_2, p_3), 若点集 P 中的任何一点与 o 之间的距离都小于 r , 则点集 P 的 MEB 的球心为 o , 半径为 r , 边界点是 p_1, p_2, p_3 。

(3) 若有 4 个边界点, 那么点集 P 的 MEB 为这 4 个点所构成的空间四面体的外接球。由空间几何的知识可知, 空间四面体的包围球是唯一的, 若边界点多于 4 个, 那么边界点集中任意 4 个点所确定的 MEB 是等同的, 都可以归纳为 4 个边界点。

性质 3. 若点集 P 的 MEB 是由 p_1, p_2, p_3, p_4 4 个边界点确定, 那么这 4 个点的 MEB 是其所构成的空间四面体的外接球。

引理 1. 设点集 P 的子集 $P_i = \{p_1, p_2, \dots, p_i\}$ 的 MEB 为 D_i :

(1) 若点 $p_{i+1} \in D_i$, 则点集 $P' = P \cup \{p_{i+1}\}$ 的 MEB 为 $D_{i+1} = D_i$;

(2) 若点 $p_{i+1} \notin D_i$, 则点 p_{i+1} 必定是在点集 P' 的 MEB 即 D_{i+1} 的边界上。

引理 1 是 RIA 的递增思想, 其证明可参考文献[5]。

证明. 由性质 3 的条件可知, 任意 3 个点所确定的 MEB 都不包含第 4 个点。设 p_1, p_2, p_3 所确定的 MEB 是球 o , $p_4 \notin o$, 由引理 1 可知, 点 p_4 是在点集 $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ 的 MEB 的边界上。同理 p_1, p_2, p_3 也在其边界上, 又因为四面体的外接球是唯一的, 所以该 4 个点的 MEB 是这 4 个点所构成空间四面体的外接球。

2 较大初始最小包围球的随机增量算法

Berg 等^[5]给出一种易于理解的 RIA, 该算法的思想与动态规划问题中动态维护最优解有相似之处。根据文献[5]中关于平面点集最小包围圆 RIA 的描述, 容易给出三维空间 MEB 的 RIA。

RIA 还有很大的改进空间, 初始点对的选取直接影响到整个算法的迭代次数。传统 RIA 只是随机选取了两个点作为初始 MEB 的直径, 尽管可以从平均意义上获得比较好的时间效率且能避免最差的情况, 但是迭代次数却很大。本文采用较远两点构造较大初始 MEB, 以便减少后续迭代过程中 MEB 的更新次数。

给定点集 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ 。

步骤 1. 构造较大初始 MEB。在点集 P 中任取点 p_1 , 找出距离 p_1 最远的点 p_i , 再找出距离 p_i 最远的点 p_j , 以点 p_i, p_j 的连线作为直径, 构造初始 MEB, 记为 D_2 。此时的初始 MEB 大小相对于 RIA 更接近最优的 MEB D 的大小, 迭代中重新构造 MEB 的次数会变得更少, 所以理论上改进后的 RIA 效率比原始算法更高。

后续步骤采用经典 RIA, 迭代更新当前 MEB。

步骤 2. 设 MEB D_2 的两个点分别为 p_1, p_2 , 令 $i = 3$ 转到步骤 3。

步骤 3. 检验点 p_i , 如果 p_i 在包围球 D_{i-1} 中, 那么 MEB 不变, 即 $D_i = D_{i-1}$; 否则需根据性质 3 重新构造 MEB D_i 。

步骤 4. 令 $i = i + 1$, 若 $i \leq n$, 则转到步骤 3, 否则算法终止, 输出 D_n 的半径和球心。

显然, 步骤 1 的时间复杂度为 $O(n)$, 步骤 2 为 $O(1)$, 步骤 3 与步骤 4 构成循环, 时间复杂度为 $O(n)$, 因此该方法确定初始点对的时间复杂度也是 $O(n)$ 。由于新的改进算法在步骤 1 选取较大的包围球, 所以步骤 3 中的 MEB 重新构造的次数会大大减少, 因此新的算法能够有效地提高时间效率, 称该算法为较大初始 MEB 的 RIA, 记为 iRIA。

3 随机点组-重算最远点算法

通过修改 RIA 迭代过程中的选点规则, 提出了一种新算法, 称为随机点组-重算最远点算法 (random point group - recalculation the farthest point, R-RCF)。

3.1 算法介绍

给定点集 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, 令 $P_i = \{p_1, p_2, \dots, p_i\}$ 。

步骤 1. 将 P 中各点打乱成一个随机排列 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 。

步骤 2. 作前 4 个点 p_1, p_2, p_3, p_4 确定的 MEB。根据性质 2 和性质 3, 球的边界可能通过这 4 个点 (4 点的外接球); 也可能只通过其中的 3 个点 (3 点的外接圆构成球的最大截面), 但包含第 4 点; 还可能只通过其中的两个点, 后一种情况球边界上的两点一定是位于球的一条直径的两端。令 $i = 5$, 转到步骤 3。

步骤 3. 考察点 p_i , 如果该点位于球外部, 转到步骤 4。否则, 令 $i = i + 1$, 若 $i \leq n$, 执行步骤 3; 若 $i > n$, 执行步骤 5。

步骤 4. 根据引理 1, 在 p_1, p_2, p_3, p_4 中任意选择 3 个点, 加上 p_i , 构造包含这 5 个点的 MEB,

且半径是所有满足条件所构造的 MEB 中最小的, 此时确定该 MEB 的 4 个点记为新的 p_1, p_2, p_3, p_4 , 令 $i = i + 1$, 若 $i \leq n$, 执行步骤 3; 若 $i > n$, 执行步骤 5。

步骤 5. 在点集 P 中找出距离 MEB 的球心最远点 F 。若 F 点已在球内或球边界上, 则该球即为所求的球, 算法结束。否则, 执行步骤 6。

步骤 6. 以 F 为边界点, 在点集 $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ 中选择 3 个点和点 F 一起构造新的 MEB, 使得这 5 个点都在球内, 且半径是所构造的 MEB 中最小的, 此时选择的 3 个点和点 F 记作新的 p_1, p_2, p_3, p_4 , 转到步骤 5。

R-RCF 将求解 MEB 问题分为 2 部分进行: ① 动态更新最优解利用了 RIA 的核心思想, 该算法的优点是每次迭代所需的计算量远远小于 RIA, 但缺点是每次更新最优解会遗漏少部分已经位于上一步的 MEB 内部的点。② 重算遗漏部分则是利用了最远点依次选取算法的思想^[14], 且相对于最远点依次选取算法, 该部分迭代次数更少, 同时又重算了动态更新中所遗漏的部分, 弥补了动态更新最优解的缺点。本文称该算法为 R-RCF。

3.2 算法分析

3.2.1 算法重算部分的必要性

由于 R-RCF 算法在步骤 4 动态更新最优解的过程中会遗漏少部分已经包含在球内部的点, 所以该算法加入了步骤 5 和步骤 6, 对步骤 4 动态更新最优解的过程中所遗漏的区域进行重算。为了更形象地说明该问题, 以二维平面最小包围圆为例进行分析。

如图 1 所示, c_i 是点 ABC 所确定的最小包围圆, 当遍历到点 D 时, 由于点 D 不在 c_i 里, 所以需要更新最小包围圆, c_{i+1} 是满足算法步骤 4 的圆, 此时 s 区域内遍历过的点已经不包含于更新后的最小包围圆中, 要想使其重新位于最小包围圆中, 就需要对该区域进行重算。该算法根据参考文献[14]中算法的步骤 3, 采用重算最远点的方法进行重算, 同时该算法动态更新最优解的思想恰是参考 RIA, 且利用边界点动态更新最优解。

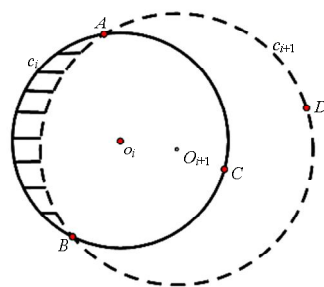


图 1 R-RCF 更新最优解时遗漏 s 区域的点

3.2.2 算法收敛性

本节要证明上述 R-RCF 算法一定能终止, 且最后一次求得的 MEB 就是包含点集 P 中所有点的 MEB。

引理 2. 算法步骤 4 和步骤 6 所生成的 MEB 的半径是递增的。

证明. 设步骤 4 生成的包含 A, B, C, D 4 点的 MEB 为 B_1 , 半径为 r_1 ; 当考虑球外的点 E 后, 生成的包含 A, B, C, D, E 5 点的 MEB 记为 B_2 , 半径为 r_2 , 显然 B_2 包含 A, B, C, D 4 点。考虑到 B_2 的构造, 会有 $B_2 \neq B_1$ 。若 $r_1 = r_2$, 与空间离散点集的 MEB 的唯一性存在矛盾; 若 $r_1 > r_2$, 与点 A, B, C, D 的 MEB 为 B_1 也存在矛盾; 所以 $r_1 < r_2$, 即更新后的 MEB 半径比原 MEB 的半径大。

定理 1. 上述 R-RCF 算法是收敛的, 且最后一次得到的 MEB 是包含点集 P 中所有点的 MEB。

证明. 因为在点集 P 中任取 4 个点、3 个点或 2 个点所生成的 MEB 的个数是有限的。由引理 2 可知, 算法进行过程中所生成的 MEB 半径是递增的, 经过有限次迭代后, 可求得这些最小球中半径最大的一个。从算法步骤 5 可知, 只有当点集 P 中所有点都在由 4 个点、3 个点或 2 个点生成的 MEB 内部时, 算法结束, 因而最后得到的 MEB 会是包含点集 P 中所有点的 MEB。

4 实验验证

上述算法的实验是在笔记本电脑上进行的, 计算机配置是 Intel(R) Core(TM) i3-2310M CPU @ 2.10 GHz 处理器和 6 GB 内存, 程序运行环境 MATLAB R2012a。实验针对 RIA, iRIA 和 R-RCF 的时间效率进行对比, 实验数据分为两类: 计算机随机生成点集(简称为随机点集)和现实对象采集的三维点集(简称为采样点集)。

4.1 实验比较

为了对比在不同规模下的数据求取 MEB 的时间效率, 设计了 10 组点集, 点数 n 分别是 100, 200, 300, 400, 500, 1 000, 2 000, 3 000, 4 000, 5 000, 每组数据分别进行 500 次实验。随机点集的生成范围有 2 种, 矩形域随机点集和球形域随机点集。

实验 1. 是矩形域随机点集, 随机点按照均匀分布产生于一个单位正方体, 如下式:

$$P_1 = \{(x, y, z) | (x, y, z) \in [0, 1]^3\}$$

表 1 是在矩形域上采样所得出的实验数据, Red1 表示 iRIA 相对于 RIA 的时间压缩比, Red2 表示 R-RCF 相对于 RIA 的时间压缩比。从表 1 可看出, 本文提出的 iRIA 算法在时间代价方面能压缩 8% 以上, 且随着点数的增加, 时间效率的提升越来越高。而本文提出的 R-RCF 算法在时间代价方面能压缩 66% 以上, 这将大幅度地提高求解 MEB 的时间运行效率。MEB 的实验效果如图 2(a) 所示。

表 1 矩形域上不同点数的平均运行时间比较

点数(n)	运行时间(s)			时间压缩比(%)	
	RIA	iRIA	R-RCF	Red1	Red2
100	0.020 73	0.019 02	0.006 989	8.24	66.28
200	0.039 34	0.035 38	0.009 687	10.07	75.38
300	0.058 61	0.051 39	0.011 699	12.32	80.04
400	0.073 18	0.063 03	0.013 508	13.87	81.54
500	0.091 04	0.076 21	0.015 352	16.29	83.14
1 000	0.187 24	0.159 53	0.022 091	14.80	88.20
2 000	0.340 56	0.278 08	0.036 818	18.35	89.19
3 000	0.457 25	0.376 51	0.049 984	17.66	89.07
4 000	0.609 97	0.489 14	0.062 064	19.81	89.83
5 000	0.846 40	0.632 28	0.076 346	25.30	90.98

实验 2. 针对球形域随机点集进行, 随机点按照均匀分布产生于一个平移后的单位球。

$$P_2 = \{(x, y, z) | (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \leq 1\}$$

球形域上 MEB 的求取效果如图 2(b) 所示。实验结果见表 2。从时间效率上看, 本文所提出的 iRIA

算法由于第一步计算较远的两个点增加了不少时间, 同时, 由于球形域点集形状对称的特点, 本文改进后的 iRIA 算法并不能有效地减少迭代次数, 所以总时间代价上表现的略差些。但是本文提出的 R-RCF 算法在计算球形域点集的 MEB 在时间代价上能压缩 71% 以上。

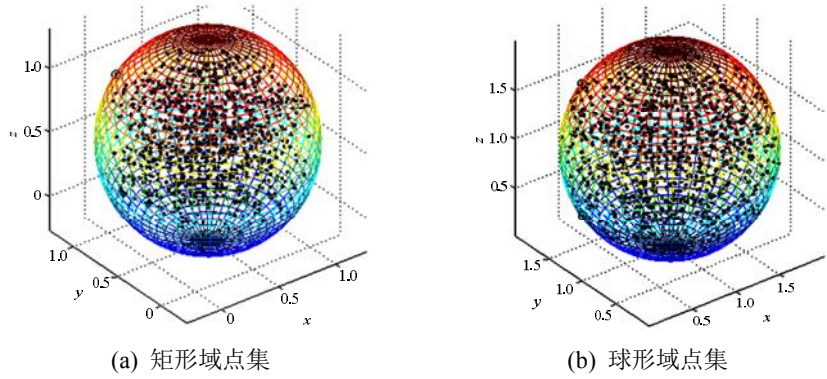


图 2 离散点集最小包围球计算结果

表 2 球形域上不同点数的平均运行时间比较

点数(n)	运行时间(s)			时间压缩比(%)	
	RIA	iRIA	R-RCF	Red1	Red2
100	0.030 92	0.033 19	0.008 863	-7.34	71.34
200	0.065 84	0.068 01	0.012 121	-3.30	81.59
300	0.096 23	0.094 78	0.015 505	1.50	83.89
400	0.122 30	0.131 60	0.017 765	-7.60	85.47
500	0.157 94	0.152 44	0.019 571	3.48	87.61
1 000	0.299 38	0.315 23	0.030 582	-5.29	89.78
2 000	0.527 34	0.587 06	0.049 642	-11.32	90.59
3 000	0.839 63	0.879 12	0.068 202	-4.70	91.88
4 000	1.096 39	1.218 84	0.086 194	-11.17	92.14
5 000	1.340 69	1.389 11	0.103 534	-3.61	92.28

在表 2 中, 由于 RIA 和 iRIA 的运行时间相差并不大, 故进行了方差未知均值相等($H_0: \mu_1 = \mu_2$)的假设验证。当取显著性水平为 0.05 时, 接受 H_0 , 即认为此两种算法针对球形区域的时间效率无显著差异。

4.2 采样点集的最小包围球

在三维游戏制作或者三维激光测量中, 需获得

各种形状的点云数据。为了验证 RIA、iRIA 和 R-RCF 针对不同复杂数据的时间效率, 将进行 MEB 计算, 针对 6 个现实对象采集的三维点集, 分别为网络公开数据库(<http://visionair.ge.imati.cnr.it/ontologies/shapes/>)人手、花瓶和佛像模型的采样点集, 以及实验室扫描数据: 树 1、树 2 和场景模型, 如图 3 所示。

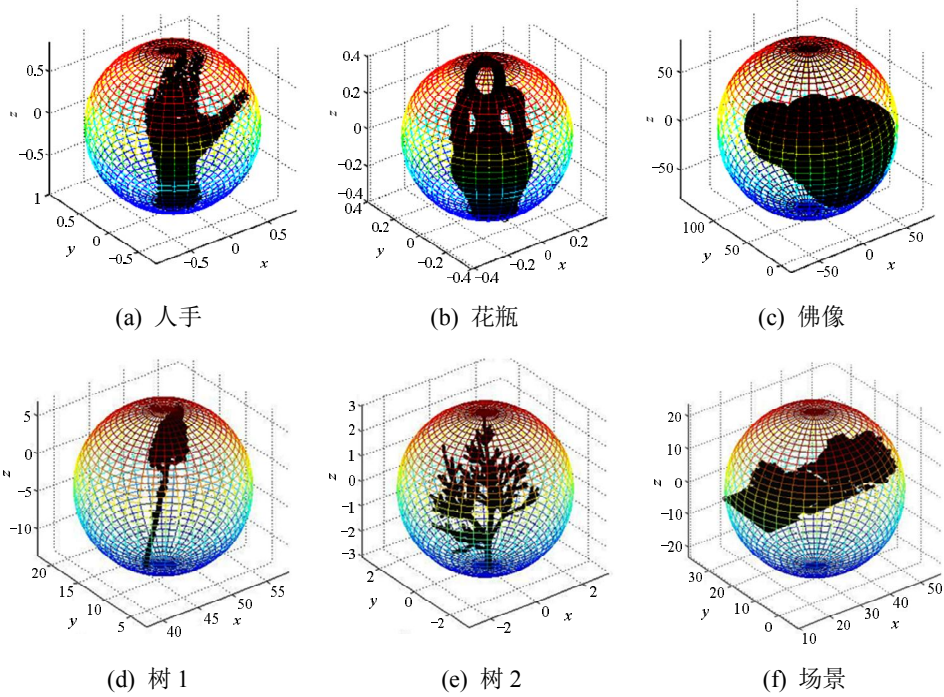


图 3 现实三维模型采集数据的最小包围球

6 组数据的点数和 3 种算法的时间及其效率比较见表 3, 其中运行时间是实验重复 30 次的平均运行时间。从表 3 看出, 本文提出的改进算法 iRIA 的平均运行时间比 RIA 快 10%~33%, R-RCF 比 RIA 快 51%~93%。具体来说, iRIA 与 RIA 之间的比较效果: 对于比较“修长”的点集数据模型, 如人手模型、树 1 模型和树 2 模型, iRIA 的程序运行效率比 RIA 提高了 22%以上, 这是因为对于该类的点集数据模型, iRIA 算法改进的初始值能大大减少求解 MEB 的迭代次数, 这与矩形域随机点集得出的结论一致; 而对于一些比较“饱满”的点集数据模型, 如

花瓶模型、佛像模型和场景模型, iRIA 的程序运行效率比 RIA 提高的程度明显低于“修长”的点集数据模型, 这与球形域随机点集得出的结论一致。从表 3 中的实验结果可以看出, 针对不同形状的采样点集, iRIA 算法的运行效率普遍高于 RIA。R-RCF 与 RIA 之间的比较效果: 对于比较“饱满”的点集数据模型, R-RCF 的程序运行效率比 RIA 提高了 89%以上。可见, 针对不同形状的大规模点集, 本文提出的新算法 R-RCF 的运行效率远高于原始算法, 同时, 对于“饱满”的点集数据模型, 效果尤其明显, 这将为计算离散点集的 MEB 的工程应用节省大量的时间。

表 3 3 种算法针对激光扫描点云数据的平均运行时间比较

点集(n)	运行时间(s)			时间压缩比(%)	
	RIA	iRIA	R-RCF	Red1	Red2
人手模型(5 000 点)	0.223 37	0.155 67	0.061 45	30.31	72.49
花瓶模型(89 500 点)	18.226 47	16.382 30	1.254 12	10.12	93.12
佛像模型(189 360 点)	19.254 30	15.926 67	2.107 84	17.28	89.05
树模型 1(43 593 点)	1.053 14	0.697 25	0.480 48	33.79	54.38
树模型 2(15 792 点)	0.363 30	0.280 36	0.175 60	22.83	51.67
场景模型(471 364 点)	54.715 81	43.595 70	5.294 40	20.32	90.32

5 结 束 语

针对三维空间中求取离散点集 MEB 问题, 为便于构造求解 MEB 的算法, 本文先概述了三维空间中离散点集的 MEB 的几条主要性质。在分析求解 MEB 的 RIA 的基础上, 提出一种称为较大初始 MEB 的 RIA, 这种算法通过在第一阶段选取较远点对构造初始 MEB, 有效地减少了第二阶段的 MEB 更新次数, 提高了算法的时间效率。同时, 本文又提出了一种新算法, 称之为 R-RCF, 该算法通过减少迭代过程中 MEB 的更新次数, 大幅度提高了时间效率。通过随机数据和现实三维模型采样数据等多组实验验证, 结果表明, 与原始 RIA 相比, 本文提出的 R-RCF 算法能大幅度的提高时间效率。本文算法分析详细, 有助于学生或者工程技术人员在算法实现过程中较好地处理相关细节。

此外, 因为最小包围长方体比 MEB 更加接近物体表面, 所以参考本文的研究思路和二维空间中最狭长包围矩形的求解原理及方法^[15], 研究三维空间的最小包围长方体的快速计算是未来的一个研究方向。

参 考 文 献

- [1] Hu P, Xu D, Li H. A normalization method of moment invariants for 3D objects on different manifolds [J]. Computer Aided Drafting, Design and Manufacturing, 2014, 24(2): 15-22.
- [2] 唐 磊, 施侃乐, 雍俊海, 等. 模型适应的凸包围多面

- 体并行生成算法[J]. 中国科学: 信息科学, 2014, 44(12): 1515-1526.
- [3] Samet H. The design and analysis of spatial data structures [M]. New Jersey: Addison Wesley Press, 1990: 86-89.
- [4] 来疆亮, 王守觉. 最小球覆盖几何算法及其在模式识别中的应用[J]. 模式识别与人工智能, 2006, 19(2): 271-276.
- [5] Berg M D, Jrevel M V, Overmars M, et al. 计算几何: 算法与应用[M]. 邓俊辉, 译. 北京: 清华大学出版社, 2005: 99-103.
- [6] Ben-Hur A, Horn D, Siegelmann H T, et al. Support vector clustering [J]. Journal of Machine Learning Research, 2001, 2(2): 125-137.
- [7] 耿 博, 张慧娟, 王 衡, 等. 离散曲面的近似 Poisson 盘采样[J]. 中国科学: 信息科学, 2012, 42(6): 703-716.
- [8] Sylvester J J. A question on the geometry of situation [J]. The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, 1857, (1): 79.
- [9] Sylvester J J. On Poncelet's approximate linear valuation of surd forms [J]. Philosophical Magazine, 1860, 20(132): 203-222.
- [10] 张 勇, 陈 强. 一种基于计算几何方法的最小包容圆求解算法[J]. 工程图学学报, 2007, 28(3): 97-101.
- [11] Megiddo N. Linear-time algorithms for linear programming in R3 and related problems [J]. Siam Journal of Computing. IEEE, 1983, 12(4): 329-338.
- [12] Welzl E. Smallest enclosing disks (balls and ellipsoids) [J]. Lecture Notes in Computer Science, 1991, 555(1): 359-370.
- [13] 李红军, 张晓鹏. 离散点集最小包围圆算法分析与改进[J]. 图学学报, 2012, 33(2): 34-38.
- [14] 汪 卫, 王文平, 汪嘉业. 求一个包含点集所有点的最小圆的算法[J]. 软件学报, 2000, 11(9): 1237-1240.
- [15] 周 敏, 郑国磊, 陈树林. 二维图形最狭长包围矩形的求解原理及方法[J]. 图学学报, 2013, 34(4): 46-53.