中国科学(A 辑)
第 30 卷 第 3 期 SCIENCE IN CHINA (Series A) 2000 年 3 月

对称型的对数 Sobolev 不等式*

陈木法
(北京师范大学数学系,北京 100875)

摘要 使用新型 Cheeger 常数,给出了关于一般对称型的对数 Sobolev 常数的一些估计. 这些估计在某种意义上是精确的.

关键词 对数 Sobolev 不等式 对称型 生灭过程

设$(E,\mathscr{E},\pi)$是一概率空间,满足$\{(x,x):x\in E\}\in\mathscr{E}\times\mathscr{E}$. 以 $L^2(\pi)$表通常的实 L^2 空间,其范数记为 $\|\cdot\|$. 给定 $L^2(\pi)$上的对称型 $D(f,g)$,其定义域为 $\mathscr{D}(D)$. 所谓对数 Sobolev 不等式乃是

$$\pi(f^2\log f^2)\leqslant 2c^{-1}D(f,f),\ f\in\mathscr{D}(D),\ \|f\|=1, \tag{0.1}$$

其中 c 为常数而 $\pi(f)=\int f\mathrm{d}\pi$. 自此以后,以 σ 表最大常数 c 并称之为对数 Sobolev 常数.

此不等式最早由 Gross[1]提出,20 多年来已有大量研究. 关于目前的研究状况及有关文献,参见有关综述报告[2,3]. 已有的文献仅处理了扩散过程,对于(无界)Markov 链则长期处于停顿状态. 直到最近,才由文献[4]和[5]分别研究了关于有限 Markov 链和一般对称型的此不等式. 后一文献所用的方法与前者不同,是来自文献[6]中所发展起来的关于无界算子的 Cheeger 技术. 顺便提及,对于无限空间中的有界算子,此不等式并不成立. 本文的目的是采用不同的手法,给出对数 Sobolev 常数 σ 的新估计或改进已有估计. 与文献[5]的更详细的比较,将在第 3 节定理 1.1 的证明之后给出.

1 主要结果

本文所处理的对称型$(D,\mathscr{D}(D))$如下:

$$D(f,g)=\frac{1}{2}\int J(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)],$$
$$f,g\in\mathscr{D}(D):=\{f\in L^2(\pi):D(f,f)<\infty\}, \tag{1.1}$$

此处 J 非负、对称:$J(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)=J(\mathrm{d}y,\mathrm{d}x)$. 不失一般性,可设 $J(\{(x,x):x\in E\})=0$.

取定一非负、对称函数 $r\in\mathscr{E}\times\mathscr{E}$,使得

$$J^{(1)}(\mathrm{d}x,\ E)/\pi(\mathrm{d}x)\leqslant 1,\ \pi\text{-a.s.}, \tag{1.2}$$

此处 $J^{(\alpha)}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)=I_{\{r(x,y)^\alpha>0\}}J(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)/r(x,y)^\alpha$, $\alpha\geqslant 0$. 贯穿全文,约定 $r^0=1$ 对一切

1999-08-02 收稿
* 国家自然科学基金重点项目(批准号:19631060)、数学天元基金、求是科技基金、教育部博士点专项研究基金和高等学校数学研究与人才培养中心资助项目

$r \geqslant 0$ 成立. 在(1.1)式中,以 $J^{(\alpha)}$ 代替 J,导出对称型$(D^{(\alpha)}, \mathscr{D}(D^{(\alpha)}))$. 命

$$\lambda_1^{(\alpha)} = \inf\{D^{(\alpha)}(f,f): \pi(f) = 0, \|f\| = 1\}, \quad \kappa^{(\alpha)} = \inf_{\pi(A)\in(0,1)} \frac{J^{(\alpha)}(A \times A^c)}{-\pi(A)\log\pi(A)},$$

$$\xi^{\delta} = \inf_{\pi(A)>0} \frac{J^{(1/2)}(A \times A^c) + \delta\pi(A)}{\pi(A)\sqrt{1-\log\pi(A)}}, \ \delta > 0, \quad \xi_r = \inf_{\pi(A)\in(0,r]} \frac{J^{(1/2)}(A \times A^c)}{\pi(A)\sqrt{1-\log\pi(A)}}, r \in (0,1)$$

$$\xi^{\infty} = \lim_{\delta\to\infty}\xi^{\delta} = \sup_{\delta>0}\xi^{\delta}, \qquad \xi_0 = \lim_{r\to 0}\xi_r = \sup_{r>0}\xi_r.$$

当 $\alpha = 0$ 时,回到原对称型,此时所有的上标"(α)"均略去不写. 留意在区间$[1/2,1)$上,$-t\log t \leqslant -(1-t)\log(1-t)$,因而可把 $\kappa^{(\alpha)}$ 定义式中的"$\pi(A)\in(0,1)$"换成"$\pi(A)\in(0,1/2]$". 其次,在区间$(0,1/2]$上,$-(\log t)/\sqrt{1-\log t} \geqslant (\log 2)/\sqrt{1+\log 2}$,从而 $\kappa^{(1/2)}(\log 2)/\sqrt{1+\log 2} \leqslant \xi_{1/2} \leqslant \xi_0$.

本文的主要结果如下:

定理 1.1 $2\kappa \geqslant \sigma \geqslant \dfrac{2\lambda_1}{1+16\inf_{\delta>0}A(\delta)} \geqslant \dfrac{2\lambda_1}{1+16\inf_{r\in(0,1)}B(r)} \geqslant \max\left\{\dfrac{2\lambda_1\chi_{(0,\infty)}(\xi_0)}{65-64\log r_0}, \dfrac{\xi_{1/2}^3}{25+33\xi_{1/2}+11\xi_{1/2}^2}\right\}$,其中 $A(\delta) = \dfrac{(2+\delta)(\lambda_1+\delta)}{(\xi^{\delta})^2}$, $B(r) = \left[\dfrac{\lambda_1}{\xi_r} + \sqrt{1-\log r}\right]\left[\dfrac{2}{\xi_r} + \sqrt{1-\log r}\right]$,而当 $\xi_0 > 0$ 时,r_0 是方程$\sqrt{1-\log r} = \dfrac{\lambda_1+2}{2\xi_r}$,$r\in(0,1)$的唯一解. 特别地,若 $\lambda_1 > 0$ 且 $\xi^{\infty} > 0$,则 $\sigma > 0$. 此外,$\xi_0 > 0 \Rightarrow \xi^{\infty} > 0$;除非 $\mathscr{E}$仅含有限多个 π 原子,反向蕴涵关系亦真.

定理 1.2 $2\kappa \geqslant \sigma \geqslant \dfrac{2\lambda_1\kappa^{(1/2)}}{\sqrt{\lambda_1(2-\lambda_1^{(1)})} + 3\kappa^{(1/2)}} \geqslant \dfrac{1}{8}\kappa^{(1/2)^2}$.

在上述公式中保留 $\lambda_1^{(\alpha)}$ 而不代之以显示估计是因为可用不同的方式来估计 $\lambda_1^{(\alpha)}$ 的下界. 例如利用文献[6]中的估计,可得出上述两定理中的末项下界(参见第3节). 因为定理1.2的下界当且仅当 $\kappa^{(1/2)} > 0$ 才有意义,后者推出 $\xi_{1/2} > 0$,可见就定性而言,定理1.1优于定理1.2. 但就定量而论,两个定理所提供的下界估计不可比较.

作为上述结果应用之例证,考虑生灭过程. 设生速为 $b_i > 0(i \geqslant 0)$,死速为 $a_i > 0\ (i \geqslant 1)$,则 $\pi_0 = \dfrac{1}{\mu}$, $\pi_i = \dfrac{b_0\cdots b_{i-1}}{a_1\cdots a_i\mu}$, $\mu = 1 + \sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{b_0\cdots b_{m-1}}{a_1\cdots a_m}$; $J_{ij} = \pi_i b_i$ 如$j = i+1$, $J_{ij} = \pi_i a_i$ 如$j = i-1$,而对于其他的 j, $J_{ij} = 0$,取 $r_{ij} = (a_i + b_i)\vee(a_j + b_j)$, $i \neq j$.

下述推论中的两个结果基本上取自文献[5]. 由推论1.1可验证例1.1. 该例说明定理1.1的确强于定理1.2.

推论 1.1 对于生灭过程,下述断言成立:

(1) 当且仅当 $c := \inf\limits_{i\geqslant 1}\dfrac{\pi_i a_i}{\sqrt{r_{i,i-1}}}\Big/\Big(\sum\limits_{j\geqslant i}\pi_j\Big)\sqrt{1-\log\sum\limits_{j\geqslant i}\pi_j} > 0$ 时,$\xi_0 > 0$. 此外,当 $r < \pi_0$ 时,$\xi_r \geqslant c$;

(2)当且仅当 $\inf\limits_{i\geqslant 1}\dfrac{\pi_i a_i}{r_{i,i-1}^{\alpha}}\Big/\Big(-\sum\limits_{j\geqslant i}\pi_j\Big)\log\sum\limits_{j\geqslant i}\pi_j > 0$ 时,$\kappa^{(\alpha)} > 0$.

例 1.1 取 $a_i = b_i = i^2\log^{\gamma}(i+1)$,则当且仅当 $\gamma \geqslant 2$ 时,$\kappa^{(1/2)} > 0$;当且仅当 $\gamma \geqslant 1$ 时,

$\xi_0>0$. 此外，当且仅当 $\gamma\geqslant 1$ 时，对数 Sobolev 不等式成立.

此例说明从定性的角度看，上述估计可达精确. 下例说明从定量的角度看，这些估计也可以相当好.

例 1.2　设 E 有限而 $(\pi_i>0)$ 为 E 上的任一分布. 取 $J_{ij}=\pi_i\pi_j(i\neq j)$，$r_{ij}=(1-\pi_i)\vee(1-\pi_j)(i\neq j)$，并记 $\pi_*=\min\pi_i$，则定理 1.1 和 1.2 的主要估计的主阶 $(-\log\pi_*)^{-1}$（当 $\pi_*\to 0$ 时）都是精确的.

证　易证 $\lambda_1=1$.

a) 由于 $\xi^\delta\sim\delta/\sqrt{1-\log\pi_*}$，得出 $\inf\limits_{\delta>0}(2+\delta)(\lambda_1+\delta)/(\xi^\delta)^2\leqslant\lim\limits_{\delta\to\infty}(2+\delta)(1+\delta)/(\xi^\delta)^2=1-\log\pi_*$. 于是由定理 1.1 的第 1 个下界得到 $\sigma\geqslant\dfrac{2}{1+16(1-\pi_*)(1-\log\pi_*)}$.

b) 其次，取 $r=\pi_*$，则对于每一个使得 $\pi_i=\pi_*$ 的 i，都有 $r_{ij}=1-\pi_i(j\neq i)$，而且 $\xi_r=\dfrac{J^{(1/2)}(\{i\}\times\{i\}^c)}{\pi_i\sqrt{1-\log\pi_i}}=\sqrt{\dfrac{1-\pi_*}{1-\log\pi_*}}$. 因此，利用定理 1.1 的第 2 个下界得到

$$\sigma\geqslant\frac{2(1-\pi_*)}{1-\pi_*+16(1-\log\pi_*)(1+\sqrt{1-\pi_*})(2+\sqrt{1-\pi_*})}.$$

c) 由于 $r_{ij}\leqslant 1-\pi_*$，$\pi(A)>0\Rightarrow\pi(A)\geqslant\pi_*$ 且在 $(0,1)$ 上，$-(1-t)/\log t$ 单调上升，得出 $\kappa^{(1/2)}\geqslant\inf\limits_{\pi(A)\in(0,1)}\dfrac{1-\pi(A)}{-\sqrt{1-\pi_*}\log\pi(A)}\geqslant\dfrac{\sqrt{1-\pi_*}}{-\log\pi_*}$. 这样，使用定理 1.2 的第 1 个下界得到

$$\sigma\geqslant\frac{2\sqrt{1-\pi_*}}{3\sqrt{1-\pi_*}-\sqrt{2}\log\pi_*}.$$

d) 与 c) 类似，可导出 $\kappa=-(1-\pi_*)/\log\pi_*$.

最后，将 a) ~ d) 中所得到的估计与精确结果 $\sigma=\dfrac{2(1-2\pi_*)}{\log(\pi_*^{-1}-1)}$（文献[4]定理 A.1）比较，可看出这些估计的主阶都是精确的. 然而，定理 1.2 的末项估计的主阶 $(-\log\pi_*)^{-2}$ 非精确.

2　一个一般结果及其证明

本节考虑如下一般的对称型

$$\bar{D}(f,g)=\frac{1}{2}\int J(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]+\int K(\mathrm{d}x)f(x)g(x),$$

$$f,g\in\mathscr{D}(\bar{D}):=\{f\in L^2(\pi):\bar{D}(f,f)<\infty\},\tag{2.1}$$

此处 J 与上节相同，而 K 为非负测度. 依旧选择一个非负、对称函数 $\bar{r}\in\mathscr{E}\times\mathscr{E}$ 及一个非负函数 $s\in\mathscr{E}$，使得

$$[\bar{J}^{(1)}(\mathrm{d}x,E)+K^{(1)}(\mathrm{d}x)]/\pi(\mathrm{d}x)\leqslant 1,\ \pi\text{-a.s.},\tag{2.2}$$

这里 $\bar{J}^{(\alpha)}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$ 的定义如前，只是把 r 换成 $\bar{r}$ 而 $K^{(\alpha)}(\mathrm{d}x)=I_{\{s(x)^\alpha>0\}}\dfrac{K(\mathrm{d}x)}{s(x)^\alpha}$，$\alpha\geqslant 0$. 然后，如 (2.1) 式所示，由 $(\bar{J}^{(\alpha)},K^{(\alpha)})$ 产生对称型 $(\bar{D}^{(\alpha)},\mathscr{D}(\bar{D}^{(\alpha)}))$. 定义 $\lambda_0^{*(\alpha)}=\inf\{\bar{D}^{(\alpha)}(f,f):\|f\|=1\}$. 今固定一个 $[0,\infty)$ 上的连续增函数 U：$U(0)=1$，而且

$$U' \text{ 逐段连续且 } c_1 := \sup_{t \geqslant 0} \frac{tU'_{\pm}(t)}{U(t)} < \infty, \tag{2.3}$$

其中 $U'_{\pm}$ 表 U 的右、左导数. 其次,定义 $\xi^* = \inf_{\pi(A)>0} \frac{\bar{J}^{(1/2)}(A \times A^c) + K^{(1/2)}(A)}{\pi(A)\sqrt{U(\pi(A)^{-1})}}$. 现在陈述本文的最后一个主要结果.

定理 2.1 命 $\sigma(U) = \inf\{\bar{D}(f,f)/\pi(f^2U(f^2)): \|f\| = 1\}$, 则

$$\inf_{\pi(A)>0} \frac{J(A \times A^c) + K(A)}{\pi(A)U(\pi(A)^{-1})} \geqslant \sigma(U) \geqslant \frac{\xi^{*2}}{4(1+c_1)^2(2-\lambda_0^{*(1)})}.$$

证 记 $E_U(f) = \pi(f^2U(f^2))$. 第 1 个不等式的证明较易. 只需对于函数 $f = I_A/\sqrt{\pi(A)}$, $\pi(A)>0$,计算 $\bar{D}(f,f)/E_U(f)$即可.

a) 为证第 2 个不等式,还需要一些记号.

当 $K(\mathrm{d}x) \neq 0$ 时,为方便,将 E 扩大为 $E^* = E \cup \{\infty\}$. 对于 $f \in \mathscr{E}$,将它延拓成 E^* 上的函数 $f^*: f^* = fI_E$. 其次,定义 $E^* \times E^*$ 的对称测度 $J^{*(\alpha)}$如下:

$$J^{*(\alpha)}(C) = \begin{cases} \bar{J}^{(\alpha)}(C), & C \in \mathscr{E} \times \mathscr{E}, \\ K^{(\alpha)}(A), & C = A \times \{\infty\} \text{ 或 } \{\infty\} \times A, A \in \mathscr{E}, \\ 0, & C = \{\infty\} \times \{\infty\}, \end{cases}$$

则有 $J^{*(\alpha)}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) = J^{*(\alpha)}(\mathrm{d}y, \mathrm{d}x)$,且

$$\int_E \bar{J}^{(\alpha)}(\mathrm{d}x, E) f(x)^2 + K^{(\alpha)}(f^2) = \int_{E^*} J^{*(\alpha)}(\mathrm{d}x, E^*) f^*(x)^2,$$

$$\bar{D}^{(\alpha)}(f,f) = \frac{1}{2}\int_{E^* \times E^*} J^{*(\alpha)}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)[f^*(y) - f^*(x)]^2,$$

$$\frac{1}{2}\int_{E \times E} \bar{J}^{(\alpha)}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) \,|\, f(y) - f(x) \,|+ \int_E K^{(\alpha)}(\mathrm{d}x) \,|\, f(x) \,|$$
$$= \frac{1}{2}\int_{E^* \times E^*} J^{*(\alpha)}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) \,|\, f^*(y) - f^*(x) \,|.$$

留意若对于一切 $x, y \in E$,置 $r^*(x,y) = \bar{r}(x,y)$, $r^*(x,\infty) = r^*(\infty, x) = s(x)$且命 $r^*(\infty, \infty) = 0$,则可将 $J^{*(\alpha)}$表成 $J^{*(\alpha)}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) = I_{\{r^*(x,y)^\alpha > 0\}} J^*(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)/r^*(x,y)^\alpha$.

b) 采用文献[5]中的记号: $\varphi(t) = t\sqrt{U(t)}$及 $\eta(t) = \varphi(t^2)$. 注意 φ 严格增因而 η 亦然. 此外,在每一有限区间上,除了有限个点之外,均有 $\varphi'(t) = \sqrt{U(t)}\left[1 + \frac{tU'(t)}{2U(t)}\right]$及 $\eta'(t) = \frac{2\eta(t)}{t}\left[1 + \frac{t^2U'(t^2)}{2U(t^2)}\right]$. 由(2.3)式得 $\eta'(t) \leqslant c_2\eta(t)/t = c_2t\sqrt{U(t^2)}$, $c_2 := 2 + c_1$. 给定 $s < t$,将$[s,t]$上的不连续点标记为 $s = t_1 < \cdots < t_m = t$,则由中值定理及 $\eta(t)/t$ 的单增性知,存在 $\theta_i \in (t_i, t_{i+1})$,使得

$$0 \leqslant \eta(t) - \eta(s) = \sum_{i=1}^{m-1}[\eta(t_{i+1}) - \eta(t_i)] = \sum_{i=1}^{m-1}\eta'(\theta_i)(t_{i+1} - t_i)$$
$$\leqslant c_2\sum_{i=1}^{m-1}\frac{\eta(\theta_i)}{\theta_i}(t_{i+1} - t_i) \leqslant c_2\frac{\eta(t)}{t}\sum_{i=1}^{m-1}(t_{i+1} - t_i) = c_2\frac{\eta(t)}{t}(t - s).$$

c) 设 $f \geqslant 0$ 满足 $\|f\| = 1$,并置 $g^* = \varphi(f^{*2})$,则由 b)得出$|g^*(y) - g^*(x)| \leqslant c_2|f^*(y)$

$-f^*(x)|\dfrac{\eta(f^*(x)\vee f^*(y))}{f^*(x)\vee f^*(y)}$. 这样，由 Cauchy-Schwarz 不等式及(2.2)式得出

$$\begin{aligned}
I^* &:= \frac{1}{2}\int J^{*(1/2)}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)\,|\,g^*(y)-g^*(x)\,| \\
&\leqslant \frac{c_2}{2}\Big[\int J^*(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)\,|\,f^*(y)-f^*(x)\,|^2\Big]^{1/2}\Big[\int J^{*(1)}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)\Big[f^*(y)\sqrt{U(f^*(y)^2)} \\
&\qquad + f^*(x)\sqrt{U(f^*(x)^2)}\Big]^2\Big]^{1/2} \\
&= \frac{c_2}{\sqrt{2}}\sqrt{\bar{D}(f,f)}\Big[\int J^{*(1)}(\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y)[2f^*(y)^2U(f^*(y)^2)+2f^*(x)^2U(f^*(x)^2)] \\
&\qquad - 2\bar{D}^{(1)}\big(f\sqrt{U(f^2)},\ f\sqrt{U(f^2)}\big)\Big]^{1/2} \\
&\leqslant \frac{c_2}{\sqrt{2}}\sqrt{\bar{D}(f,f)}\,[4E_U(f)-2\lambda_0^{*(1)}E_U(f)]^{1/2} \\
&\leqslant c_2\sqrt{(2-\lambda_0^{*(1)})\bar{D}(f,f)E_U(f)}.
\end{aligned}\tag{2.4}$$

d) 命 $h(t)=\pi(f^{*2}>t)$, $A_t=\{g^*>t\}=\{\varphi(f^{*2})>t\}$，则 $h(t)\leqslant 1\wedge t^{-1}$, $\pi(A_t)=\pi(f^{*2}>\varphi^{-1}(t))=h\circ\varphi^{-1}(t)$，这里 φ^{-1}表 φ 的反函数．由 ξ^* 的定义得出

$$\begin{aligned}
I^* &\geqslant \xi^*\int_0^\infty \pi(A_t)\sqrt{U(\pi(A_t)^{-1})}\,\mathrm{d}t = \xi^*\int_0^\infty h(s)\sqrt{U(h(s)^{-1})}\,\varphi'(s)\mathrm{d}s \\
&\geqslant \xi^*\int_0^\infty h(t)\sqrt{U(t)}\,\varphi'(t)\mathrm{d}t = \xi^*\int \mathrm{d}\pi\int_0^{f^{*2}}\sqrt{U(t)}\,\varphi'(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

其次，由(2.3)式及 U 的绝对连续性知，对于一切 $r\geqslant 0$，有 $\int_0^r\sqrt{U}\varphi'\geqslant c_3rU(r)$，其中 $c_3=\dfrac{2+c_1}{2(1+c_1)}>\dfrac{1}{2}$. 因而

$$I^*\geqslant c_3\xi^*\int \mathrm{d}\pi f^{*2}U(f^{*2}) = c_3\xi^*E_U(f).\tag{2.5}$$

e) 综合(2.4)与(2.5)式得到 $c_3\xi^*E_U(f)\leqslant c_2\sqrt{(2-\lambda_0^{*(1)})\bar{D}(f,f)E_U(f)}$. 即

$$\frac{\bar{D}(f,f)}{E_U(f)}\geqslant\frac{c_3^2\xi^{*2}}{c_2^2(2-\lambda_0^{*(1)})}=\frac{\xi^{*2}}{4(1+c_1)^2(2-\lambda_0^{*(1)})}.$$

3　主要定理和推论的证明

定理 1.1 的证　将(0.1)式应用于 $f=I_A/\sqrt{\pi(A)}$, $\pi(A)\in(0,1)$可导出所需上界．

a) 假设(1.2)式对于某对称函数 r 成立．固定 $\delta>0$ 并取 $K(\mathrm{d}x)=\delta\pi(\mathrm{d}x)$. 其次，取 $\bar{r}=(1+\delta)r$ 及 $s=1+\delta$，则条件(2.2)满足．最后，取 $U(t)=1+\log^+t=1+\max\{0,\log t\}$，那么 $\xi^*=\dfrac{1}{\sqrt{1+\delta}}\xi^\delta$, $\lambda_0^{*(\alpha)}=\dfrac{\delta}{(1+\delta)^\alpha}$, $c_1=\sup\limits_{t>0}\dfrac{tU'_\pm(t)}{U(t)}=1$. 因此，由定理 2.1，对于形如(1.1)式的对称型$(D,\mathscr{D}(D))$, $\sigma(U)=\inf_{\|f\|=1}\dfrac{D(f,f)+\delta}{E_U(f)}\geqslant\dfrac{(\xi^\delta)^2/(1+\delta)}{16(2-(\delta/(1+\delta)))}=\dfrac{(\xi^\delta)^2}{c_\delta}$，此处 $c_\delta=16(2$

$+\delta)$. 于是

$$\pi(f^2\log^+ f^2) \leqslant c_\delta(\xi^\delta)^{-2}[D(f,f)+\delta]-1,\ \|f\|=1. \tag{3.1}$$

另一方面,由文献[2]中的命题3.10知:由下述不等式

$$\pi(f^2\log f^2) \leqslant C_1D(f,f)+C_2,\ \pi(f)=0,\ \|f\|=1 \tag{3.2}$$

可推出

$$\sigma \geqslant 2/[C_1+(C_2+2)\lambda_1^{-1}]. \tag{3.3}$$

将此结论应用于(3.1)式,得出

$$\sigma \geqslant \frac{2\lambda_1}{1+c_\delta(\lambda_1+\delta)/(\xi^\delta)^2}. \tag{3.4}$$

由于 $\delta>0$ 任意,证出 σ 的第1个下界.

b) 固定 $r\in(0,1)$. 注意到

$$\xi^\delta \geqslant \xi_r \wedge \inf_{\pi(A)>r}[\delta/\sqrt{1-\log\pi(A)}] \geqslant \xi_r \wedge [\delta/\sqrt{1-\log r}],$$

取 $\delta_r=\xi_r\sqrt{1-\log r}$,则 $\xi^{\delta_r}\geqslant\xi_r$. 以此代入(3.4)式,得

$$\sigma \geqslant \frac{2\lambda_1}{1+16[(\lambda_1/\xi_r)+\sqrt{1-\log r}][(2/\xi_r)+\sqrt{1-\log r}]}. \tag{3.5}$$

因 $r\in(0,1)$任意,证出 σ 的第2个下界. 第3个下界可由如下不等式 $(a+c)(b+c)\leqslant[c+(a+b)/2]^2$ 导出.

c) 命 $k^{(\alpha)'}=\inf\limits_{\pi(A)\in(0,1/2]}J^{(\alpha)}(A\times A^c)/\pi(A)$, 则由文献[6]知

$$\lambda_1 \geqslant \frac{k^{(1/2)'^2}}{1+\sqrt{1-k^{(1)'^2}}}. \tag{3.6}$$

留意当 $\pi(A)\leqslant1/2$ 时, $1-\log\pi(A)\geqslant1+\log 2$. 于是 $k^{(1/2)'}\geqslant\sqrt{1+\log 2}\,\xi_{1/2}$. 从而由(3.6)式得 $\lambda_1\geqslant(1+\log 2)\xi_{1/2}^2/2$. 进而由(3.5)式得出 $\sigma\geqslant\dfrac{c^2\xi_{1/2}^3}{\xi_{1/2}+8c[2+c\xi_{1/2}]^2}\geqslant\dfrac{\xi_{1/2}^3}{25+33\xi_{1/2}+11\xi_{1/2}^2}$,其中 $c=\sqrt{1+\log 2}$.

d) 在b)中已证 $\xi_r>0\Rightarrow\xi^\delta>0$. 反之,由假设知,存在序列 $\{A_n\}\subset\mathscr{E}$,使得 $\pi(A_n)\to0$. 于是

$$\begin{aligned}\xi^\delta &\leqslant \inf_{\pi(A)\in(0,r]}\frac{J^{(1/2)}(A\times A^c)+\delta\pi(A)}{\pi(A)\sqrt{1-\log\pi(A)}} \leqslant \varliminf_{\pi(A)\to0}\frac{J^{(1/2)}(A\times A^c)+\delta\pi(A)}{\pi(A)\sqrt{1-\log\pi(A)}}\\ &\leqslant \varliminf_{\pi(A)\to0}\frac{J^{(1/2)}(A\times A^c)}{\pi(A)\sqrt{1-\log\pi(A)}}+\varlimsup_{\pi(A)\to0}\frac{\delta}{\sqrt{1-\log\pi(A)}}\\ &=\lim_{r\to0}\inf_{\pi(A)\in(0,r]}\frac{J^{(1/2)}(A\times A^c)}{\pi(A)\sqrt{1-\log\pi(A)}}=\xi_0,\end{aligned}$$

这里的第1个等号用到了条件 $\pi(A)\to0$. 因此, $\xi^\delta>0\Rightarrow\xi_0>0$. 当 $\mathscr{E}$仅含有限多个 π 原子时,如假设 $\inf\limits_{\pi(A)\in(0,1)}J^{(1/2)}(A\times A^c)>0$(此为某种不可约性),则结论亦真.

现在比较本文与文献[5]的不同之处. 首先,因 $\inf U>0$,对于连续空间 E,当 $\pi(A)\to1$ 时,有可能 $J^{(1/2)}(A\times A^c)\to0$,从而 $\lim\limits_{r\to1}\xi_r=0$. 引进 ξ^δ 的目的即为避免这一退化情形. 其次,从本质上讲,所证的目标是(3.2)式而非(0.1)式. 这两个事实引导我们考虑具有 $K(\mathrm{d}x)\neq0$

的(2.1)式以代替(1.1)式．这简化了文献[5]中的证明，使我们能够找出显式估计并进一步做出定理 1.1 和 1.2 之比较．如例 1.2 所示，在优化所得到的下界时，甚至允许 $\delta\to\infty$．此外，因为所用的函数是 $U(t)=1+\log^+ t$，自然引导我们将 U' 放松为逐段连续．另一有用的函数是 U_n，它归纳地定义为 $U_1(t)=1+\log(1+t)$，$U_m=1+\log U_{m-1}$．此时对一切 n 有 $c_1=1$．当然，如同文献[5]一样，定理 2.1 也适用于更一般情形．

定理 1.2 的证　此证明的部分想法已由王凤雨得到．设 $\pi(f)=0$，$\|f\|=1$.

a) 命 $\varepsilon=\sqrt{2-\lambda_1^{(1)}}/[2\kappa^{(1/2)}]$，$E(f)=\pi(f^2\log f^2)$，则可证

$$E(f)\leqslant 2\varepsilon\sqrt{D(f,f)}+1. \tag{3.7}$$

这比定理 2.1 的证明要容易得多．事实上，这里使用 $g=f^2$ 代替那里的 $g=\varphi(f^2)$．首先可证

$$I:=\frac{1}{2}\int J^{(1/2)}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)\,|f(y)^2-f(x)^2|\leqslant\sqrt{(2-\lambda_1^{(1)})D(f,f)}, \tag{3.8}$$

其证明是标准的，以前已用过多次(参见文献[6])．其次，命 $A_t=\{f^2>t\}$并证明

$$I\geqslant\kappa^{(1/2)}[E(f)-1], \tag{3.9}$$

这也不难(参见定理 2.1 的证明 d))．综合(3.8)与(3.9)式得出(3.7)式．

b) 由(3.7)式得到 $E(f)\leqslant 2\varepsilon\sqrt{D(f,f)}+1\leqslant\gamma\varepsilon D(f,f)+\varepsilon/\gamma+1$，这里 $\gamma>0$ 为待定常数．综合此式与(3.2)和(3.3)式，得出 $\sigma\geqslant\dfrac{2}{\varepsilon\gamma+[(\varepsilon/\gamma)+3]/\lambda_1}$．关于 γ 优化右方，得到

$$\sigma\geqslant\frac{2\lambda_1\kappa^{(1/2)}}{\sqrt{(2-\lambda_1^{(1)})\lambda_1}+3\kappa^{(1/2)}}. \tag{3.10}$$

另一方面，在文献[6]中已证 $\lambda_1^{(1)}\geqslant 1-\sqrt{1-k^{(1)'2}}$．综合此式与(3.6)式，并留意 $k^{(1/2)'}\geqslant(\log 2)\kappa^{(1/2)}$，可见(3.10)式的右方有下界：$\dfrac{2(\log 2)^2\kappa^{(1/2)^2}}{(\log 2+3)[1+\sqrt{1-k^{(1)'2}}]}\geqslant\dfrac{1}{8}\kappa^{(1/2)^2}$.

关于此证明作一注解．自然可把 $D(f,f)$换成 $D(f,f)+\delta$，再依定理 1.1 的证法来证明定理 1.2．然而，当关于 δ 优化所得结果时，得出 $\delta=0$．可见引进参数 δ 并无改进．其原因在于：定理 1.2 所用的是 $\kappa^{(1/2)}$而非 ξ^{δ}.

推论 1.1 的证　由于 $t\sqrt{1-\log t}$在(0,1)上单调增，$\pi(A)\leqslant r<\pi_0\Rightarrow 0\notin A$，可见 $i_0:=\inf A\geqslant 1$，进而 $\xi_r\geqslant\dfrac{\pi_{i_0}a_{i_0}}{\sqrt{r_{i_0,i_0-1}}}\Big/\Big(\sum_{j\geqslant i_0}\pi_j\Big)\sqrt{1-\log\sum_{j\geqslant i_0}\pi_j}\geqslant c$．关于其他断言的证明，参见文献[5].

参　考　文　献

1 Gross L. Logarithmic Sobolev inequalities. Amer J Math, 1976, 97: 1 061

2 Bakry D. L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semigroupes. In: Bakry D, Gill R D, Molchanov S, eds. Lectures on Probability Theory. Lect Notes in Math, Vol, 1 581. Berlin: Springer-Verlag, 1994. 1 ~ 114

3 Gross L. Logarithmic Sobolev inequalities and contractivity properties of semigroups. In: Dell'Antonic G, Mosco U, eds. Dirichlet Forms. Lect Notes in Math, Vol 1 563. Berlin: Springer-Verlag, 1993. 54 ~ 88

4 Diaconis P, Saloff-Coste L. Logarithmic Sobolev inequalities for finite Markov chains. Ann Appl Prob, 1996, 6(3): 695

5 Wang F Y. Sobolev type inequalities for general symmetric forms. Proc Amer Math Soc, 1999

6 陈木法，王凤雨．一般对称型的 Cheeger 不等式和谱隙存在性判准．科学通报，1998，43(14)：1 475 ~ 1 477