热声固耦合问题多参数识别中解的唯一性和算法研究

朱丽艳^{1,2}, 邓又军¹, 魏东^{2*}, 桂业伟²

1. 中南大学数学与统计学院, 长沙 410083;

2. 中国空气动力研究与发展中心空气动力学国家重点实验室, 绵阳 621000

* E-mail: xisuzisi@126.com

收稿日期: 2021-08-02; 接受日期: 2021-09-26; 网络版发表日期: 2021-12-30

国家重点研发计划(编号: 2019YFA0405202)、国家自然科学基金(批准号: 11971487, 11972361)、湖南省自然科学基金(编号: 2020JJ2038)和四川省科技计划(编号: 2020JDJQ0031)资助项目

摘要 本文研究了一类热声固多物理场耦合中的初边值识别问题, 建立了基于超声回波时间测量的固体结构表面热流和尺寸的多参数同时识别模型. 利用热传导方程的极值原理, 证明了耦合问题多参数识别中解的唯一性, 为超声同时测温测厚等工程应用提供了理论支撑. 在数值求解正问题的基础上, 将反问题重新表述为由偏微分方程约束的优化问题. 将共轭梯度法反演热流和最速下降法反演厚度相结合, 发展了多参数识别问题的交替迭代算法, 并通过严格的收敛性分析, 给出了交替迭代算法的收敛性条件, 证明了算法的全局收敛性. 最后通过设计数值算例, 验证了本算法的可靠性和可行性, 并对比了仅识别热流的单参数识别算法, 验证了本算法在精度方面的提高.

关键词 热声固耦合, 多参数反演, 反问题唯一性, 交替迭代算法, 收敛性分析

1 引言

基于超声法的高温固体结构测厚、表面探伤和测温等, 对高温工程的安全监控、资源节约、故障诊断等有重要作用, 因而在航空、航天、能源、化工、医疗、机械、制造等领域具有广泛应用^[1,2]. 实际工程问题中, 通常有多个初边值条件未知的情况. 例如, 能源化工领域中高温管道由于运行工况变化以及长期腐蚀、冲刷等存在管壁减薄和内壁热流边界未知问题^[3]. 因此, 亟待基于超声法测量管道表面热流和结构尺寸

等多种参数, 为高温结构的安全稳定运行提供依据. 基于超声的多参数测量本质上属于一类热-声-固多物理场耦合中的初边值识别问题^[4], 而多参数识别中解的唯一性是反问题研究理论基础, 也是构建相关求解方法的理论依据. 但相关研究仅集中于热传导反问题以及超声探测等的单一参数识别问题^[5~9], 而较少讨论多参数问题的唯一性, 严重制约了同时测温测厚等超声探测方法多功能应用的发展.

关于热声固耦合问题的初边值识别已有大量的算法研究, 并在超声测厚、测温、探伤等领域得到广泛

引用格式: 朱丽艳, 邓又军, 魏东, 等. 热声固耦合问题多参数识别中解的唯一性和算法研究. 中国科学: 技术科学, 2023, 53: 330–340
Zhu L Y, Deng Y J, Wei D, et al. Research on the uniqueness and algorithm of multi-parameter identification in coupling thermal acoustic and solid problem (in Chinese). Sci Sin Tech, 2023, 53: 330–340, doi: [10.1360/SST-2021-0341](https://doi.org/10.1360/SST-2021-0341)

应用^[5-11]. 但相关研究主要集中在单参数识别方面, 即通常假定壁厚已知去预测温度^[7-9], 或假定热边界去预测厚度^[10,11]. 但在实际的工程应用中通常二者都是未知的, 相比单参数识别, 多参数识别可以有效实现测量设备更多功能, 并降低因测量参数不确定性和先验信息假设带来的识别误差. 但其对输入信息量和算法鲁棒性要求更高, 否则易出现输入信息不足造成的矩阵奇异以及计算不收敛或陷于局部极值等. 因此, 研究超声同时测温测厚中多参数识别算法, 对解决热声固多物理场耦合中的初边值识别问题以及超声测量设备测温测厚等多功能性, 具有重要的工程实用价值.

本文基于热声固耦合原理, 建立了一维固体介质初边值识别问题的模型, 提出了同时识别初边值条件中热流边界和厚度的反问题. 从理论角度, 给出了反问题唯一性的严格证明. 发展了一种基于交替迭代的多参数识别算法, 并给出了算法全局收敛性的证明, 最后设计了数值实验, 验证了算法的有效性、算法精度与抗噪性, 并通过对比仅识别热流的单参数识别算法, 验证了本算法在功能和精度方面的优越性.

2 理论模型

本文研究了热-声-固耦合中的初边值识别问题. 考虑如下高温固体介质中的超声探测问题: 如图1所示, 一维固体介质的一端施加热流边界条件, 另一端绝热, 则固体介质内部的温度场分布满足如下规律:

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, & (x, t) \in [0, L] \times [0, \tau], \\ -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q, & q(t) \in L^2[0, \tau], \\ -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, \\ T \Big|_{t=0} = T_0, & x \in [0, L], \end{cases} \quad (1)$$

式中, $T(x, t)$ 表示 t 时刻位置 x 处的温度, k , c 和 ρ 分别代表热传导率、比热和材料密度, $q(t)$ 和 L 分布代表边界热流和固体介质厚度, 为初边值识别问题研究的待识别参数.

高温条件下, 超声波在介质中的传播时间会受到结构内部温度场的影响, 对于一维模型来说, 传播时间主要受到结构厚度、材料属性和内部温度场的影响.

对于图1中一维固体结构, 若已知其内部温度场, 在一端发射超声波, 超声波回波时间 $\Lambda(t)$ 可以通过以下公式求得:

$$\Lambda(t) = \int_0^L \frac{1}{V(T(x, t))} dx, \quad t \in (0, +\infty), \quad (2)$$

式中, 厚度 L 代表超声波的单向传播距离, V 表示超声波在介质中的传播速度, 其与内部温度场相关, 通常可以表示成与温度的线性关系:

$$V(T) = aT + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

式中, a 和 b 为常数, 与介质材料属性相关.

2.1 正问题的模型

在待识别的结构厚度和边界热流已知的情况下, 通过求解热传导方程得到温度分布, 进而求得超声波传播时间和超声探测器端的温度, 设

$$\begin{aligned} x &= (L, q)^T, f(x) = T, \\ g_1(T) &= T(x = L), \\ g_2(T) &= 2 \int_0^L \frac{1}{aT + b} dx. \end{aligned} \quad (4)$$

记

$$\begin{aligned} F_1(x) &= g_1 \circ f(x) = T(L, t), \\ F_2(x) &= g_2 \circ f(x) = \Lambda(t). \end{aligned} \quad (5)$$

则正问题的算子可表示为

$$F(x) = F \begin{pmatrix} L \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(L, t) \\ \Lambda(t) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

2.2 反问题的模型

考虑反问题, 在介质绝热端放置超声探头, 通过测

图1 超声波探测模型

Figure 1 The model of ultrasonic thermometry.

量超声波在高温介质中的传播时间 $\Lambda_m(t)$ 和超声探头端的温度 $T_m(L, t)$, 反演得到初边值条件中的热流 $q(t)$ 和介质厚度 L , 即

$$\{\Lambda_m(t), T_m(L, t)\} \rightarrow \{q(t), L\}, \quad t \in [0, \tau]. \quad (7)$$

3 唯一性证明

本节给出了反问题的唯一性分析, 从理论角度证明了反问题的唯一性.

设 $(q_1(t), L_1), (q_2(t), L_2)$ 是反问题的两组解, 所对应的温度场分别是 $T_1(x, t), T_2(x, t)$, 则对 $\forall t \in [0, \tau]$:

$$\int_0^{L_1} \frac{1}{aT_1(x, t) + b} dx = \int_0^{L_2} \frac{1}{aT_2(x, t) + b} dx = \Lambda_r(t), \quad (8)$$

式中, $\Lambda_r(t)$ 表示 t 时刻实际的回波时间, 且 $T_1(L_1, t) = T_2(L_2, t) = T_r(L, t), T_r(L, t)$ 为超声测量端的实际温度值.

引理1 (极值原理)^[12]: 设 $T(x, t)$ 在矩形区域 $R_\tau = \{\alpha \leq x \leq \beta, 0 \leq t \leq \tau\}$ 上连续, 并在矩形内部满足:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (9)$$

则它在矩形的两个侧边($x = \alpha \cup x = \beta, 0 \leq t \leq \tau$)及底边($t = 0, \alpha \leq x \leq \beta$)上取得最大值和最小值, 即如果以 Γ_τ 表示 R_τ 的两侧边及底边组成的边界曲线(通称为抛物边界), 则成立

$$\max_{R_\tau} T(x, t) = \max_{\Gamma_\tau} T(x, t), \quad \min_{R_\tau} T(x, t) = \min_{\Gamma_\tau} T(x, t). \quad (10)$$

定理1 (唯一性定理): 设 $(q_1(t), L_1), (q_2(t), L_2)$ 是反问题(7)的两个解, 若温度场 $T(x, t)$ 在定义域上连续, 则有 $q_1(t) = q_2(t), t \in [0, \tau], L_1 = L_2$.

证明: 设 $(q_1(t), L_1), (q_2(t), L_2)$ 对应的温度场分别是 $T_1(x, t), T_2(x, t)$, 则对 $\forall t \in [0, \tau]$, 有

$$\int_0^{L_1} \frac{1}{aT_1(x, t) + b} dx = \int_0^{L_2} \frac{1}{aT_2(x, t) + b} dx. \quad (11)$$

因此, $\forall t_1, t_2 \in [0, \tau]$, 满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \frac{1}{aT_1(x, t) + b} dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \frac{1}{aT_2(x, t) + b} dx dt. \quad (12)$$

由于 $T_1(x, t), T_2(x, t)$ 满足方程(1), 因此, 在初始时刻, $T_1(x, 0) = T_2(x, 0) = T_0(x)$. 因此, 由式(11)可得

$$\int_0^{L_1} \frac{1}{aT_0(x) + b} dx = \int_0^{L_2} \frac{1}{aT_0(x) + b} dx. \quad (13)$$

且 $V(T_0(x)) = aT_0(x) + b > 0, x \in [0, +\infty)$, 因此, $L_1 = L_2$, 记为 L , 构造 $T(x, t) = T_1(x, t) - T_2(x, t)$, 代入式(12)合并后得

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \frac{T(x, t)}{(aT_1(x, t) + b)(aT_2(x, t) + b)} dx dt = 0. \quad (14)$$

由于 $T_1(x, t), T_2(x, t)$ 满足方程(1), 令 $q(t) = q_1(t) - q_2(t)$, 则 $T(x, t)$ 满足如下方程:

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, & (x, t) \in [0, L] \times [0, \tau], \\ -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q(t), & q(t) \in L^2[0, \tau], \\ -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, \\ T|_{t=0} = 0, & x \in [0, L]. \end{cases} \quad (15)$$

由于 $q_1(0) = q_2(0)$, 有 $q(0) = 0$. 由引理1可知, $T(x, t)$ 在 $R_\tau = [0, L] \times [0, \tau]$ 上的最大值和最小值在抛物边界 $\Gamma_\tau = \{x = 0 \cup x = L, 0 \leq t \leq \tau\} \cup \{t = 0, 0 \leq x \leq L\}$ 上取得, 由 $T(x, 0) = 0, T(L, t) = 0$, 所以

$$\max_{R_\tau} T(x, t) \geq 0, \quad \min_{R_\tau} T(x, t) \leq 0. \quad (16)$$

若

$$\max_{R_\tau} T(x, t) > 0, \quad \min_{R_\tau} T(x, t) < 0, \quad (17)$$

即

$$\max_{\Gamma_\tau} T(x, t) > 0, \quad \min_{\Gamma_\tau} T(x, t) < 0. \quad (18)$$

在 $\Gamma_\tau = \{x = 0 \cup x = L, 0 \leq t \leq \tau\} \cup \{t = 0, 0 \leq x \leq L\}$ 上, $T(x, 0) = 0, T(L, t) = 0$, 所以

$$\begin{aligned} \max_{\Gamma_\tau} T(x, t) &= \max_{x=0, 0 \leq t \leq \tau} T(x, t) > 0, \\ \min_{\Gamma_\tau} T(x, t) &= \min_{x=0, 0 \leq t \leq \tau} T(x, t) < 0, \end{aligned} \quad (19)$$

即 $\exists t_1 \in [0, \tau]$, 使得 $T(0, t_1) > 0$, $\exists t_2 \in [0, \tau]$, 使得 $T(0, t_2) < 0$. 考虑函数 $T(0, t)$, 在 $t \in (0, \tau)$ 上连续, $T(0, 0) = 0$, 所以至少有一个极值点在 $t \in (0, \tau)$ 内部取

得. 不妨设第一个极值点 t_a 为极大值点, 则在 $[0, t_a]$ 上 $T(0, t) \geq 0$, 且 $T(0, t_a) > 0$.

取矩形区域 $R_{t_a} = [0, L] \times [0, t_a]$, 抛物边界 $\Gamma_{t_a} = \{x = 0 \cup x = L, 0 \leq t \leq t_a\} \cup \{t = 0, 0 \leq x \leq L\}$, 在此矩形区域上应用极值原理, 得

$$\begin{aligned} \max_{R_{t_a}} T(x, t) &= \max_{\Gamma_{t_a}} T(x, t) = T(0, t_a) > 0, \\ \min_{R_{t_a}} T(x, t) &= \min_{\Gamma_{t_a}} T(x, t) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

因此, $\forall t \in [0, t_a], \forall x \in [0, L], T(x, t) \geq 0, T(0, t_a) > 0$. 又

$$\begin{aligned} V_1 &= aT_1(x, t) + b > 0, \\ V_2 &= aT_2(x, t) + b > 0, x \in [0, L], t \in [0, t_a], \end{aligned} \quad (21)$$

则

$$\int_0^{t_a} \int_0^L \frac{T(x, t)}{(aT_1(x, t) + b)(aT_2(x, t) + b)} dx dt > 0, \quad (22)$$

与式(14)矛盾, 故假设不成立.

若

$$\max_{R_\tau} T(x, t) > 0, \min_{R_\tau} T(x, t) = 0, \quad (23)$$

即

$$\max_{\Gamma_\tau} T(x, t) > 0, \min_{\Gamma_\tau} T(x, t) = 0. \quad (24)$$

在边界 $\Gamma_\tau = \{x = 0 \cup x = L, 0 \leq t \leq \tau\} \cup \{t = 0, 0 \leq x \leq L\}$ 上, $T(x, 0) = 0, T(L, t) = 0$, 所以

$$\begin{aligned} \max_{\Gamma_\tau} T(x, t) &= \max_{x=0, 0 \leq t \leq \tau} T(x, t) > 0, \\ \min_{\Gamma_\tau} T(x, t) &= \min_{x=0, 0 \leq t \leq \tau} T(x, t) = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

即 $\exists t_b \in [0, \tau]$, 使得 $T(0, t_b) > 0$, 且 $\forall t \in [0, t_b], T(x, t) \geq 0$, 则

$$\int_0^{t_b} \int_0^L \frac{T(x, t)}{(aT_1(x, t) + b)(aT_2(x, t) + b)} dx dt > 0, \quad (26)$$

与式(14)矛盾, 故假设不成立.

若

$$\max_{R_\tau} T(x, t) = 0, \min_{R_\tau} T(x, t) < 0, \quad (27)$$

与式(2)类似, 可证 $\exists t_c \in [0, \tau]$, 使得 $T(0, t_c) < 0$, 且

$\forall t \in [0, t_c], T(x, t) \geq 0$, 则

$$\int_0^{t_c} \int_0^L \frac{T(x, t)}{(aT_1(x, t) + b)(aT_2(x, t) + b)} dx dt < 0, \quad (28)$$

与式(14)矛盾, 故假设不成立.

综上所述, $\max_{R_\tau} T(x, t) = 0, \min_{R_\tau} T(x, t) = 0$, 所以 $T(x, t) = 0, t \in [0, \tau], x \in [0, L]$. 根据傅里叶定律, 我们有 $q(t) = 0, t \in [0, \tau]$. 所以 $q_1(t) = q_2(t), t \in [0, \tau]$. 故反问题存在唯一解 $(q(t), L)$.

4 多参数反演算法

4.1 Lagrange乘子法

为求解上述初边值识别问题, 利用测量的超声回波数据和边界温度数据, 结合由正问题数值求解的结果, 构造目标函数, 寻找合适的 $q(t)$ 和 L , 使得数值求解结果收敛到测量结果, 即最小化目标函数, 将反问题转化为由偏微分方程(1)约束的优化问题:

$$\begin{cases} J(q, L) = \frac{1}{2} \int_0^\tau (\Lambda(t) - \Lambda_m(t))^2 dt \\ \quad + \frac{\alpha}{2} \int_0^\tau (T(L, t) - T_m(L, t))^2 dt, \\ \min_{q \in L^2(0, \tau), L \in \mathbb{R}_+} J(q, L), \\ s. t. T \text{ 满足式(1)}, \end{cases} \quad (29)$$

式中, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ 表示正则化参数, 根据Tikhonov正则化准则, 由边界温度数据构造正则项.

为求解无约束优化问题, 采用Lagrange乘子法, 将约束问题转化为无约束优化问题:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(q, L) &= \frac{1}{2} \int_0^\tau (\Lambda(t) - \Lambda_m(t))^2 dt + \alpha (T(L, t) - T_m(L, t))^2 dt \\ &\quad - \int_0^L \int_0^\tau \left\{ \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right\} \lambda_1(x, t) dt dx \\ &\quad + \int_0^\tau \left(k \frac{\partial T}{\partial x} + q(t) \right) \Big|_{x=0} \lambda_2(t) dt \\ &\quad + \int_0^\tau \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=L} \lambda_3(t) dt - \int_0^L (T - T_0) \Big|_{t=0} \lambda_4(x) dx, \end{aligned} \quad (30)$$

式中, $\lambda_1(x, t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)$ 和 $\lambda_4(x)$ 为Lagrange乘子, 要求满足在 (q, L) 为可行点时, 有 $\mathcal{J} = J$.

本文将构造梯度型优化算法求解上述优化问题, 首先求解目标泛函 $\mathcal{J}$ 分别对 q 和 L 的梯度. 泛函求导存在一定的困难性, 构造了伴随状态方程进行梯度的求取, 得到如下伴随方程:

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial \lambda_1(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \lambda_1(x, t)}{\partial x} \right) = S(x, t), \\ -k \frac{\partial \lambda_1(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad -k \frac{\partial \lambda_1(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, \\ \lambda_1(x, \tau) = 0, \lambda_2(t) = \lambda_1(0, t), \end{cases} \quad (31)$$

式中, 源项为

$$S(x, t) = \frac{2a(\Lambda(t) - \Lambda_m(t))}{(V(x, t))^2} + \frac{\alpha}{L}(T(L, t) - T_m(L, t)). \quad (32)$$

由式(30), 关于模型参数的导数可由下列表达式得到

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial q}(t) = \lambda_2(t) = \lambda_1(0, t), \\ \frac{\partial J}{\partial L} = \int_0^\tau (\Lambda(t) - \Lambda_m(t)) \frac{\partial \Lambda(t)}{\partial L} dt = \int_0^\tau \frac{2(\Lambda(t) - \Lambda_m(t))}{V(L, t)} dt. \end{cases} \quad (33)$$

根据以上梯度求解结果, 构造梯度型优化算法, 求解问题(29).

4.2 交替迭代算法

为求解上述多参数识别问题, 考虑到优化问题存在两个决策变量 q 和 L , 当 q 或 L 有一个被固定时, 问题可转化为单个决策变量的优化问题, 因此, 本文提出如下迭代算法:

首先将时间区间离散, i 指示时间变量的离散, 得到 $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_i \leq t_{i+1} \leq \dots \leq t_N = \tau$. 因此, 热流函数被离散为 $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)$, 其中 $q_i = q(t_i)$. 迭代算法表示如下.

第(0)步: 选定初值 $\mathbf{q}^0, L^0$, 迭代停止准则 ε .

第($n, 1$)步: 固定厚度 L^{n-1} . 采用精确搜索下的PRP共轭梯度法求解问题:

$$\min_{q \in L^2[0, \tau]} \mathcal{J}(q, L^{n-1}), \quad (34)$$

更新热流 $\mathbf{q}^n$.

第($n, 2$)步: 固定热流 $\mathbf{q}^n$, 采用Wolfe-Powell搜索下的最速下降法求解问题:

$$\min_{L \in \mathbb{R}^+} \mathcal{J}(\mathbf{q}^n, L), \quad (35)$$

更新厚度 L .

第($n, 3$)步: 求解 $\mathbf{q}^n, L^n$ 条件下的热传导方程并计算回波时间, 代入目标函数检查是否达到停止准则. 如果 $J(\mathbf{q}^n, L^n) < \varepsilon$, 停止迭代, 输出热流和厚度反演值, 否则, 令 $n = n + 1$.

在上述过程中, n 代表迭代步数, 即迭代进行到第 n 步, 序列 $\{\mathbf{q}^{(n)}\}, \{L^{(n)}\}$ 是交替得到的, 迭代算法称为多参数识别交替迭代算法, 算法流程图见图2.

关于交替迭代算法中的两个单决策变量的优化求解算法, 分别为共轭梯度法和最速下降法, 下面将分别对两种算法进行详细介绍.

4.2.1 共轭梯度法更新 $\mathbf{q}$

第 n 次迭代过程中, 固定 L^{n-1} , 采用共轭梯度法求解单决策变量问题, 更新热流 $\mathbf{q}^n$, 热流的更新由下式取得:

$$\mathbf{q}^n = \mathbf{q}^{n-1} + \beta_q^{n-1} \mathbf{p}_q^{n-1}, \quad (36)$$

式中, β_q^n 代表热流的迭代步长, $\mathbf{p}_q^n$ 代表热流的搜索方向, 为共轭搜索方向, 表示为上一步的搜索方向与负梯度方向的组合:

$$\mathbf{p}_q^n = \begin{cases} -\mathbf{g}_q^n, & n = 1, \\ -\mathbf{g}_q^n + \alpha^n \mathbf{p}_q^{n-1}, & n \geq 2, \end{cases} \quad (37)$$

式中, $\mathbf{g}_q^n$ 代表 $\mathcal{J}$ 对 $\mathbf{q}$ 的梯度方向, α 是共轭因子, 按照PRP规则选取:

$$\alpha_{PRP}^n = \frac{\mathbf{g}_q^{(n-1)T}(\mathbf{g}_q^n - \mathbf{g}_q^{n-1})}{\|\mathbf{g}_q^{n-1}\|^2}. \quad (38)$$

步长由精确线搜索得到, 选取规则如下:

$$\beta_q^n = \frac{\sum_{i=0}^N (\Lambda^n(t_i) - \Lambda_m(t_i)) \Delta t_i^n}{\sum_{i=0}^N [\Delta t_i^n]^2}, \quad (39)$$

式中, $\Lambda^n(t)$ 是数值求解得到的传播时间, Δt^n 是由梯度引起的传播时间的变化值, 求解灵敏度问题得到:

图 2 交替迭代算法流程

Figure 2 The flow chart of algorithm.

$$\Delta t^n(t) = 2 \int_0^L \frac{1}{V_{g_q^n}(x, t)} dx, \quad (40)$$

式中, $V_{g_q} = aT_g + b$, $T_g(x, t)$ 是如下灵敏度方程的解:

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \\ -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = g_q^n, \quad -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, \\ T|_{t=0} = T_0. \end{cases} \quad (41)$$

4.2.2 最速下降法更新 L

第 n 次迭代过程中, 得到了更新的 q^n , 固定 q^n , 采用最速下降法求解单决策变量问题, 更新热流 L^n , 厚度的更新由下式取得:

$$L^n = L^{n-1} + \beta_L^{n-1} p_L^{n-1}, \quad (42)$$

式中, p_L^n 代表搜索方向, 为负梯度方向, 即 $p_L^n = -g_L^n$,

g_L^n 代表 J 对 L 的梯度方向, β_L^n 代表厚度的迭代步长, 由一维非精确 Wolfe-Powell 搜索方法得到.

4.3 算法收敛性证明

对于上述多参数识别问题的交替迭代算法, 本节给出严格的全局收敛性证明. 首先给出算法全局收敛性的定义, 以及证明中用的一些必要引理.

定义 1: 考虑迭代过程产生的序列 $\{(q^n, L^n)\}$, $n = 1, 2, \dots, N$, 若满足

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \| (g_q^n, g_L^n) \| = 0, \quad (43)$$

则称算法满足全局收敛性.

引理 2^[13]: 当步长 β 由精确线搜索得到, 目标函数 $f(x)$ 为凸函数, $\{x^n\}$ 为共轭梯度法产生的序列, 则

$$f(x^n) - f(x^n + s^n) \geq c \|s^n\|^2, \quad (44)$$

式中, $\mathbf{s}^n = \mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n$, $c > 0$ 为常数. 因此满足 $\|\mathbf{s}^n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

引理3^[14]: 设目标函数 $f(x)$ 下方有界, 导数 $\nabla f(x)$ 满足Lipschitz条件, 考虑PRP共轭梯度法, 若步长 β 由精确线搜索得到, $\{x^n\}$ 为共轭梯度法产生的序列, 且 $n \rightarrow \infty$ 时, $\|\mathbf{s}^n\| = \|\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n\| \rightarrow 0$, 则梯度序列满足

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{g}^n\| = 0. \quad (45)$$

引理4^[15]: 设目标函数 $f(x)$ 连续可微有下界, 导数 $\mathbf{g}(x) = \nabla f(x)$ 满足Lipschitz条件, 即存在 $M > 0$, 使得 $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq M\|x - y\|$, 优化算法产生序列 $\{x^n\}$, 若步长 λ 的搜索满足

$$f(\mathbf{x}^n + \beta^n \mathbf{p}^n) \leq f(\mathbf{x}^n) - \rho \beta^n (\mathbf{g}^n)^T \mathbf{p}^n, \quad (46)$$

$$(\mathbf{g}^{n+1})^T \mathbf{p}^n \geq \sigma (\mathbf{g}^n)^T \mathbf{p}^n, \quad (47)$$

则

$$f(\mathbf{x}^n) - f(\mathbf{x}^{n+1}) \geq \frac{\rho(1-\sigma)}{M} \|\mathbf{g}^n\|^2 \cos^2 \langle \mathbf{p}^n, -\mathbf{g}^n \rangle, \quad (48)$$

式中, $\sigma \in (\rho, 1), \rho \in (0, 1/2)$, $\mathbf{g}^n$ 为梯度方向, $\mathbf{p}^n$ 为搜索方向.

根据上述引理, 接下来将给出上节提出的交替迭代算法的全局收敛性证明.

定理2: 若多参数反演的目标函数为凸函数, 则式(25)和(31)组成的交替迭代算法格式

$$\begin{cases} \mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{q}^n + \beta_q^n \mathbf{p}_q^n, \\ L^{n+1} = L^n + \beta_L^n p_L^n, \end{cases} \quad (49)$$

满足全局收敛性, 即

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{g}_q^n \\ g_L^n \end{pmatrix} \right\| = 0, \quad (50)$$

式中, $\|\cdot\|_1$ 表示1-范数, 即 $\left\| \begin{pmatrix} \mathbf{g}_q^n \\ g_L^n \end{pmatrix} \right\|_1 = \|\mathbf{g}_q^n\| + |g_L^n|$.

证明: 已知步长 β_q^n 由精确线搜索得到, 则由引理2,

$$\|\mathbf{s}^n\| = \|\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \quad (51)$$

同时, 由 $\nabla J_q = \lambda_2(t) = \lambda_1(0, t)$, $\lambda_1(x, t)$ 满足式(30),

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(x, t)}{\partial q} &= \frac{2a}{(V(x, t))^2} \frac{\partial \Lambda(t)}{\partial q} \\ &\quad - \frac{4a(\Lambda(t) - \Lambda_m(t))}{(V(x, t))^3} \frac{\partial V}{\partial q} + \frac{\alpha}{L} \frac{\partial T(L, t)}{\partial q}, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\frac{\partial \Lambda(t)}{\partial q} = \frac{\partial \Lambda(t)}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial q}, \frac{\partial V}{\partial q} = \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial q}, \quad (53)$$

且由方程(30)的边界条件可得 $k \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial q} = 1, x \in [0, L]$, 因此 T 关于 q Lipschitz连续, 已知 $\Lambda(t)$, V 关于 T 连续, 进而 $S(x, t)$ 关于 q Lipschitz连续, 结合 $S(x, t)$ 是 $\lambda_1(x, t)$ 的源项, 得到 $\nabla f = \lambda_2(t)$ 满足Lipschitz条件, 且 $J(q) \geq 0$ 有下界, 因此, 由引理3,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{g}^n\| = 0. \quad (54)$$

已知步长 β_L^n 由 Powell-Wolfe 线搜索方法得到, 因此满足:

$$J(L^n + \beta_L^n p_L^n) \leq J(L^n) - \rho \beta_L^n (g_L^n) p_L^n, \quad (55)$$

$$(g_L^{n+1}) p_L^n \geq \sigma (g_L^n) p_L^n, \quad (56)$$

$\sigma \in (\rho, 1), \rho \in (0, 1/2)$. 又

$$\nabla J_L = \int_0^\tau \frac{2(\Lambda(t) - \Lambda_m(t))}{V(L, t)} dt, \quad (57)$$

显然 ∇J_L 满足Lipschitz条件, 则由引理4,

$$J(L^n) - J(L^{n+1}) \geq \rho(1 - \sigma) |g_L^n|^2 \cos^2 \langle p_L^n, -g_L^n \rangle. \quad (58)$$

因此

$$\begin{aligned} J(L^0) - J(L^{n+1}) &= [J(L^0) - J(L^1)] + \dots \\ &\quad + [J(L^n) - J(L^{n+1})] \\ &= \sum_{k=0}^n [J(L^k) - J(L^{k+1})] \\ &\geq \sum_{k=0}^n \rho(1 - \sigma) |g_L^k|^2 \cos^2 \langle p_L^k, -g_L^k \rangle. \end{aligned} \quad (59)$$

由最速下降法的搜索方向满足 $p_L^k = -g_L^k$, 故 $\cos^2 \langle p_L^k, -g_L^k \rangle = 1, k = 1, 2, \dots, n$, 式(58)化为

$$\sum_{k=0}^n \rho(1 - \sigma) |g_L^k|^2 \leq J(L^0) - J(L^{n+1}). \quad (60)$$

由 $J(L)$ 下方有界, 所以 $J(L^0) - J(L^{n+1}) < \infty$, 因此由式(60)可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |g_L^k| = 0. \quad (61)$$

因此,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left\| \left(\mathbf{g}_q^n, \mathbf{g}_L^n \right) \right\|_1 = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\left\| \mathbf{g}_q^n \right\| + \left\| \mathbf{g}_L^n \right\| \right) = 0. \quad (62)$$

即式(50)成立, 交替迭代算法收敛.

5 算法验证

本文中设计了数值实验, 对不同热流和厚度初始条件下的反演结果进行了分析, 并与热流单参数反演算法进行对比, 对本文中提出的多参数识别问题的交替迭代算法进行有效性验证.

对实际厚度为 $L=50$ mm 的固体试样的一端给定热流边界条件 $q(t)$, 另一端绝热, 材料的属性如下: 导热系数 $k=50$ W/(m °C), 比热 $c=400$ J/(kg °C), 材料密度 $\rho=7800$ kg/m³.

给定初始温度分布: $T_0=26^\circ\text{C}$. 超声波在介质中的传播速度和温度场的关系为

$$V(T) = -0.4521T + 3259.9. \quad (63)$$

探测频率为每次 1 s, 即每秒激发/接收信号一次, 探测总时间为 500 s.

接下来, 将给出两种热流边界条件下的算例, 分别验证不同的初值条件下, 算法的反演有效性.

5.1 算例1

当真实热流条件为定值, 即 $q(t)=10^5$ J/s, 得到热流与厚度的反演结果见表1.

表1显示, 在边界热流恒定的条件下, 交替迭代算法对于厚度的反演效果理想, 相对误差在 0.005% 左右, 初始值对于迭代算法的影响很小, 在不同的初始条件下, 迭代算法均在有限的次数内收敛.

图3和图4分别展示了初始热流和初始厚度对热流

图3 固定初始厚度, 不同热流初值下热流的反演结果

Figure 3 Heat flux inversion results under a fixed initial thicknesses and different initial heat flux.

图4 固定初始热流, 不同厚度初值下热流的反演结果

Figure 4 Heat flux inversion results under a fixed initial heat flux and different initial thickness.

反演结果的影响, 由图可以看出, 在不同的初始条件下, 反演热流与真实热流接近, 反演效果理想.

在相同的输入数据情况下, 选取相同的初始热流 1000 J/s, 对比了单参数识别算法和双参数识别算法的热流反演结果.

如图5所示, 在边界热流恒定的条件下, 双参数识别算法在时间初始点处取得更好的反演结果. 在计算效率方面, 单双参数识别算法的迭代次数分别为 50 和 57, 因此, 根据此数值实验结果, 双参数反演算法较单参数反演算法在效率方面, 随辨识数目增多有一定降低.

表1 不同初始条件下厚度的反演结果

Table 1 Thickness inversion results under different initial conditions

初始热流 (J/s)	初始厚度 (mm)	反演厚度 (mm)	迭代次数
0	3	50.0006	63
1000	3	50.0016	57
100000	3	50.0006	147
1000	45	50.0025	77
1000	80	50.0025	80

5.2 算例2

当真实热流条件为随时间变化的分段连续函数, 得到热流与厚度的反演结果见表2.

如表2所示, 在边界热流分段连续的情况下, 交替迭代算法对于厚度的反演依然取得了理想的效果, 相对误差控制在0.01%左右, 不同的热流与厚度初始条件下, 迭代算法均在有限的次数内收敛.

由图6和图7所示, 初始热流和初始厚度对热流的反演结果均影响较小, 热流的反演结果与实际热流接近, 交替迭代算法反演效果理想.

在相同的输入数据情况下, 选取相同的初始热1000 J/s, 对比了单参数识别算法和双参数识别算法的反演结果.

如图8所示, 在边界热流分段连续条件下, 双参数识别算法精度更高. 在计算效率方面, 单双参数识别算法的迭代次数分别为70和84, 和算例1类似, 双参数反演算法随辨识数目增多效率有一定降低.

图5 双参数反演算法与单参数反演算法对比结果
Figure 5 Heat flux inversion results under different algorithm.

表2 不同初始条件下厚度的反演结果

Table 2 Thickness inversion results under different initial conditions

初始热流 (J/s)	初始厚度 (mm)	反演厚度 (mm)	迭代次数
0	30	50.0048	83
1000	30	50.0048	84
100000	30	50.0047	56
1000	40	50.0048	97
1000	80	50.0047	186

图6 固定初始厚度, 不同热流初值下热流的反演结果
Figure 6 Heat flux inversion results under a fixed initial thicknesses and different initial heat flux.

图7 固定初始热流, 不同厚度初值下的热流反演结果
Figure 7 Heat flux inversion results under a fixed initial heat flux and different initial thickness.

图8 双参数反演算法与单参数反演算法对比结果
Figure 8 Heat flux inversion results under different algorithm.

6 总结

本文研究了一类热-声-固多物理场耦合中的初边值识别问题, 证明了耦合问题多参数识别中解的唯一性, 给出了相关的多参数识别算法和收敛性条件等, 主要结论如下.

(1) 在温度场分布连续的假设下, 通过热传导方程的极值定理, 证明了本文所研究的多参数识别问题的唯一解, 为超声同时测温测厚等的工程应用提供了理论支撑.

(2) 基于热声耦合原理及优化方法原理, 本文提出了一种交替迭代算法, 可有效获得热流边界与介质厚度等多参数的识别, 为超声同时测温测厚等的工程应用提供了技术支撑.

(3) 结合精确搜索下的PRP共轭梯度法和Wolfe-Powell线搜索下的最速下降法等收敛性分析, 得到了交替迭代算法的收敛条件, 进而证明了本文提出的交替迭代算法具有全局收敛性. 同时, 通过设计数值实验, 验证了算法的有效性, 且不依赖于初值, 相对于热流单参数识别算法精度有更好的数值表现.

参考文献

- 1 Lu C H, Tsai C C. Adaptive decoupling predictive temperature control for an extrusion barrel in a plastic injection molding process. *IEEE Trans Ind Electron*, 2001, 48: 968–975
- 2 Dharmaraj K J, Cox C D, Strauss A M, et al. Ultrasonic thermometry for friction stir spot welding. *Measurement*, 2014, 49: 226–235
- 3 Wang J W. Corrosion and protection of thermal pipeline (in Chinese). *J ZhongZhou Univ*, 2006, 23: 124–125 [王景文. 热力管道的腐蚀与防护. 中州大学学报, 2006, 23: 124–125]
- 4 Mizutani K, Kawabe S, Saito I, et al. Measurement of temperature distribution using acoustic reflector array. *Jpn J Appl Phys*, 2006, 45: 4516–4520
- 5 Shi Y A, Wei D, Zeng L, et al. Research on reconstruction method for two-dimensional temperature field in solid using ultrasound (in Chinese). *Sci Sin Tech*, 2019, 49: 518–530 [石友安, 魏东, 曾磊, 等. 超声固体测温中的二维温度场重建算法研究. 中国科学: 技术科学, 2019, 49: 518–530]
- 6 Wei D, Yang X F, Shi Y A, et al. A method for reconstructing two-dimensional surface and internal temperature distributions in structures by ultrasonic measurements. *Renew Energy*, 2020, 150: 1108–1117
- 7 Wei D, Shi Y A, Shou B N, et al. Reconstruction of internal temperature distributions in heat materials by ultrasonic measurements. *Appl Thermal Eng*, 2017, 112: 38–44
- 8 Shi Y A, Wei D, Gui Y W, et al. Reconstruction of transient nonuniform temperature field in solid structures using inverse methods (in Chinese). *Acta Armam*, 2016, 12: 2347–2355 [石友安, 魏东, 桂业伟, 等. 固体结构内部瞬态非均匀温度场的重建方法研究. 兵工学报, 2016, 12: 2347–2355]
- 9 Wei D, Shi Y A, Hu B, et al. Experimental study on sensing the internal temperature distributions of structures by electromagnetic ultrasonic (in Chinese). *Chin J Mech Eng-En*, 2019, 55: 93–99 [魏东, 石友安, 胡斌, 等. 电磁超声法测量结构内部温度场的试验研究. 机械工程学报, 2019, 55: 93–99]
- 10 Li J H, Zhang Y C, Di Y L, et al. Ultrasonic thickness measurement method for high pressure and temperature tube by waveguide bar (in Chinese). *Nondestruct Test*, 2009, 31: 593–599 [李金红, 张雅超, 邸艳玲, 等. 采用导波杆方式超声检测高温高压管道壁厚的方法. 无损检测, 2009, 31: 593–599]
- 11 Guo Q Y, Wang Y Q. Study on thickness measurement of industry pipelines (in Chinese). *Corros Protect Petrochem Ind*, 2006, 23: 26–27 [郭庆云, 王亚权. 工业管道测厚的几点问题探讨. 石油化工腐蚀与防护, 2006, 23: 26–27]
- 12 Gu C H, Li D Q. Partial Differential Equations (in Chinese). 3rd ed. Beijing: Higher Education Press, 2012. 63–64 [谷超豪, 李大潜. 数学物理方程. 第三版. 北京: 高等教育出版社, 2012. 63–64]
- 13 Yuan Y X. Analysis on the conjugate gradient method. *Optim Methods Softw*, 1993, 2: 19–29
- 14 Dai Y H, Yuan Y X. Nonlinear Conjugate Gradient Methods (in Chinese). Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1999. 31–33 [戴戎虹, 袁亚湘. 非线性共轭梯度法. 上海: 上海科学技术出版社, 1999. 31–33]
- 15 Chen K M. Nonlinear Programming (in Chinese). Shanghai: Fudan University Press, 1991 [陈开明. 非线性规划. 上海: 复旦大学出版社, 1991]

Research on the uniqueness and algorithm of multi-parameter identification in coupling thermal acoustic and solid problem

ZHU LiYan^{1,2}, DENG YouJun¹, WEI Dong² & GUI YeWei²

¹ School of Mathematics and Statistics, Central South University, Changsha 410083, China;

² State Key Laboratory of Aerodynamics, China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang 621000, China

In the coupled thermal-acoustic solid field, we consider the identification problem of initial boundary value from the boundary measurements of temperature and ultrasonic propagation time to reconstruct the boundary heat flux and thickness of a solid structure simultaneously. Through rigorous theoretical analysis, the uniqueness of the simultaneous identification is demonstrated, which provides theoretical support for engineering applications. By reformulating an inverse problem as an optimization problem and deriving the adjoint equation, we propose an efficient alternating iteration algorithm for solving the inverse problem. Rigorous convergence analysis of the proposed algorithm is performed. Finally, the reliability and feasibility of the algorithm are verified via numerical examples, and the algorithm's accuracy is verified by comparing it with a single-parameter identification algorithm that only identifies heat flux.

coupled thermal-acoustic-solid, multi-parameter inversion, uniqueness, alternating iteration algorithm, convergence analysis

doi: [10.1360/SST-2021-0341](https://doi.org/10.1360/SST-2021-0341)