

钱伟长

——我国近代力学 和国际奇异摄动理论的奠基人

刘高联*

(上海大学应用数学和力学研究所 上海 200072)

关键词 应用数学, 奇异摄动理论, 力学, 广义变分原理, 奠基人, 钱伟长



中国科学院



钱伟长院士

国际著名应用数学和力学专家、教育家和社会活动家, 中国科学院和波兰科学院院士、上海大学校长钱伟长先生今年已 94 岁高龄。钱老在其大半辈子的学术生涯中, 与时俱进, 不断创新, 成就卓著, 在科研和育

* 中国科学院院士, 上海大学应用数学和力学研究所教授
收稿日期: 2006 年 1 月 5 日

人上都做出了突出的贡献, 使他早已成为公认的我国近代力学的奠基人之一^[1,2]。不仅如此, 钱老还是世界奇异摄动理论当之无愧的奠基人之一, 这个结论是笔者在 4 年前应美国弗吉尼亚州立理工大学高扬教授之邀为其主编的《献给钱老 90 寿辰》专集^[3]撰写的一祝文时郑重宣布的。为此, 我曾用近 3 个月的时间集中对大量有关文献进行了深入的领会、分析对比, 并对时序做了仔细的考证。下面着重介绍钱老在这方面的主要成就。

1 摄动理论

1.1 正则摄动理论

1947 年钱老创建了以中心挠度 (与板厚 h 之比) w_m 为摄动参数作渐近展开的摄动解法, 第一次成功地求得了园薄板大挠度 von Karman 非线性微分方程的级数解。此法有下列几个创新特点:

(1) 与通常都选已知参数为摄动参数的惯例相反, 本文所选的摄动参数 w_m 本身是未知的。这样做的优越性是显著改善了级数的收敛性。为了说明这一点, 让我们分析挠度 w 的展开式:

$$w=w_1(\eta) \cdot w_m+w_3(\eta) \cdot w_m^3+w_5(\eta) \cdot w_m^5+\cdots \quad (1)$$

对于周边为固夹和简支的情况,利用中心点($\eta=1$)处的边界条件,可立即由(1)式得知,在中心点有 $w(1)=w_m$ 。可见,在中心点上,无论 w_m 多大,展开式(1)只存在第一项(线性项),其它所有 w_m 的高次项都消失,这说明选取 w_m 为摄动参数是非常明智的,它使渐近展开式有很好的收敛性。如果按 Vincent (1931) 改选无量纲外载压力参数 p 为摄动参数,则挠度的摄动展开式将是:

$$w=v_0(\eta) \cdot p+v_1(\eta) \cdot p^3+v_2(\eta) \cdot p^5+\cdots \quad (2)$$

对于周边简支的情况,在中心处有: $v_i(1) \neq 0$, ($i=0,1,2,\cdots$) 因而 w 同 p 是非线性关系,这正体现大挠度下的几何非线性。显然,展开式(2)的收敛性就比钱老的展开式(1)差。本方法在前苏联被广泛引用,并被称为钱氏摄动法。

(2) 钱老选的摄动参数 w_m 根本就不出现在 von Karman 大挠度方程及边界条件中。这使我们想到它同人工参数摄动法很类似,但通常人工参数并无物理意义,而钱老引入的参数 w_m 却具有鲜明的物理意义。

(3) 钱氏摄动法的结果也可以用下列重整化法得到:先按 Vincent (1931 年) 以 p 为摄动参数求得(2)式,以 $\eta=1$ 代入,得到 w_m 的展开式,然后对它进行反演,即可得到

$$p=\alpha_1 w_m+\alpha_2 w_m^3+\alpha_3 w_m^5+\cdots \quad (3)$$

将它代入(2)式消去 p ,即得钱法的展开式(1)。

(4) 我们也可以把(2)式看成是应用参数变形法的结果,不过,为了得到钱法的结果,还必须对(2)式反演出(3)式和(1)式。因此,钱老的摄动法应看作“参数变形法的反演”。

钱氏摄动法的上述特点(尤其是第(1)、(2)点)大大拓宽了人们选择摄动参数的眼界

和技巧,充分体现了钱老突出的创造性,使摄动法的研究推进了一大步,其结果同 McPherson, Rumberg 和 Levy (1942 年) 的实验数据非常吻合。

1.2 奇异摄动理论

当板壳挠度非常大时,上述摄动解会遇到收敛的困难,钱老接着于 1948 年又深入研究了在这种情况下固夹园薄板受均布负荷的问题,即后来称作奇异摄动问题的典型类型之一。他首先发现这里存在边界效应(类似于流体边界层),在板的外边界狭小邻区内,挠度 w 的变率很大,传统的(正则)摄动法失效,为了看清那里的变化,他提出使用“放大镜”,即引用新的放大坐标 β ,把渐近解分解成两部分之和,例如将挠度 w 写成:

$$w=F(\eta,\tau)+G(\beta,\tau) \quad (4)$$

其中 F 是以原坐标 η 和负荷参数 τ (与 $p^{1/3}$ 成比)表示的外区挠度, G 则是用放大的新坐标 β 和 τ 表示的边界层内挠度修正项, F 和 G 都被展成 τ 的级数。首先对外区展开,用 $\eta=0$ 处边界条件得外区摄动解 F ,其中第一项就是 Hencky 的薄膜解;接着将(4)式代入微分方程,再利用 $\eta=0$ 处边界条件可得边界层内区的修正展开式,而合成展开式(4)就是在全区内都适用的渐近解。这就是钱老首创的合成展开法,它比 Prandtl 的匹配展开法在构思上和数学技巧上都有显著的突破和创新,而且非常有效,其结果同实验非常吻合。国际上类似的方法(例如 E. Bromberg)到 1956 年以后才出现,即比钱法至少迟了 8 年。

众所周知,边界层型的奇异摄动理论起源于 1905 年 Prandtl 的匹配渐近展开法,后来的发展主要有:1948 年钱氏的合成展开法,1949 年 Lighthill (或 PLK 法) 变形坐标法,1964 年 Van Dyke 的高阶匹配原则。显

然,其中钱法提出最早,因此,钱老应当是 Prandtl 之后最早对奇异摄动理论做出突出贡献的科学家。应当指出的是:Lighthill 法只宜用于双曲型方程(他本人也承认这一点),而钱法至少对椭圆型方程(例如薄板问题)是有效的。

此外,前苏联学者 Lusternik 等于 1957 年提出了边界层修正法,并得到广泛应用,但我们不难发现,其基本思想同钱氏的合成展开法非常相似,但比钱法已晚了 9 年!

1985 年,钱老同陈山林合作又对合成展开法进行了下列改进:①改用薄板中心挠度 w_m 为摄动参数,从而大大提高了收敛速度;②所有边界条件都在各级近似中满足,并改进了结果的可靠性。

1947 年钱老在求解超声速锥体绕流问题时,以 Karman-Moore 的线化解为一次摄动解,求得了以锥角 ε 及其下列组合为摄动参数的渐近级数解。

$$\varepsilon^2, \varepsilon^4(\lg \frac{2}{\varepsilon}), \varepsilon^4, \varepsilon^6(\lg \frac{2}{\varepsilon})^2, \varepsilon^6(\lg \frac{2}{\varepsilon}), \varepsilon^6 \quad (5)$$

一般讲,要找出(5)式这样的参数组合是很不容易的,但钱老巧妙地通过 Karman-Moore 线化解的展开式找到了它们。接着,将它们看成 6 个具有不同尺度的参数(依次记作 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$),将未知解 φ 展成多重尺度 λ_i 的级数。

可以看出,该方法同后来(1962 年)Mahony 首先提出的“多重尺度法”基本思想十分类似,不同的是钱老利用了多重尺度的摄动参数,而不是多重尺度的坐标,所以钱法可称为“参数多重尺度法”。

由上述事实和分析雄辩地证明,钱老不论对奇异摄动理论,而且对薄板大挠度理论都做出了世界领先的重大贡献,是世界奇异摄动理论当之无愧的主

要奠基人之一。这项成果曾获国家自然科学奖二等奖(1955 年)。

2 弹性板壳统一的内禀理论

1941 年以前,弹性板壳理论中采用了各种各样的近似简化条件,割断了同三维弹性力学理论的联系,局面相当混乱,很难对它们的合理性和准确性做出统一的对比和评价。例如,不但把板与壳分开处理,而且薄壳也按其几何形状不同而采取不同的近似方法处理。一般都是从板壳的二维单元出发,建立其宏观内力素的平衡方程,再采用 Kirchhoff-Love 3 条假设来决定内力素同中面应变的关系,从而导出 3 个未知中面位移分量应满足的 3 个平衡微分方程。钱老早就对这些近似板壳理论深感不满,并于 1938—1939 年在国内时即已开始对此问题进行了全面的革新研究。他首次应用微观应力应变关系将三维弹性力学平衡方程改写成以应变张量来表示的形式,同时,采用拖带坐标系 (x^0, x^1, x^2) (其中 x^1 与 x^2 为中面上的高斯坐标系,而 x^0 则与中面正交),通过张量分析,导出了以中面拉伸张量 $p_{\alpha\beta}(\alpha, \beta=1, 2)$ 和弯曲张量 $q_{\alpha\beta}$ 来表示的 3 个平衡方程和 3 个协调方程,从而建立了板壳精确的微观



1956 年钱伟长在北京接受波兰科学院院士证书
(左起:郭沫若、钱伟长、波兰大使)



中国科学院

通用内禀理论。

当钱伟长第一次进谒(1940年9月)其导师 Syngé 时,发现他们两人都在研究同一个问题,只不过 Syngé 研究的是板壳宏观内禀理论,即导出用板壳各内力素(内力和内力矩)张量表示的(宏观)平衡方程。按照 Syngé 的建议,这两种内禀理论被合写成一篇论文,发表在 von Karman 60 寿辰祝贺文集中。值得特别指出的是该文集只收编了 21 篇论文,其作者(共 26 人),除年仅 29 岁的钱伟长外,都是当时世界权威学者(其中有 A. Einstein, von Neumann, von Mises, R. Courant 和 S. Timoshenko 等),这大大激励了钱伟长攀登科学高峰的勇气和信心。这篇文章发表后,颇受学术界的重视,例如荷兰力学家 Rutten 教授对它做了高度评价。在上世纪 50—60 年代,这篇文章曾多次被美国和前苏联等国的学者(如 E.L. Reiss, H.M. Muskhvili 和 A.S. Volmir 等)引用。

随后(1942年),钱老在其博士论文中继续深化和发展了他的微观内禀理论,主要贡献有:①按板壳厚度和曲率的量级分析来进行系统分类,得到不同精度的 12 类薄板和 35 类薄壳问题,它们各由 6 个方程(含 $p_{\alpha\beta}$ 和 $q_{\alpha\beta}$)所描述。它们不但包涵了常见的小挠度方程和一些已知的大挠度方程,而且还含有不少很具有实用价值的新方程,其中尤以扁壳方程最为重要,它和圆柱壳方程一起被广泛称为“钱伟长方程”。②将三维微观平衡方程沿板壳厚度进行积分,就导得了以内力素表示的宏观平衡方程,从而把 Syngé 的宏观理论和钱老的微观理论完全统一了起来。6 年以后(1948 年),C. Truesdell 才独立完成了内容相似的文章。③对板壳的边界效应做了深入分析,其后来在 60 年代推动了不少有关三维理论的边界效应问题的研究,其中包括著名的 A.E. Green, E. Reissner 和 P.

Cicala 等人的工作。

总之,钱老的板壳内禀理论是国际上首次建立的严格、统一和精确的理论,它将板壳理论推进到一个新的发展阶段。上述论文曾经是 20 世纪 40—50 年代应用力学研究生的必读文献,他的贡献对以后的研究工作有很大影响。甚至 A.C. Eringen 在开始进行理性力学的开创性工作时,也从钱老的板壳内禀理论中得到过启迪。

3 广义变分原理与有限元法

早在 1964 年钱老就提出了建立广义变分原理的系统性方法,他从弹性力学的势能和余能原理出发,利用 Lagrange 乘子法把变分约束并入变分泛函中,接着由泛函的驻值条件来唯一地识别乘子,从而严格地导出了广义变分原理,于是彻底改变了此前只能靠先验的凑合法来建立广义变分原理的落后面貌。这个方法具有通用性,并不限于弹性力学,无疑对广义变分原理的发展是一个重要的贡献。遗憾的是该文投给《力学学报》后,因审查人对 Lagrange 乘子法的误解而未能发表。后来 Washizu (1968) 和 Zienkiewicz (1977) 才对此作了论述,但比钱文已晚了很多年。1979 年改革开放后,钱老才得将该文正式发表,并因此获国家自然科学奖二等奖(1982)。

钱老于 1983 年又发现,例如,当采用 Lagrange 乘子法试图从 Hellinger-Reissner 变分原理推导出广义变分原理时,乘子被识别恒等于零,从而无法消除应力应变约束,也就不能建立广义变分原理,他称这种现象为临界变分状态,并为消除这种现象而创出了“高阶 Lagrange 乘子法”,从而成功地把 Hellinger-Reissner 变分原理和 Hu-Washizu 广义变分原理推广成相应的更普遍的广义变分原理。这是钱老对广义变分原理做出的另一突破性贡献。

1987—1988 年钱老在非线性和几何的非线性)弹性力学的变分原理研究方面又取得了重要成果:①首次建立了大位移非线性弹性力学的余能驻值原理,这是一个公认的难题。②运用上述高阶乘子法,成功地建立了广义变分原理族。

此外,钱老还在流体力学和磁场理论中的变分原理方面得出了新的成果。例如他在适当的简化约定下,应用加权余量法建立了粘性流体 Navier-Stokes 方程的广义变分原理和极值功率消耗原理;建立了三维各向正交异性非线性静磁场的各种变分原理,特别是其中的余能原理及其派生广义变分原理族以前从未见诸文献。

钱老对有限元法本身也有不少创新,例如,他利用 Lagrange 乘子把相邻单元分界面上的连续条件转化为自然界面条件,这样既缩减了自由度,又简化了刚度矩阵。这是对非协调杂交元的一项重大改进。他又创建了一个使一致质量矩阵对角化的新方法,为计算动力学问题(撞击、振动等)提供了一个很有效的方法。

4 其它学术贡献

除上述三项最主要贡献外,钱老在环壳理论与应用、变扭的扭转问题、汉字信息处理(钱码)、三角级数求和法、二维叶栅出流角的保角变换解法以及薄板压延理论等方面也都有重要研究成果。

应当指出,钱老之所以能在科研上取得如此广泛而卓越的成就,是同他对教育、教学、治学、教学与科研、教书与育人、学校与社会等问题都有一套精辟、独到而完整的思

想和观点分不开的。上世纪 50 年代钱老在参加制定 12 年国家科学技术发展远景规划时,周恩来总理曾将他和钱学森、钱三强一起赞誉为“三钱”。

可惜限于篇幅,在此不可能对这些贡献一一详述,建议参考文献^[1,2]。

5 结语

以上的简略介绍已足可表明钱老是一位学术造诣精深、才华横溢、既具有战略眼光和超前意识,又勤奋务实,是当之无愧的中国近代力学和应用数学的奠基人之一,也是国际上奇异摄动理论的奠基人之一;他在板壳非线性内禀理论方面的经典性著作已经成为该领域发展史上的一个里程碑。在教育领域,他通过半个多世纪不懈的努力,培养了中国一代又一代的优秀科技和教育人才,对中国科技和教育事业的发展必将产生深远的影响。钱老虽然历经坎坷,但他始终处变不惊,以自强不息、创新不止的精神,坚持科研与教学工作,从来没有动摇过对祖国对人民的深爱。我们在此衷心祝愿钱老健康长寿,继续引领我们在科教兴国的征程上不断取得新的成就。

主要参考文献

- 1 Liu Gao-Lian. Wei-Zang Chien and his contributions to applied mathematics and mechanics. Complementarity, Duality and Symmetry in Nonlinear Mechanics (Proc. IUTAM Symp.ed. by David Y. Gao), Boston: Kluwer Acad. Publ., 2004, xxi-lvii.
- 2 谈镐生等.祝贺钱伟长院士 90 寿辰专刊.力学进展, 2003, 33(1).

(相关图片请见封四)



中国科学院